Tema de Clase: Movimiento en 1D (parte 2)

- Caída Libre

  1. Resolvemos el ejemplo 2.6 del Sears-Zemansky: elección del sistema de referencia, interpretación de v_0 y x_0, dirección de g, gráfica de las soluciones de x(t) y v(t)
  2. Discusión del Video de Brian Cox (link disponible en la clase)

- Movimiento 1D con aceleración dependiente del tiempo

  1. Obtenemos las ecuaciones que nos permiten (a través de la integración de a(t)) obtener v(t) y x(t). Resolvemos un ejemplo concreto.
  2. Planteamos el caso de a(v) y cómo haciendo un cambio de variables podemos obtener v(t) y de allí integrando podemos obtener x(t)

Teórica 2: 4 de Septiembre de 2020

MRUV: Movimiento Rectilíneo (1D) con aceleración constante

ECUACIONES

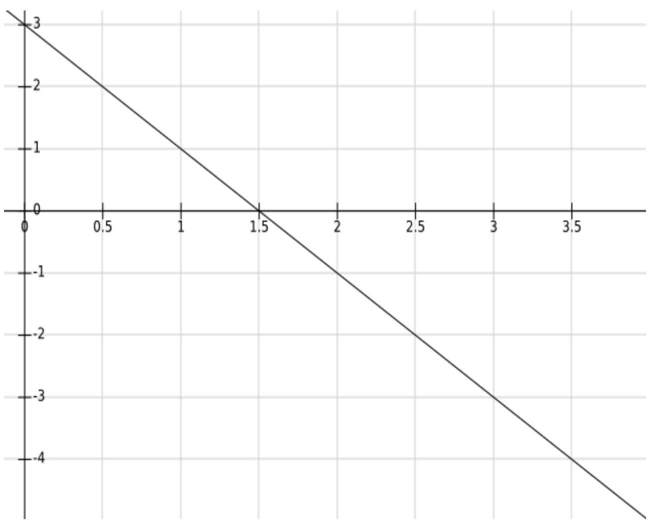
Velocidad en función del tiempo

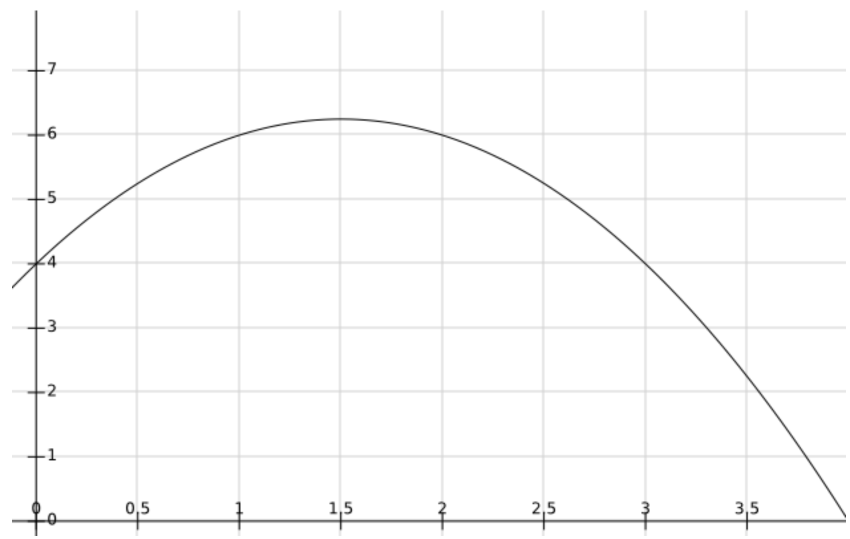
$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Posición en función del tiempo

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

GRAFICOS





Les voy a plantear una pregunta:

¿Cuál de estos dos objetos llega primero al piso?

https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

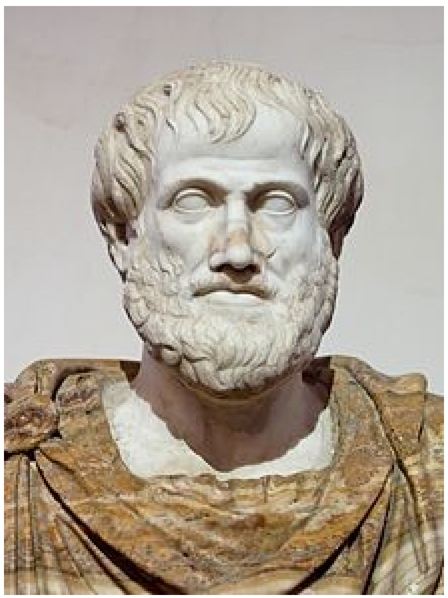
Recordemos nuestra hipótesis:

objetos puntuales

Ej. de MRUV: Cuerpos en caída libre

Aristóteles (350 AC)

Los objetos pesados caen más rápido que los más livianos



Galileo (1600)

La velocidad de caída de los objetos no depende de su masa

Galileo's horrifying use of laboratory animals.

https://physicsworld.com/a/the-legend-of-the-leaning-tower/

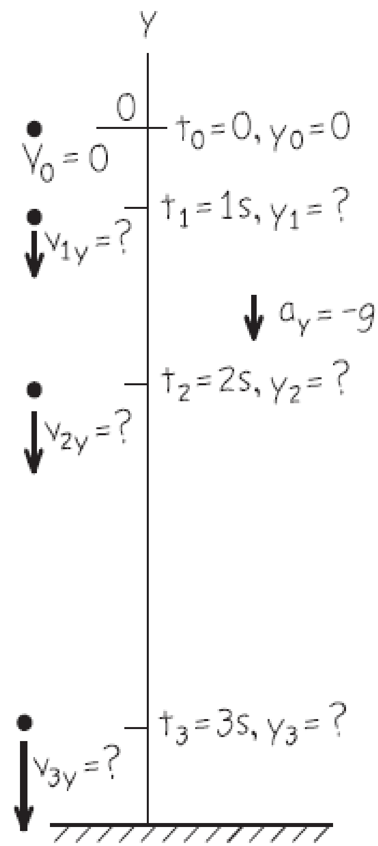
Los cuerpos caen en MRUV ⟶ $|a| = g \sim 9.8 m/seg^2$

Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

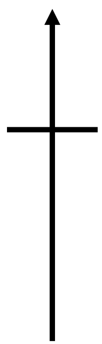
La Torre Inclinada

Nuestra gráfica del problema



Elegimos un sistema de referencia:

$y_0 = 0$



$v_0 = 0$

¿Cuánto vale y_0?

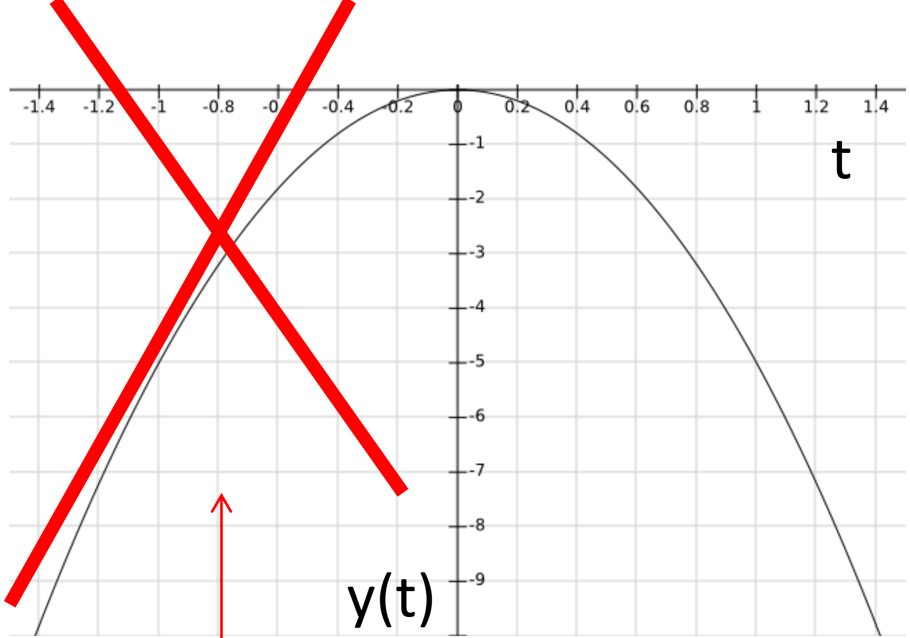
¿Cuánto vale v_0?

Escribamos el sistema de ecuaciones que nos permite describir este problema cinemático

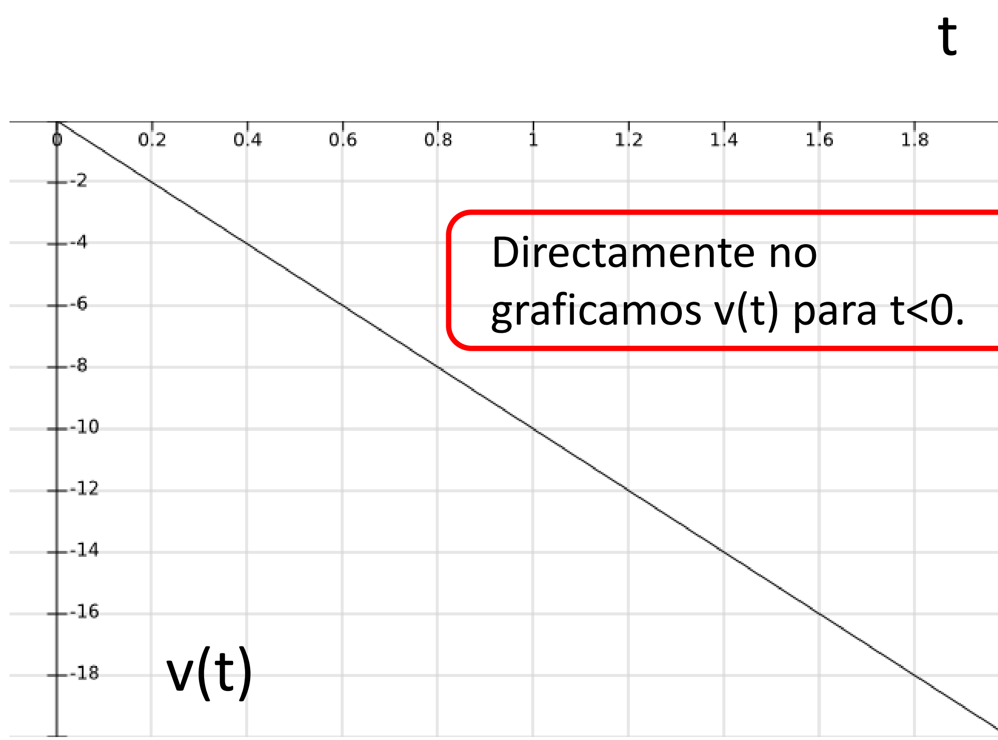
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t$$

Como queda los gráfico de la función que describe la posición x(t) y la velocidad v(t)

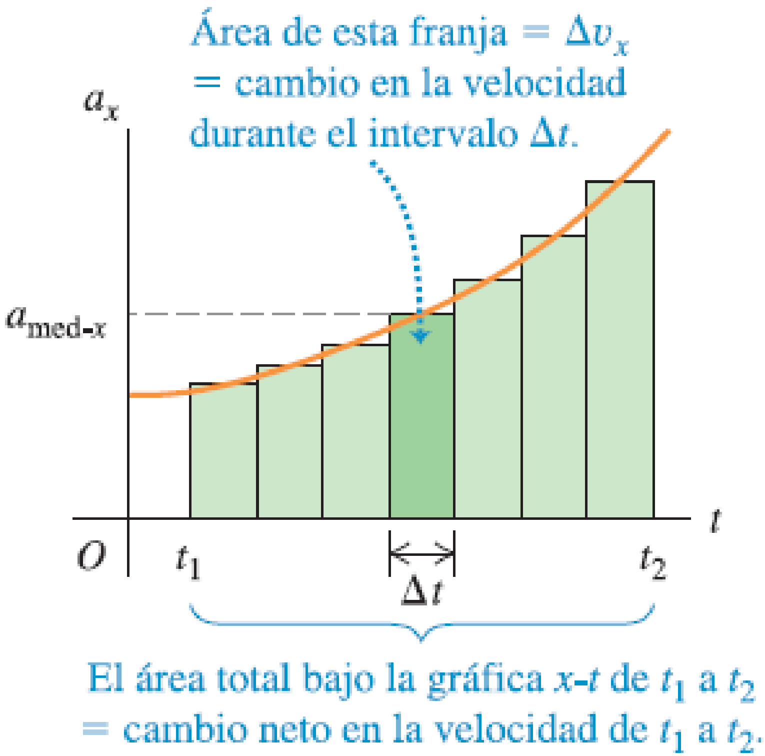


Antes de que se tire la moneda nuestro modelo no se aplica. Por eso no es relevante lo que sucede a t<0.



Directamente no graficamos v(t) para t<0.

2.28 Una gráfica a_x-t para un cuerpo cuya aceleración no es constante.



¿Qué hacemos cuando la **aceleración** no es constante a(t)?

$$\Delta v_x = a_{med\text{-}x}\,\Delta t$$

En el límite donde los Δt se hacen muy pequeños y muy numerosos, el valor de $a_{med\text{-}x}$ para el intervalo de cualquier t a $t + \Delta t$ se acerca a la aceleración instantánea a_x en el instante t. En este límite, el área bajo la curva a_x-t es la *integral* de a_x (que en general es una función de t) de t_1 a t_2. Si v_{1x} es la velocidad del cuerpo en t_1 y v_{2x} es la velocidad en t_2, entonces,

$$v_{2x} - v_{1x} = \boxed{\int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x} = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt} \qquad (2.15)$$

Movimiento de 1D – a(t)

La aceleración del cuerpo puntual no es cero ni constante sino que depende del tiempo o, como veremos en un ejemplo, de la velocidad.

La clase pasada vimos:

$$\boxed{a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}}$$

$$a_x\, dt = dv$$

Pasamos
dt multiplicando

Recordemos que nuestro objetivo es hallar expresiones para v(t) y x(t)

$\Rightarrow$ Para despejar v de la expresión anterior integramos a ambos miembros

Si los límites de integración varían entre t=0 y un t cualquiera:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv' = \int_{v(t=0)}^{v_t} dv' = v' \Big|_{v_0}^{v(t)} = v(t) - v_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a_x \, dt = \int_0^t a_x \, dt$$

Juntando estas expresiones llegamos a:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_x \, dt$$

Si conocemos la expresión a(t) y es integrable obtenemos la velocidad del móvil

Ahora que conocemos la **velocidad**

¿Podemos encontrar x(t)?

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x \, dt$$

Si los límites de integración varían entre t=0 y un t cualquiera:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx' = \int_{X(t=0)}^{X(t)} dx' = x' \Big|_{X(t=0)}^{X(t)} = X(t) - X(0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v \, dt = \int_0^t v(t) \, dt$$

$$\underbrace{X(t) - X(0) = \int_0^t v(t) \, dt}$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x \, dt$$

Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración cambiante

Sally conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante $t = 0$, cuando Sara avanza a 10 m/s en la dirección $+x$, pasa un letrero que está en $x = 50$ m. Su aceleración es una función del tiempo:

$$a_x = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿En qué momento es máxima su velocidad? *c*) ¿Cuál es esa velocidad máxima? *d*) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt$$

$$a_x(t) = a_0 - \gamma t$$

$$v_x(t) = v_0 + \int_0^t a_x(t)\,dt$$

$$v_x(t) = v_0 + \int_0^t (a_0 - \gamma t)\,dt$$

$$v_x(t) = v_0 + \int_0^t a_0\,dt - \int_0^t \gamma t\,dt$$

$$v_x(t) = v_0 + a_0 t\Big|_0^t - \gamma \frac{t^2}{2}\Big|_0^t$$

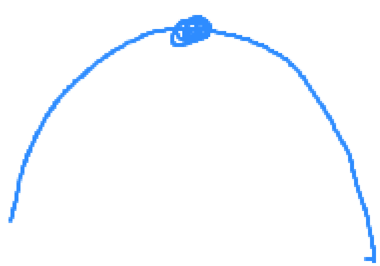
$$v_x(t) = v_0 + \underbrace{a_0 t - a_0 \cdot 0}_{\text{Barrow}} - \gamma\frac{t^2}{2} - \left(-\gamma\frac{0^2}{2}\right)$$

$$v_x(t) = v_0 + a_0 t - \frac{\gamma t^2}{2}$$

Lo que está escrito es azul es parte de las discusiones que hicimos en clase y es una copia del pizarron de zoom

$$v(t) = 10\,\frac{m}{s} + 2\,\frac{m}{s^2}\,t - 0.1\,\frac{m}{s^3}\,t^2$$

Hallar máx de $v(t)$?



$$v(t) = 10 + 2t - \frac{0.1t^2}{2}$$

$$\int_0^t v(t)\,dt = x(t) - x_0 \rightarrow 50\,m$$

$$\int_0^t \left(10 + 2t - \frac{0.1t^2}{2}\right) dt \rightarrow \text{polinomio grado 3}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(10 + 2t - \frac{0.1}{2}t^2\right) dt =$$

$$x(t) = \underbrace{50}_{\text{dato}} + \int_0^t 10 + \int_0^t 2t\,dt - \int_0^t \frac{0.1}{2}t^2\,dt$$

$$- \frac{0.1}{2}\int_0^t t^2\,dt$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿En qué momento es máxima su velocidad? *c*) ¿Cuál es esa velocidad máxima? *d*) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

$$v_x(t) = v_0 + a_0 t - \frac{\gamma t^2}{2}$$

$$\underbrace{X(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)\,dt}_{\text{otra vez integro} \longrightarrow \text{obtengo cúbica}}$$

¿Qué pasa si en lugar de tener a(t) nos dan a(v)?

(recordar que estamos trabajando en 1D)

$$\boxed{a(v) = -bv}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -bv$$

$$\frac{dv}{v} = -bt$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -bt$$

$$\ln(v)\Big|_{v_0}^{v(t)} = -bt\Big|_{t=0}^{t}$$

$$\ln(v(t)) - \ln(v_0) = -bt - (-b \cdot 0)$$

$$\ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -bt$$

$$e^{\ln(v/v_0)} = e^{-bt} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-bt} \Rightarrow v = v_0 e^{-bt}$$

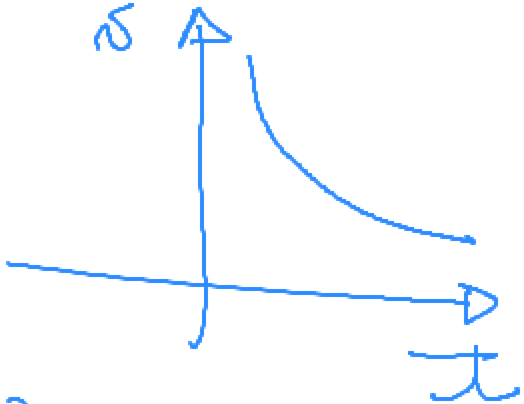
$$\int \frac{dv}{v} = \int \overbrace{-b}^{\text{constante}} dt$$

$$\int \frac{1}{v} dv = -b \int dt$$

$$\ln(v) \Big|_{v_0}^{v(t)} = -bt \Big|_0^t$$

Una vez que tenemos v(t) la mitad del problema está resuelto y para hallar x(t) solo tenemos que integrar.

$$v(t) = v_0 e^{-bt}$$



Recordar: $\int a(t)\,dt = v(t)$

$$\int v(t)\,dt = x(t)$$