Ejemplo de propagación de errores, La máquina de Atwood.

Santiago Perez

Septiembre, 2020

1. Introducción

La máquina de Atwood (fig.1) fue diseñada por George Atwood en 1784, 100 años después de que Newton enunciará sus 3 leyes de movimiento. Este sencillo aparato permite reducir la aceleración de una masa en caída libre, a una fracción de la aceleración debido a la fuerza gravitatoria. Gracias a esto, George Atwood no solo la utilizó para medir la aceleración gravitatoria sino tambien para realizar pruebas sobre la mecánica de newton bajo los efectos de una aceleración uniforme.

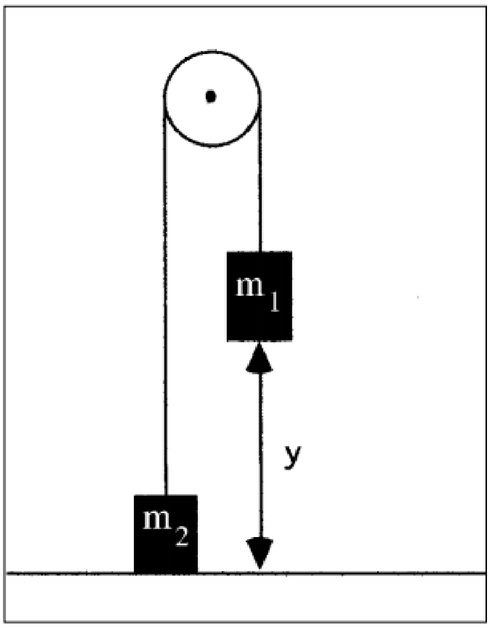


Figura 1: Máquina de Atwood simple

Como las dos masas, por el vinculo de la soga y la polea, se mueven una misma distancia en una misma cantidad de tiempo, cinematicamente obtenemos la siguiente ecuación

$$a = \frac{2y}{t^2} \tag{1}$$

En donde t es el tiempo transcurrido entre que se deja caer la masa m_1 y la misma toca el piso, la y es la altura a la que se deja caer la masa. Entonces a puede ser medida mediante una regla o algún objeto de referencia de tamaño conocido y un reloj de bolsillo del año 1700. Si ahora incluimos la dinámica de las masas y resolvemos las ecuaciones de Newton, obtenemos

$$a = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \tag{2}$$

En donde g es la aceleración gravitatoria $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)\frac{m}{s^2}$ y las masas m_1 y m_2 son las que se indican en la figura 1. Esta ecuación nos dice que podemos hacer caer a la masa m_1 y subir a la masa m_2 en un factor $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ de g. De estas dos ecuaciones podemos despejar el valor de g y utilizar este sistema para medir la aceleración gravitatoria haciendo caer a las masas a una velocidad menor. Esto es una gran ventaja si tenemos un reloj que solamente mide segundos porque podemos determinar con mayor exactitud cuanto tarda la masa m_1 en tocar el piso. En este caso lo que se mejora es la exactitud porque con este artefacto tenemos más tiempo para ver la masa caer y poder reaccionar con el reloj. No estamos agregando precisión porque el error con el que se toman las mediciones es el mismo.

Supongamos ahora, que ya conocemos el valor de g y pesamos las dos masas, obtenemos valores $m_1 = (100 \pm 1)g$ y $m_2 = (50 \pm 1)g$. Calculemos, cual es la aceleración de las masas y estimemos, si midiéramos esta aceleración en el laboratorio, la incerteza de a dada por propagar la ecuación (2). a es una función que depende de tres variables g,m_1 y m_2 todas estas magnitudes tienen una incerteza asociada pero ahora no nos interesan porque vamos a propagar sobre la ec. 2. Aplicando la formula de propagación de error para estas tres variables tenemos

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial g}|_{g,m_1,m_2=c}\right)^2 (\Delta g)^2 + \left(\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_1}|_{g,m_1,m_2=c}\right)^2 (\Delta m_1)^2 + \left(\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_2}|_{g,m_1,m_2=c}\right)^2 (\Delta m_2)^2} \tag{3}$$

En donde c es g_0,m_{10} y m_{20} que son las mediciones del experimento en donde vamos a evaluar a la función después de derivar.

Empecemos por calcular la derivada parcial con respecto a g que es la mas sencilla. Dejamos fijo todo el término que involucra las masas porque pensamos que simplemente es un número.

$$\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial g} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Ahora calculemos la derivada parcial de la función $a(g, m_1, m_2)$ en función de la masa m_1. Para calcular esta derivada pensamos que g es una constante que multiplica a nuestra función y m_2 tambien es simplemente un número, esto sería ...

$$\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_1} = \partial_{m_1}(g\frac{m_1 - num}{m_1 + num}) = g\frac{(m_1 + num) - (m_1 - num)}{(m_1 + num)^2} \tag{5}$$

En donde ∂_{m_1} indica que tomamos la derivada parcial de lo que esta entre paréntesis con respecto a m_1. num indica que se valor lo tratamos como un número cualquiera.

$$\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_1} = g\frac{2num}{(m_1 + num)^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_1} = g\frac{2m_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{7}$$

Por último nos falta la derivada parcial con respecto a m_2 que se resuelve pensando de la misma forma que en la derivada anterior.

$$\frac{\partial a(g,m_1,m_2)}{\partial m_1} = g\frac{-2m_1}{(m_1 + m_2)^2} \tag{8}$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (\Delta g)^2 + \left(g\frac{2m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right)^2 (\Delta m_1)^2 + \left(g\frac{-2m_1}{(m_1 + m_2)^2}\right)^2 (\Delta m_2)^2} \tag{9}$$

Ahora podemos reemplazar los Δ con los errores que tienen nuestras mediciones, también reemplazamos en la ecuación con los valores de las mediciones.

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{100g - 50g}{100g + 50g}\right)^2 \left(0{,}01\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(2\left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)\frac{50g}{(100g + 50g)^2}\right)^2 (1g)^2 + \left(2\left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)\frac{100g}{(100g + 50g)^2}\right)^2 (1g)^2} \tag{10}$$

$$\Delta a = 0{,}0975495...\frac{m}{s^2} \tag{11}$$

Redondeando a una cifra significativa tenemos que $\Delta a = 0{,}1\frac{m}{s^2}$. La magnitud de a viene dada por la ecuación (2), $a = 3{,}27\frac{m}{s^2}$. Entonces el valor final de la medición sería

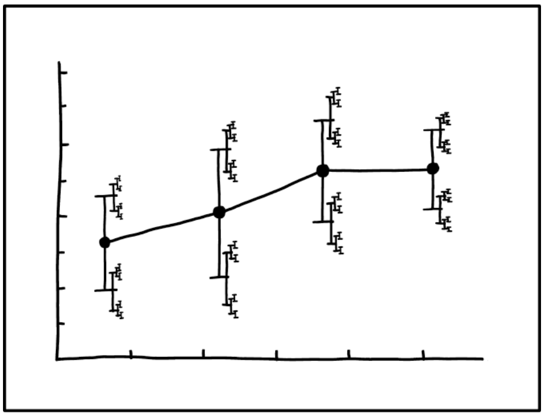
$$a = (3{,}3 \pm 0{,}1)\frac{m}{s^2} \tag{12}$$

Notemos una cosa sobre los errores relativos, antes de propagar teníamos que los errores relativos eran de $e_{r(m_1)} = \frac{m_1}{\Delta m_1} = 0{,}01$, $e_{r(m_2)} = 0{,}02$ y $e_{r(g)} = 0{,}0001$. Como vieron en la parte teórica de la clase, estas magnitudes nos dicen que tan precisa es cada medición. Esto tambien se relaciona con la fórmula de propagación ya que entre más precisa la medición menos peso tiene en la propagación del error. Si por ejemplo ahora propagamos sin considerar el error Δg, que es dos ordenes menor a los errores en las masas, obtenemos

$$\Delta a = \sqrt{\left(2\left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)\frac{50g}{(100g+50g)^2}\right)^2(1g)^2 + \left(2\left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)\frac{100g}{(100g+50g)^2}\right)^2(1g)^2} \tag{13}$$

$$\Delta a = 0{,}0974926...\frac{m}{s^2} \tag{14}$$

Como podemos ver, si ahora redondeamos a una cifra significativa tenemos $\Delta a = 0{,}1\frac{m}{s^2}$. Considerar ese error pesa tan poco en la propagación (cambia recién en la 4ta cifra significativa) que obtenemos el mismo resultado al quedarnos con la primera cifra. Esto no pasa si despreciamos la contribución del error de alguna de las masas, en ese caso obtendríamos un error menor lo cual estaría **muy mal**. Moraleja, antes de despreciar la contribución de un error hay que mirar el error relativo.



I DON'T KNOW HOW TO PROPAGATE ERROR CORRECTLY, SO I JUST PUT ERROR BARS ON ALL MY ERROR BARS.