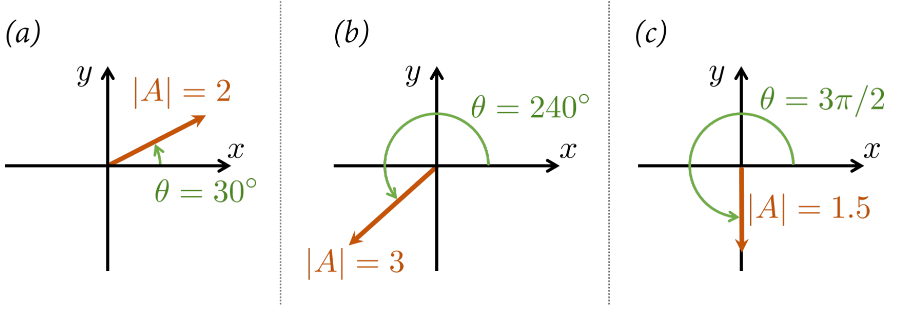
Práctica 0 – Repaso matemático

Vectores

1. Determinar el módulo y dirección de los siguientes vectores. Representar gráficamente.

$$\boldsymbol{A} = (-4; 3), \quad \boldsymbol{B} = (2; 0), \quad \boldsymbol{C} = -2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}, \quad \boldsymbol{D} = 0\,\hat{x} - 5\,\hat{y}.$$

2. Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3. Dados los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, hallar gráficamente la suma, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

(a) $\boldsymbol{A} = (-3; 2)$, $\boldsymbol{B} = (-2; 5)$.

(b) $|\boldsymbol{A}| = 2$, $\theta_A = 20°$, $|\boldsymbol{B}| = 3$, $\theta_B = 135°$.

(c) $\boldsymbol{A} = (-2; 0)$, $\boldsymbol{B} = (0; 4)$.

(d) $|\boldsymbol{A}| = 3$, $\theta_A = 5\pi/4$, $|\boldsymbol{B}| = 2$, $\theta_B = -\pi/4$.

Después, hallar analíticamente las componentes cartesianas y polares de los vectores $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$. ¿El módulo del vector suma, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, es igual a la suma de los módulos de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$?

4. Encontrar el vector que tiene origen en el punto $\boldsymbol{P}$ y extremo en $\boldsymbol{Q}$, en los siguientes casos:

(a) $\boldsymbol{P} = (2; -1)$ y $\boldsymbol{Q} = (-5; -2)$.

(b) $\boldsymbol{P} = (2; -5; 8)$ y $\boldsymbol{Q} = (-4; -3; 2)$.

5. Dados los vectores $\boldsymbol{A} = 3\,\hat{x} + 2\,\hat{y} + 3\,\hat{z}$, $\boldsymbol{B} = 4\,\hat{x} - 3\,\hat{y} + 2\,\hat{z}$, $\boldsymbol{C} = -2\,\hat{y} - 5\,\hat{z}$, efectuar las siguientes operaciones:

(a) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})/\boldsymbol{C}$ (b) $5\,\boldsymbol{A} - 2\,\boldsymbol{C}$ (c) $-2\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}/5$

6. El producto escalar entre dos vectores se define como $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} := |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Sean $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ los versores usuales que forman una terna derecha. Calcular los productos: $\hat{x} \cdot \hat{x}$, $\hat{x} \cdot \hat{y}$, $\hat{x} \cdot \hat{z}$, $\hat{y} \cdot \hat{y}$, $\hat{y} \cdot \hat{z}$, $\hat{z} \cdot \hat{z}$.

7. Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma, y los resultados del ejercicio anterior, demostrar que si $\boldsymbol{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$ y $\boldsymbol{B} = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$ entonces $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

8. Efectuar el producto escalar entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y decir si en algún caso $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares.

(a) $\boldsymbol{A} = 3\,\hat{x} - 2\,\hat{y} + 1\,\hat{z}$, $\boldsymbol{B} = -1\,\hat{x} + 3\,\hat{z}$.

(b) $|\boldsymbol{A}| = 3$, $|\boldsymbol{B}| = 2$, $\theta_{AB} = 60°$.

(c) $\boldsymbol{A} = (2; 3; -1)$, $\boldsymbol{B} = (6; -5; 2)$.

(d) $|\boldsymbol{A}| = 1$, $|\boldsymbol{B}| = 4$, $\theta_{AB} = \pi$.

Derivadas e Integrales

9. Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Derivar las siguientes funciones:

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b \cdot t + c$

(c) $f(t) = b \cdot t^{-1} + c$

(d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq 1$

(e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$

(f) $f(t) = A\,\sin(\omega\,t + \phi)$

(g) $f(t) = A\,\cos(\omega\,t + \phi)$

(h) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\,\cos(\omega\,t + \phi)$

10. La *función primitiva* $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, es tal que su derivada es $f(t)$. Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Hallar la primitiva de $F(t)$ de las siguientes funciones. No olvidar las constantes de integración.

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b \cdot t + c$

(c) $f(t) = b \cdot t^{-1} + c$

(d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq 1$

(e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$

(f) $f(t) = A\,\sin(\omega\,t + \phi)$

(g) $f(t) = A\,\cos(\omega\,t + \phi)$

(h) $f(t) = \frac{2\,t}{t^2+1}$ [integración por sustitución]

(i) $f(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$ [integración por partes]

11. Utilizando la regla de Barrow —$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con F una primitiva de f— calcular las siguientes integrales:

(a) $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t$ (con a constante)

(b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$ (con $v(t)$ del ítem anterior)

(c) $E_p(h) = \int_0^h mg\,\mathrm{d}x$ (mg constante [fuerza gravitatoria])

Ecuaciones diferenciales

12. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, hallando la función $y(t)$ correspondiente. En todos los casos, y_0 es una constante. Notación: $\dot{y} \equiv dy/dt$.

(a) $\dot{y} = 2$, $y(0) = 0$.

(b) $\dot{y} = a$, $y_0 = y_0$.

(c) $\dot{y} = \mathrm{e}^t + 2$, $y(0) = y_0$.

(d) $\dot{y} - \sin(3\,t) = 0$, $y(0) = y_0$.

(e) $\dot{y} = 2\,y$, $y(1) = y_0$.

(f) $t\,\dot{y} = 1$, $y(1) = y_0$.

13. Supongamos que una colonia tiene N_0 bacterias al tiempo $t = 0$. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \kappa\,N, \quad \kappa > 0.$$

(a) Resolver la ecuación anterior para hallar $N(t)$. Graficar cualitativamente la solución.

(b) ¿Cuánto tarda la colonia en duplicar la población inicial? ¿Cuánto hay que esperar luego para que se vuelva a duplicar?

14. Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $a = -\gamma\, v$, donde v es la velocidad y γ es una constante positiva que depende de la masa del objeto, de su forma y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0 > 0$, encontrar la velocidad del objeto en función del tiempo.

15. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tomar como condición inicial, en todos los casos, $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. F, A y m son constantes.

(a) $m\,\ddot{x} = F$.

(b) $\ddot{x} = A\,t$.

(c) $\ddot{x} = \mathrm{e}^t$.

Ayuda: para resolver este tipo de ecuaciones, puede ser conveniente asignar un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, usar $\dot{x} \equiv v$, $\ddot{x} = \dot{v}$. *Notación:* $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$.

16. La ecuación diferencial $\ddot{x} = -\omega^2 x$ tiene como solución a la función (verificar) $x(t) = A\cos(c\,t{+}\phi)$, donde A y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema. Encuentre el valor de c para que esta función efectivamente sea solución de la ecuación. Una vez hallado c, encuentre los valores de A y ϕ sabiendo que a $t = 0$, $x(t = 0) = 0$ y $v(t = 0) = v_0$. Esta solución (y la ecuación que se resuelve) es la que se encuentra para el movimiento de un péndulo o un resorte (más de estos temas en próximas guías). *Ayuda:* Para encontrar c, reemplace $x(t)$ en la ecuación y despeje c.

17. Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

(a) $\ddot{x} = -4\,x$, con $x(0) = 3$ y $\dot{x}(0) = 0$.

(b) $\ddot{x} = -4\,x$, con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 6$.

18. Supongamos ahora que la ecuación a resolver es $\ddot{x} = -\omega^2 x - \frac{\gamma}{m}v = -\omega^2 x - \frac{\gamma}{m}\dot{x}$. Sabemos que, bajo ciertas condiciones, la solución a esta ecuación diferencial es de la forma $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-b\,t}\cos(c\,t + \phi)$, donde A y ϕ son constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema. Al igual que en el problema 16, halle los valores de b y c para que $x(t)$ sea efectivamente solución de la ecuación diferencial. Esta ecuación es una combinación de las situaciones dadas en 14 y en 16. Es decir, esta ecuación describe un movimiento oscilatorio, al que se le agrega una amortiguación.