

Guía 2: Estimación de la aceleración de la gravedad - Regresión lineal

Parte 1: Determinación de g a partir de la medición de del período de un péndulo de longitud variable

Cátedra: Prof. Laura Morales - Depto. Física, FCEyN, UBA.

En esta guía incorporaremos una herramienta que nos permitirá analizar la validez de modelos físicos: el **ajuste lineal** por cuadrados mínimos. Como caso de estudio se propone determinar la aceleración de la gravedad g empleando dos métodos diferentes.

En **MATERIAL DE LAS CLASES** se encuentran disponibles tutoriales y apuntes para realizar las actividades de esta guía.

Introducción

Las leyes físicas son (en la mayoría de los casos) expresadas como **relaciones funcionales entre variables** del sistema analizado. En la primera guía se presentó el siguiente cálculo como forma de obtener g conociendo el valor de L y T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

Ahora, si consideramos L y T como variables del sistema, para cada valor de L correspondería un valor $T(L)$, y todos los pares de valores deberían seguir la siguiente relación funcional:

$$T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

En este MODELO T y L son variables que pueden ser medidas, y g es un parámetro del modelo que puede ser estimado si tenemos una serie de mediciones T, L realizadas en forma experimental. La estimación del parámetro g constituye en sí mismo en una **medición indirecta** de la aceleración de la gravedad.

El ajuste por cuadrados mínimos es la herramienta que nos permitirá estimar los parámetros de un modelo determinado. Consiste en un cálculo algorítmico que se realiza a partir de datos medidos y de un modelo funcional con parámetros a estimar. Los datos medidos no necesariamente coincidirán de forma exacta con la curva que representa la relación funcional, pero si el modelo “es correcto”, deberían variar en un entorno de dicha curva.

Esta forma de análisis puede parecer similar al cálculo realizado en la primera guía, pero es mucho más profundo. El análisis de la serie de datos como relación funcional nos permite evaluar el modelo en sí mismo. No solo usarlo como cálculo, sino evaluar **si la relación entre una variable y la otra “realmente” siguen la forma de una recta, polinomio o función propuesta para el modelo**. La validez del valor estimado para un parámetro (en este caso: g), así como el intervalo de error que se le pueda asignar a dicho parámetro, dependerán en

primer lugar de evaluar si los datos siguen o no el modelo propuesto. Para ello se utilizarán **indicadores de bondad de ajuste** que deberán ser analizados en cada informe.

Como en esta guía vamos a trabajar con ajustes lineales, para analizar los datos antes deberán “linearizarlos” (¿cómo?). Hay varias técnicas de linealización posibles, en esta clase aplicaremos solo una de ellas.

Como caso de estudio, tomaremos de nuevo el ejemplo de la estimación de la aceleración gravitatoria (g) a partir de las mediciones del período de un péndulo. En primer lugar, dado que existe una infinidad de posibles funciones no-lineales que ajustan una serie de puntos, es importante tener una hipótesis para evaluar y restringir estas posibilidades. En este caso tenemos un modelo muy fuerte a partir del cual esperamos que, si medimos el período (T) para una gran cantidad de longitudes del hilo (L) obtendremos una relación como la de la ecuación (2). Para determinar la aceleración g se recomienda seguir los siguientes pasos:

- A. Graficar la relación entre ambas variables, con sus respectivas incertezas.
- B. Transformar las variables (y las incertezas) de forma de obtener una relación lineal, teniendo en cuenta el modelo propuesto.
- C. Graficar la relación entre ambas variables transformadas, con sus respectivas incertezas.
- D. Realizar un ajuste lineal por cuadrados mínimos.

Actividad

Se propone estudiar el comportamiento de un péndulo simple e investigar la dependencia del período T de oscilación con la longitud L del péndulo. En esta práctica van a trabajar con la experiencia virtual **Laboratorio de péndulo** disponible en: https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html

Descripción del Laboratorio de péndulo

En la página figuran tres ventanas:

- **Introducción**
- **Energía**
- **Laboratorio**: ingresar a este módulo.

Antes de comenzar la experiencia les recomendamos que se familiaricen con el experimento virtual.

En la Fig. 1 se muestra la interfaz gráfica del módulo **Laboratorio** que usarán para realizar la experiencia. El módulo cuenta de varios botones y paneles:

- Panel **A**: permite modificar la longitud del hilo L y variar la masa del cuerpo oscilante.
- Panel **B**: permite variar el valor de la aceleración de la gravedad (por ejemplo, simulando estar en otro planeta) y agregar fricción al péndulo simple.

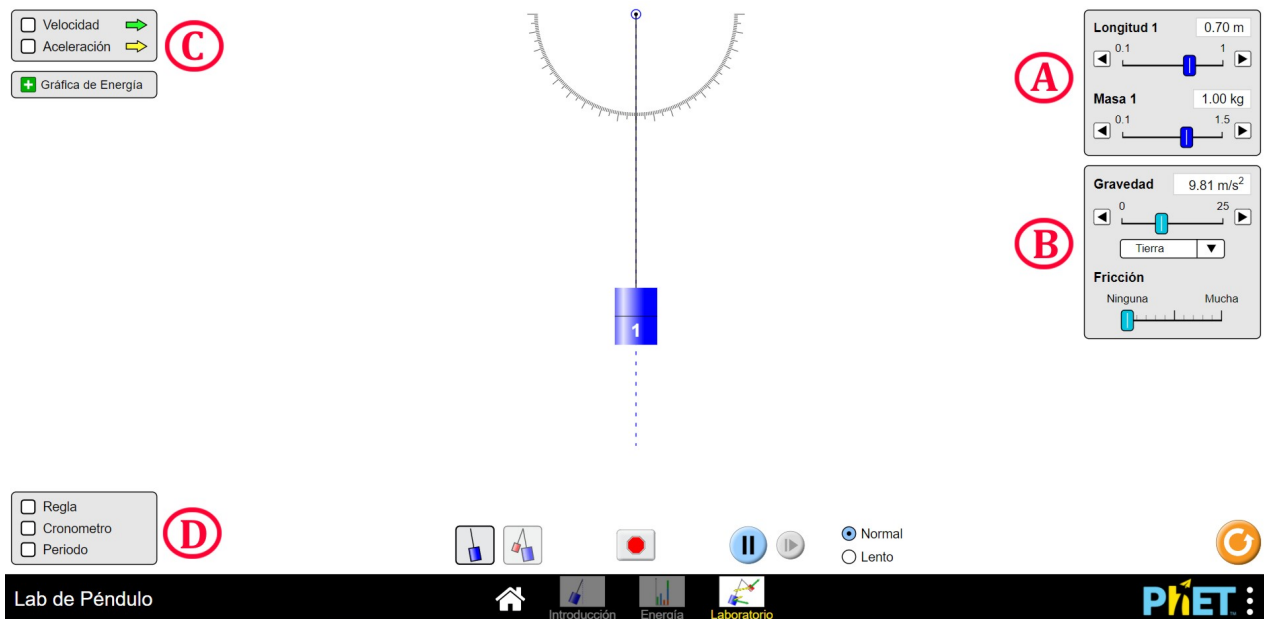


Figura 1: Interfaz gráfica del laboratorio virtual.

- Panel **C**: mediante un “click” se pueden visualizar los vectores velocidad y aceleración a lo largo de las oscilaciones.
- Panel **D**: mediante un “click” se pueden visualizar una regla y un cronómetro.

Para poner en movimiento el péndulo, posicione el mouse sobre el cuerpo oscilante hasta el ángulo de oscilación máximo deseado y suéltelo (Fig. 2).

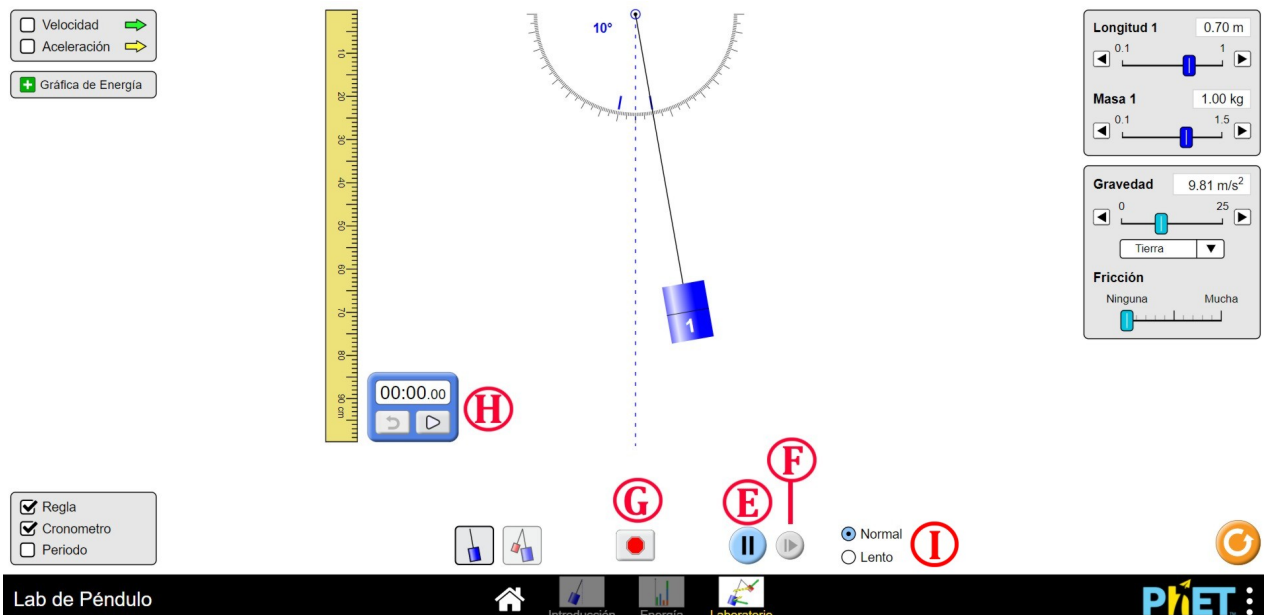


Figura 2: Esquema del péndulo oscilando.

El botón celeste (**E**) le permite “congelar” la posición del péndulo y detener el cronómetro. Con el botón de avance (**F**) puede avanzar cuadro por cuadro. El botón rojo (**G**) detiene el movimiento del péndulo quedando éste en su posición de equilibrio pero no pone en cero

el cronómetro. El cronómetro (**H**) cuenta con dos botones: uno detiene el cronómetro y el otro permite restablecerlo a cero. Haciendo “click” en la opciones *Normal* o *Lento* (**I**) se puede modificar la velocidad del movimiento del péndulo (y está sincronizado con la lectura del cronómetro).

Mediciones

Estimar el período T del péndulo para al menos 10 longitudes de hilo L diferentes, **sin modificar los demás parámetros** del experimento virtual. Para realizar estas mediciones, considere una amplitud angular menor o igual a 10° para el experimento. ¿Por qué?

1. Defina las longitudes L para las cuales realizará las mediciones. Variar el valor de L entre 10 cm y 100 cm (asegúrese de abarcar todo el rango).
2. Mida el período de 20 oscilaciones juntas (T_{20}) con el cronómetro del laboratorio virtual para cada valor de L . A partir de esta medida estime el período T de una oscilación para cada valor de L .

Medición de T_{20} : Prenda el cronómetro cuando inicia el primer período y apague el cronómetro cuando finaliza el período número 20.

¿Cómo calcula el período de una oscilación T a partir del período de 20 oscilaciones T_{20} ?

¿Cuál es la incerteza de la medición de L y T_{20} ?

¿Cómo estima la incerteza de T ?

Análisis

1. Construya una planilla de datos en Origin (o software equivalente) con las magnitudes medidas y sus incertezas. Ayuda: Se sugiere seguir la estructura que se muestra en la tabla 1.

IMPORTANTE: Para el cálculo de las incertezas será de gran utilidad repasar los contenidos de la Guía 1 - parte 2 (propagación de errores).

Nombre	L	$Err(L)$	T_{20}	$Err(T_{20})$	T	$Err(T)$	\sqrt{L}	$Err(\sqrt{L})$	T^2	$Err(T^2)$
Unidades	m	m	s	s	s	s	$m^{1/2}$	$m^{1/2}$	s^2	s^2

TABLA 1: Distribución de la información sugerida para el análisis de las mediciones. Err representa la incerteza asignada a cada variable que figura entre paréntesis.

IMPORTANTE: Incluya las incertezas en todos los gráficos.

2. Grafique T vs. L . ¿Espera que la relación entre las variables sea lineal?
3. En la planilla de datos calcule \sqrt{L} y su incerteza. Luego grafique T vs. \sqrt{L} . En este caso, ¿la relación entre las variables es lineal?
4. En la planilla de datos calcule T^2 y su incerteza. Ahora grafique T^2 vs. L . ¿Qué puede decir de la relación entre las variables en este gráfico?

5. Para los gráficos de los puntos **3.** y **4.** en los que se observó una relación lineal entre las variables, realice una *regresión lineal por cuadrados mínimos* y calcule el valor de g con su error considerando la relación funcional entre T y L para un péndulo simple dada por la ecuación (2).

¿Por qué debería utilizar cuadrados mínimos ponderados?

Observación: Para aplicar cuadrados mínimos ponderados evalúe si debe graficar T en función de \sqrt{L} ó \sqrt{L} en función de T . Realice el mismo análisis para el gráfico de las variables T^2 y L .

6. Compare sus resultados con el valor de referencia y con el valor de g obtenido en la Guía 1. ¿Son distinguibles? Discuta la precisión de sus resultados. ¿Qué puede decir respecto a la exactitud del método?

Considere el valor de referencia $g = (9,7969 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$ (aceleración de la gravedad local medido por el Ing. Ceccato en el Laboratorio de Mecánica, Departamento de Física, FCEyN, UBA).