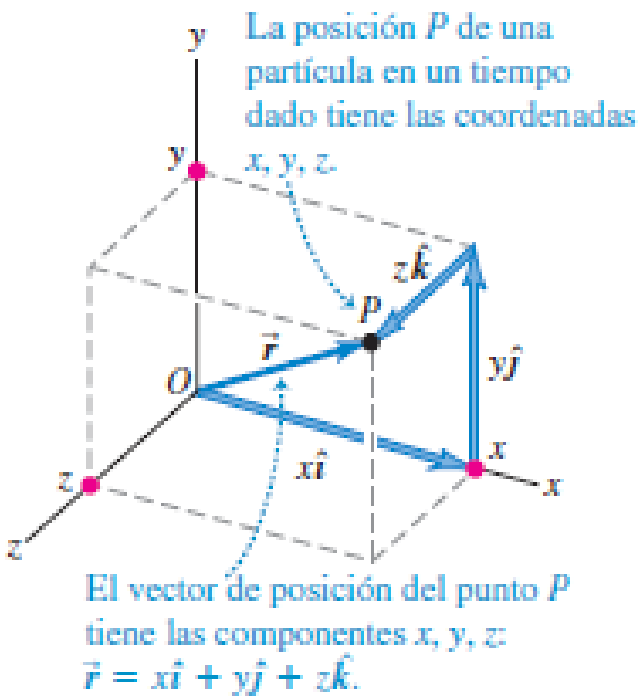
<u>Tema de Clase:</u> Movimiento en 2D (parte 1)

- Definición de los vectores: posición, velocidad y aceleración en 3D.
- Caso particular 2D
- Trayectoria de proyectiles
- Coordenadas Intrínsecas

Cinemática en 2D y 3D

* Vector Posición

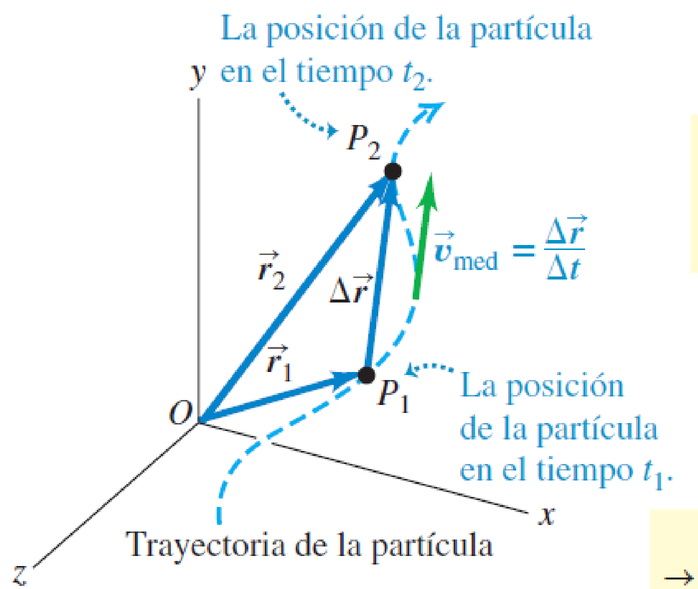
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vector de posición)}$$



Recordemos que: $\begin{cases} \hat{\imath} = (1,0,0) \\ \hat{\jmath} = (0,1,0) \\ \hat{k} = (0,0,1) \end{cases}$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

3.2 La velocidad media $\vec{v}_{med}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.



* Vector Velocidad

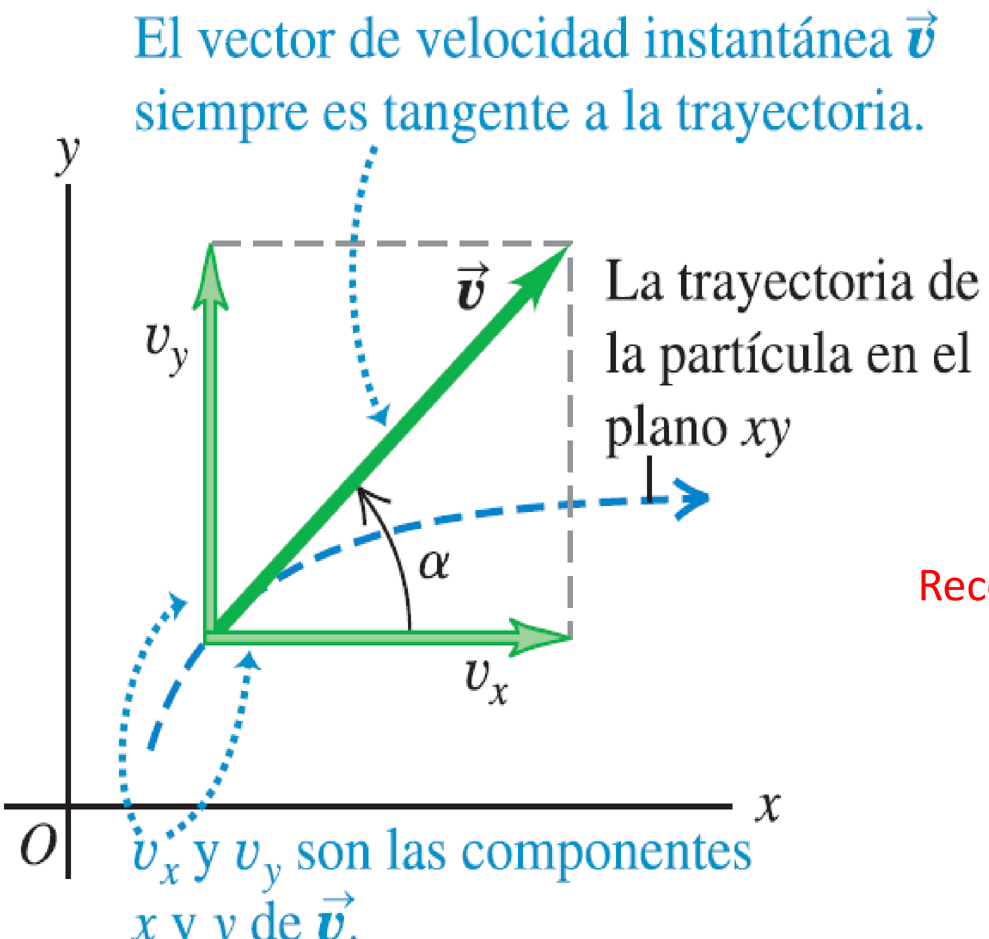
$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de velocidad media)}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector de velocidad instantánea)}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{(componentes de la velocidad instantánea)}$$

Vector Velocidad en 2D

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano *xy*.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} \cancel{+ \frac{dz}{dt}\hat{k}}$$

El módulo de $\vec{v}$ en 3D es:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

El módulo en 2D es:

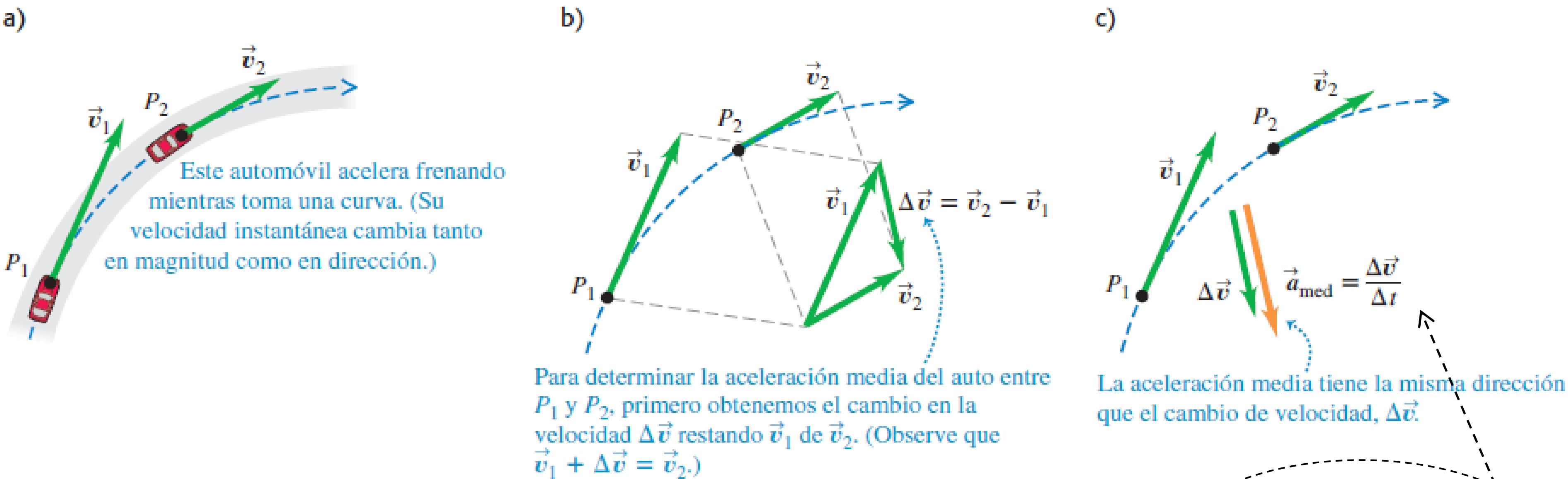
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Recordemos que:

la tangente = cateto op./cateto ady

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}}$$

* Vector Aceleración

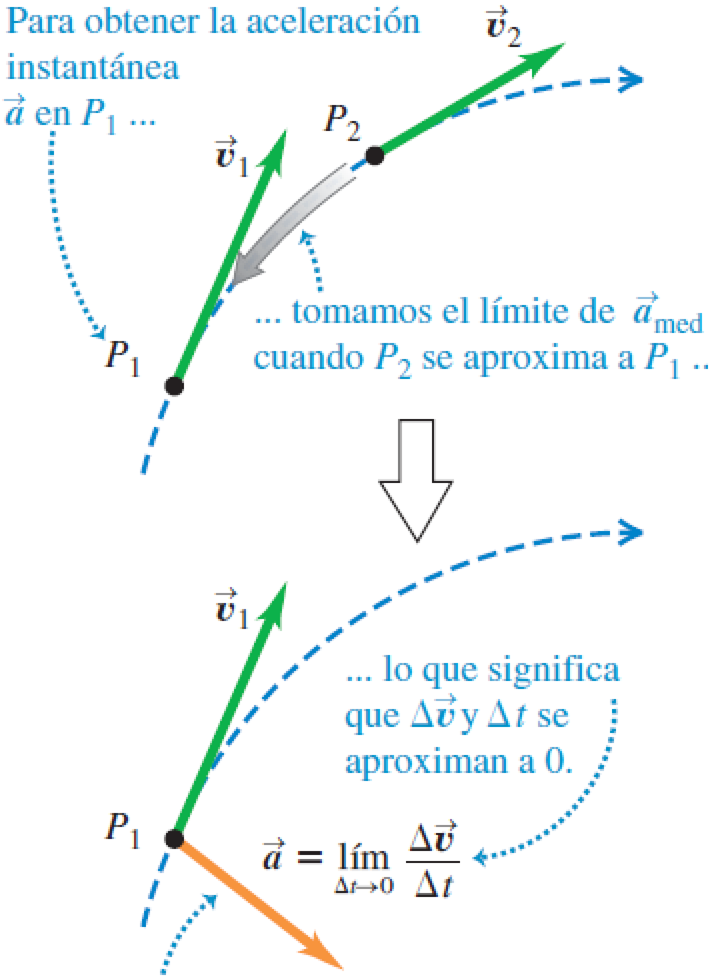


$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de aceleración media)}$$

Si divido un vector por un escalar solo cambio su módulo

☞ Notar que el vector aceleración apunta **hacia adentro**

* Aceleración Instantánea

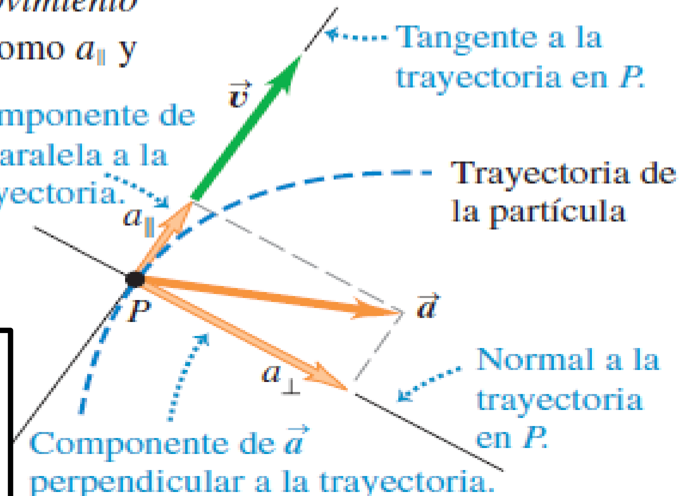


$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

CUIDADO **Cualquier partícula que siga una trayectoria curva está acelerando** Si una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizá le parezca que esta conclusión es contraria a su intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para implicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) muestra que la aceleración no es cero cuando el vector de velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o ambas.

Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

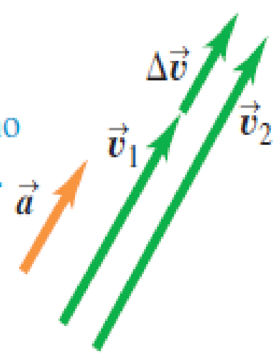
El vector de aceleración $\vec{a}$ de una partícula puede describir cambios en la rapidez de ésta, en la dirección de su movimiento o en ambas. Resulta útil destacar que la componente de la aceleración *paralela* a la trayectoria de la partícula —esto es, paralela a la velocidad— nos indica acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; en tanto que la componente de la aceleración *perpendicular* a la trayectoria —y por lo tanto, perpendicular a la velocidad— nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula. La figura 3.10 muestra estas componentes, que se denotan como $a_\parallel$ y



¿Qué hace cada componente de la aceleración?

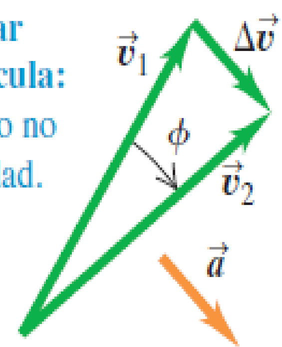
Aceleración paralela a la velocidad de la partícula:

- La *magnitud* cambia, pero no la *dirección* de la velocidad.
- La partícula se mueve en línea recta con rapidez cambiante.



Aceleración perpendicular a la velocidad de la partícula:

- La *dirección* cambia, pero no la *magnitud* de la velocidad.
- La partícula se mueve en una curva con rapidez constante.



<u>Para fijar ideas: </u>una vaquita de San Antonio en movimiento

https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/ladybug-motion-2d/latest/ladybug-motion-2d.html?simulation=ladybug-motion-2d&locale=es

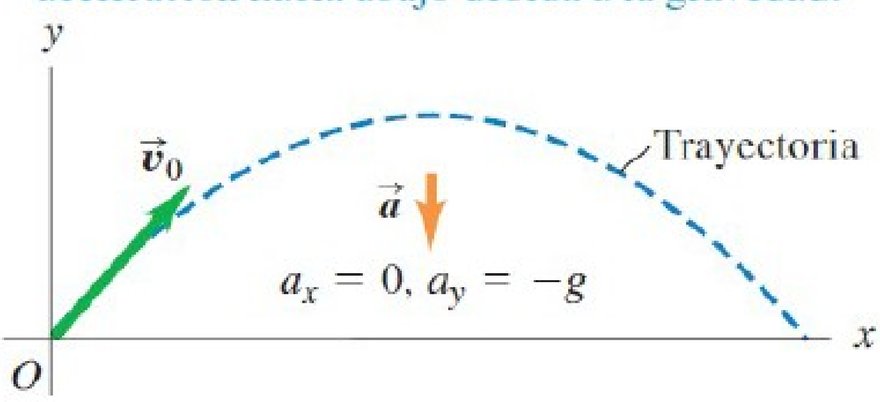
3.3 Movimiento de proyectiles

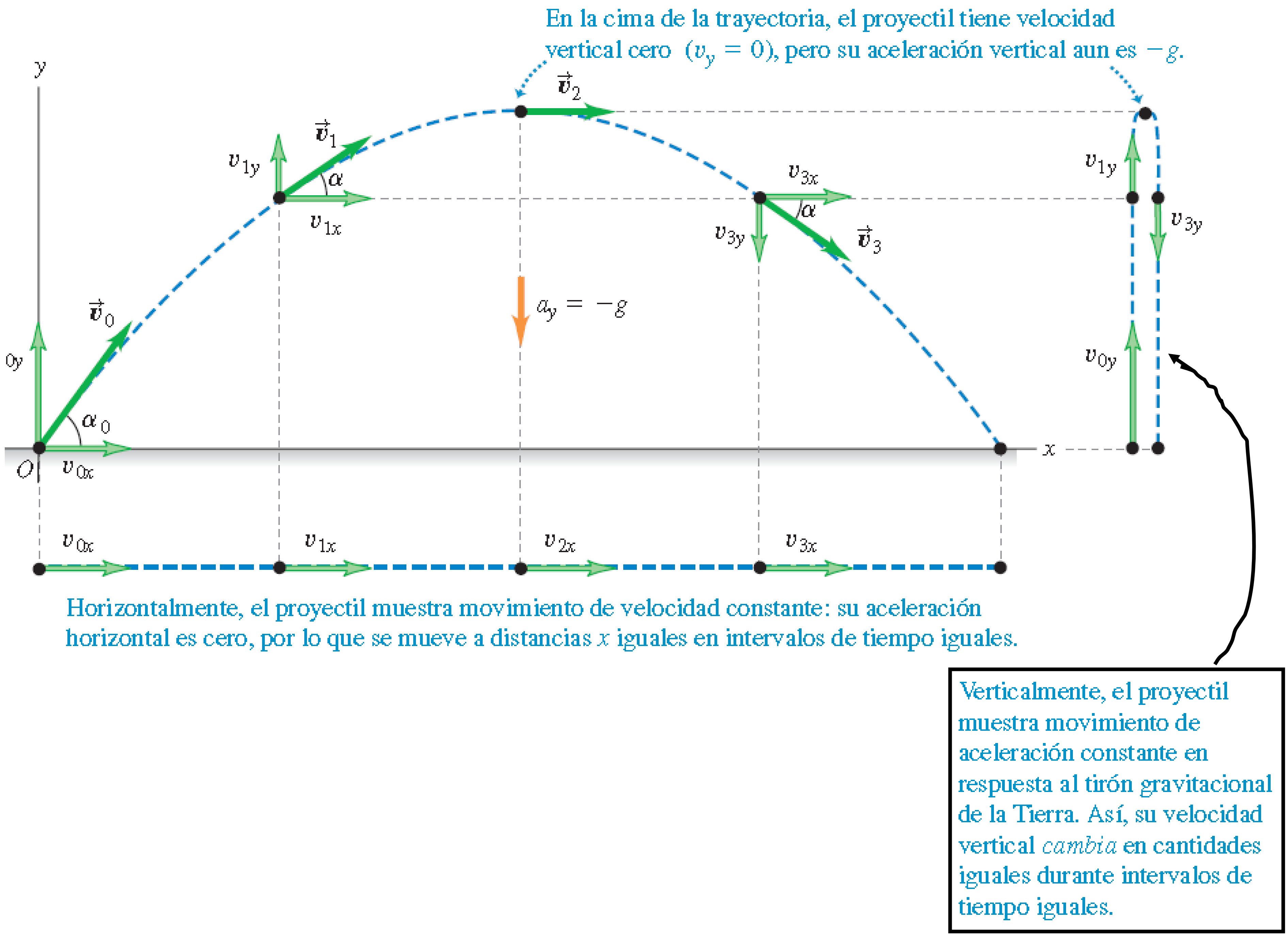
Es un vector

Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

3.15 La trayectoria de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.





En la cima de la trayectoria, el proyectil tiene velocidad vertical cero ($v_y = 0$), pero su aceleración vertical aun es $-g$.
y
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
v_{1y}
α
v_{1x}
v_{3x}
α
v_{3y}
$\vec{v}_3$
v_{1y}
v_{3y}
$a_y = -g$
$\vec{v}_0$
v_{0y}
α_0
O
v_{0x}
x
v_{0x}
v_{1x}
v_{2x}
v_{3x}
Horizontalmente, el proyectil muestra movimiento de velocidad constante: su aceleración horizontal es cero, por lo que se mueve a distancias x iguales en intervalos de tiempo iguales.
Verticalmente, el proyectil muestra movimiento de aceleración constante en respuesta al tirón gravitacional de la Tierra. Así, su velocidad vertical *cambia* en cantidades iguales durante intervalos de tiempo iguales.

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \qquad (3.14)$$

En la coordenada x

$$\left\{ \begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ x &= x_0 + v_{0x}t \end{aligned} \right.$$

Para describir el movimiento:
2 ecs de posición y 2 de velocidad

En la coordenada y

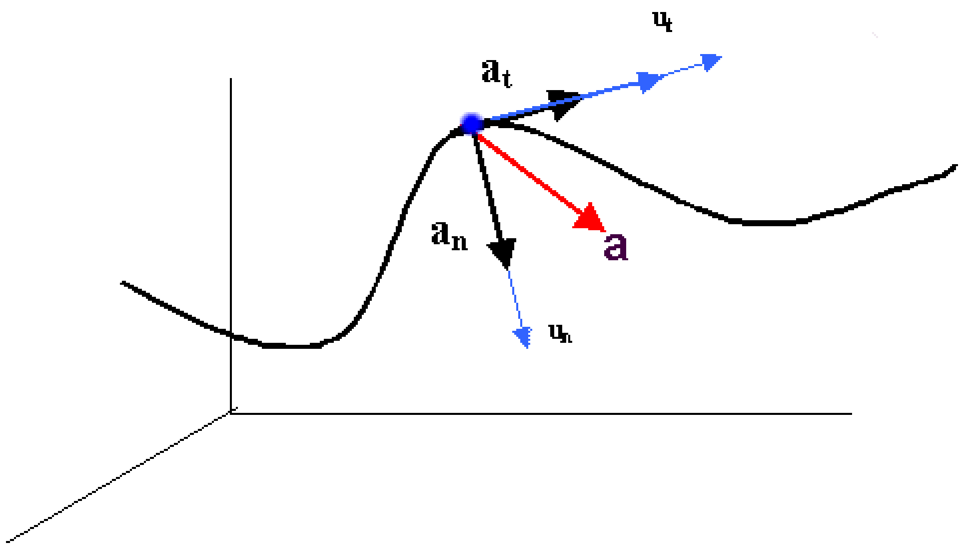
$$\left\{ \begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \right.$$

Sistema de Referencia Intrínseco

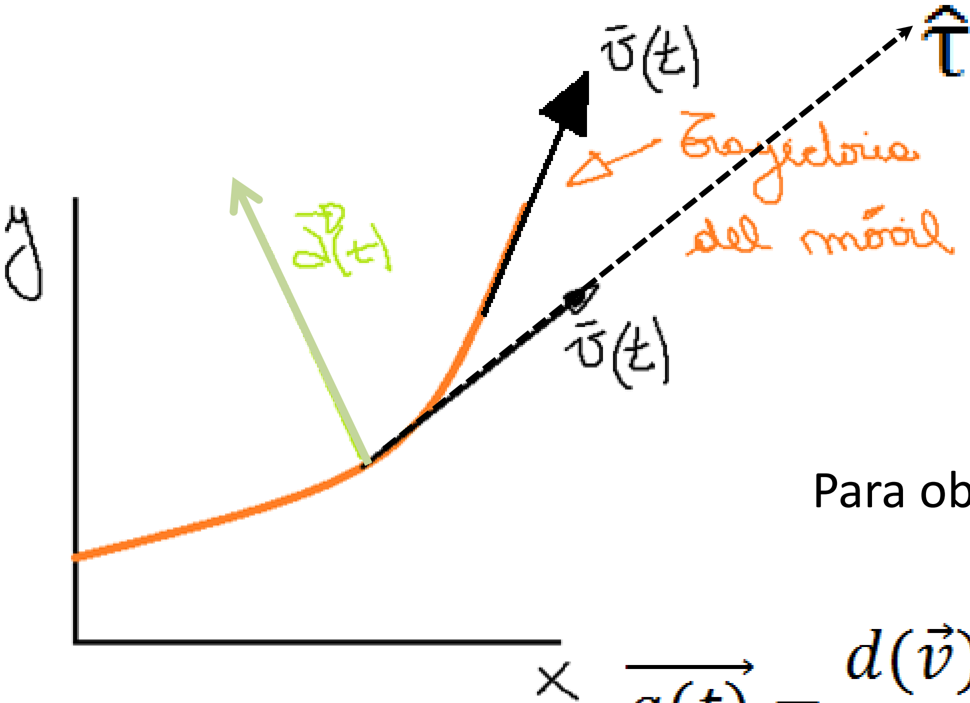
Vimos el que la definición de los vectores: posición, velocidad y aceleración están referidos a un sistema de referencia fijo en el espacio.

Sin embargo hay problemas en los que es más útil tener un sistema de referencia paralelo al vector velocidad de la partícula y a la normal a la misma (formando un sistema de coordenadas ortogonal):

sistema de coordenadas intrínseco



Coordenadas intrínsecas



Versor tangente a la trayectoria

$$\overrightarrow{v(t)} = v\hat{\tau}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = a_\tau \hat{\tau} + a_n \hat{n}$$

$$\underbrace{|\hat{\tau}| = 1}$$

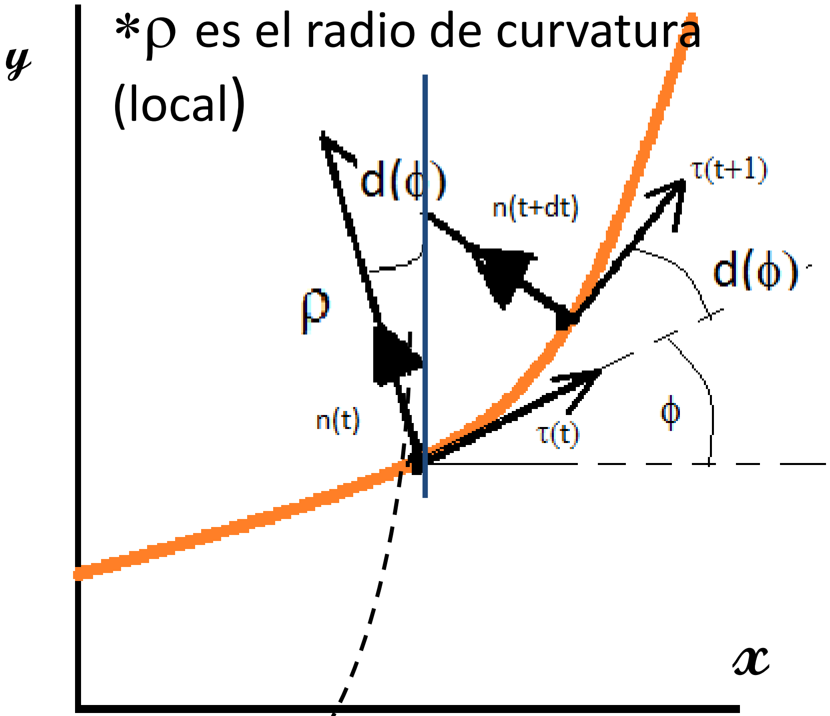
Su dirección cambia con t: $\phi(t)$

Para obtener la aceleración a partir del vector velocidad tenemos que derivarlo.

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d(\vec{v})}{dt} = \frac{d(v\hat{\tau})}{dt} = \frac{d(v)}{dt}\hat{\tau} + \boxed{\frac{v\, d(\hat{\tau})}{dt}}$$

La regla de la derivada del producto

¿Cómo calcular esto? → Expresamos en coordenadas cartesianas y después derivamos



* ϕ es el ángulo entre el eje x y $\hat{\tau}(t)$

* $d\phi$ es el ángulo entre

$$\hat{\tau}(t) \text{ y } \quad \tau(\widehat{t+dt})$$

* $d\phi$ es el ángulo entre

$$\hat{n}(t) \text{ y } \quad n(\widehat{t+dt})$$

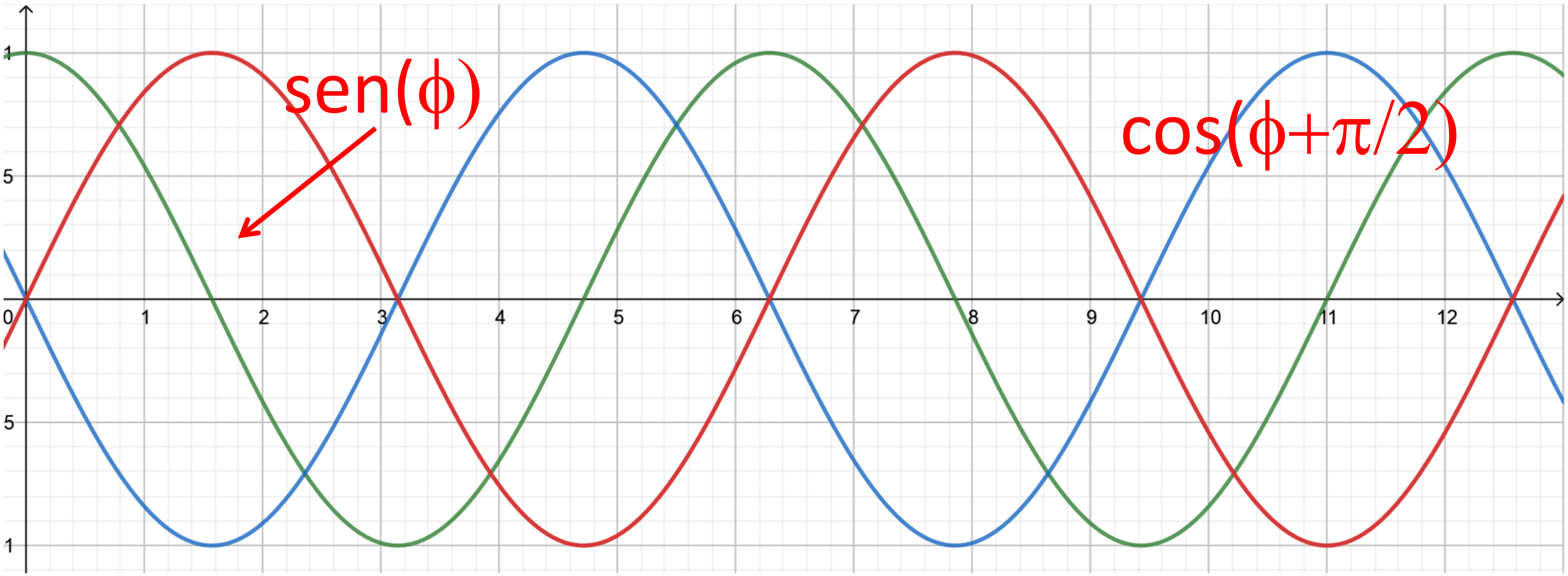
$$\hat{\tau} = \cos(\phi)\,\hat{x} + sen(\phi)\hat{y}$$

$$\hat{n} = cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + sen\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} = -sen(\phi)\,\hat{x} + cos(\phi)\hat{y}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -sen(\phi)\frac{d\phi}{dt}\hat{x} + cos(\phi)\frac{d\phi}{dt}\hat{y} = \frac{d\phi}{dt}\left[\boxed{-sen(\phi)\,\hat{x} + cos(\phi)\hat{y}}\right]}$$

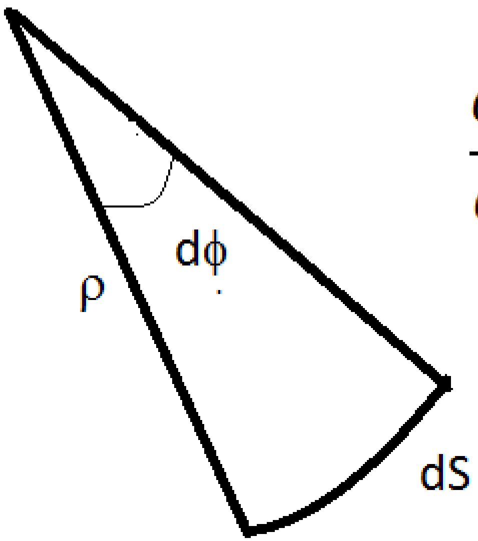
$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\tau} = \frac{d\phi}{dt}\hat{n}}$$

Este ángulo también es ϕ



cos(ϕ)

¿Cuánto vale $\frac{d\phi}{dt}$?



$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\phi}{ds} = v\frac{d\phi}{ds} = \frac{v}{\rho}$$

$$\rho . d\phi = \mathrm{dS} \Longrightarrow \rho = \frac{dS}{d\phi}$$

dS es la distancia recorrida entre t y t+dt

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\phi}{dt}\hat{n}$$

$$\vec{a} = \boxed{\frac{dv}{dt}}\hat{\tau} + \boxed{\frac{v^2}{\rho}}\hat{n}$$

Aceleración tangencial
Cambios en | $\vec{v}$ |

Aceleración normal
Cambios en la dirección de $\vec{v}$

2π R = P_R
(Perímetro de una circunferencia de un círculo de radio R)