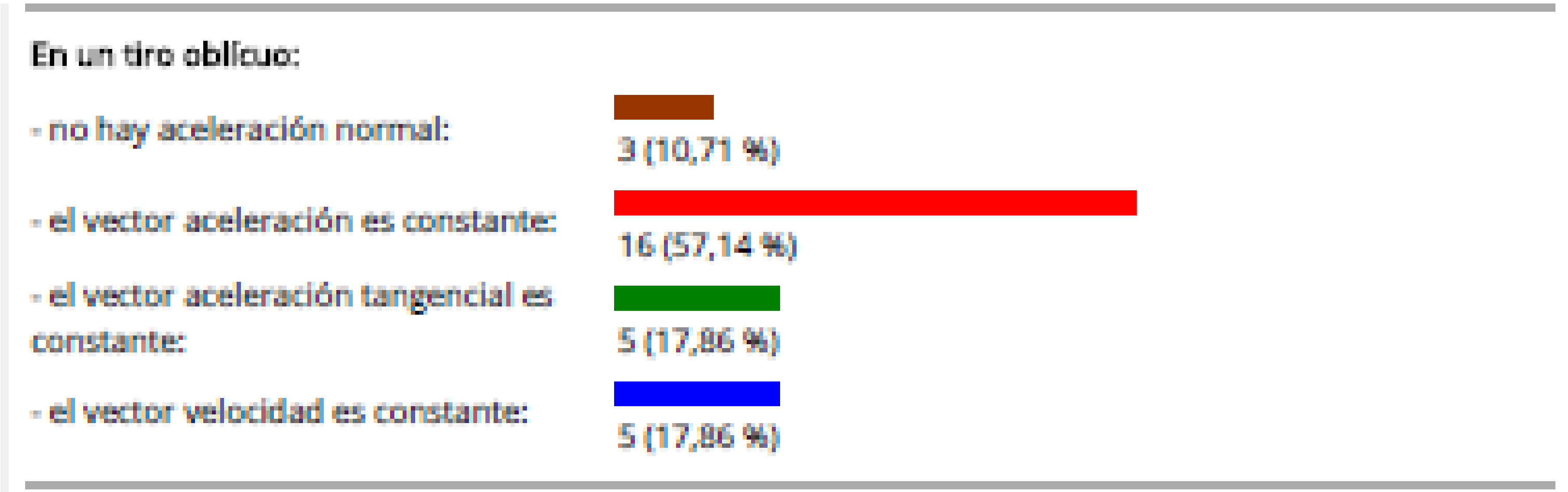
# Fuerza de Rozamiento + Revisiones

- Revisamos las encuesta (tiro oblicuo)
- Discutimos el primer ejercicio de la Guía 2.
- Fuerza de Rozamiento (dinámica y estática)
- Resistencia en fluidos.

# Revisamos la Encuesta




https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html

# Un ejercicio de la Guía 2

1. La segunda ley de Newton expresa que la aceleración de un cuerpo depende linealmente de la fuerza neta que actúa sobre él, siendo la masa la constante de proporcionalidad.

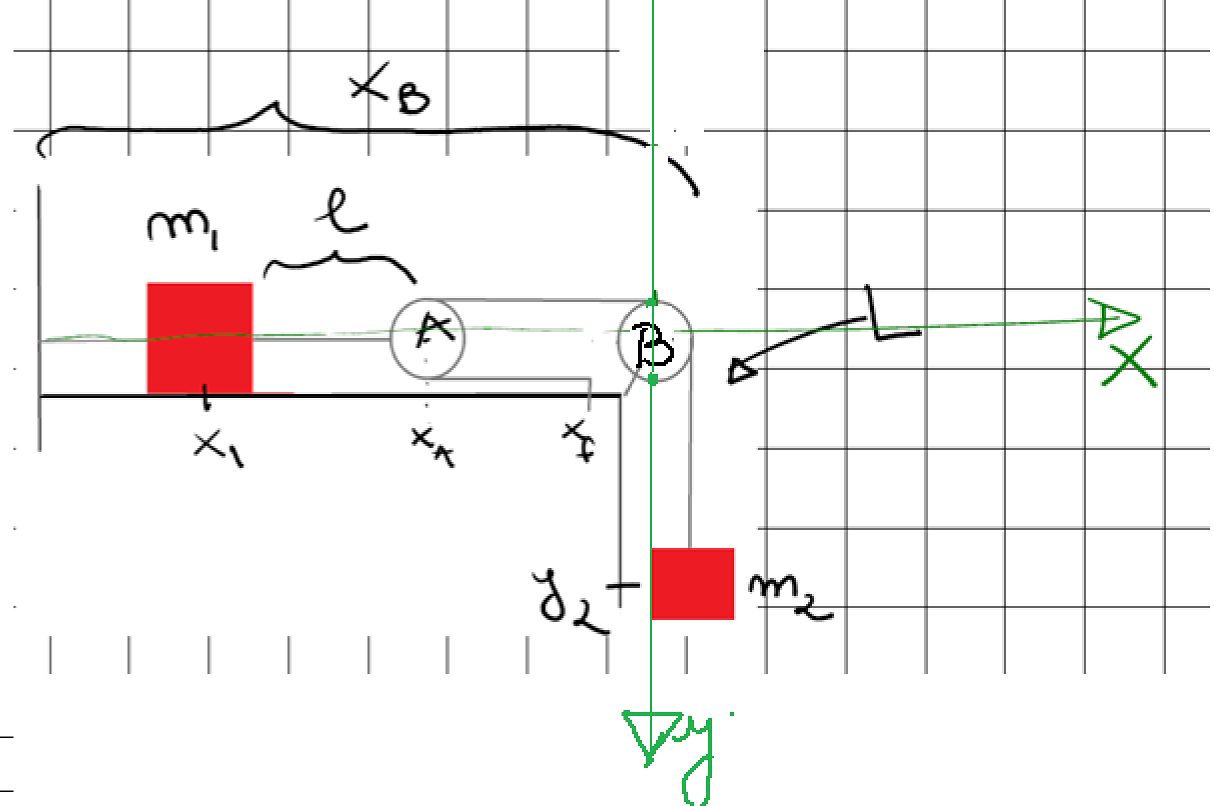
   (a) Escriba este concepto en forma de ecuación diferencial para la posición ($x$) en el caso de una fuerza constante en el tiempo. $\boxed{x)\ F = m\ddot{x}}$

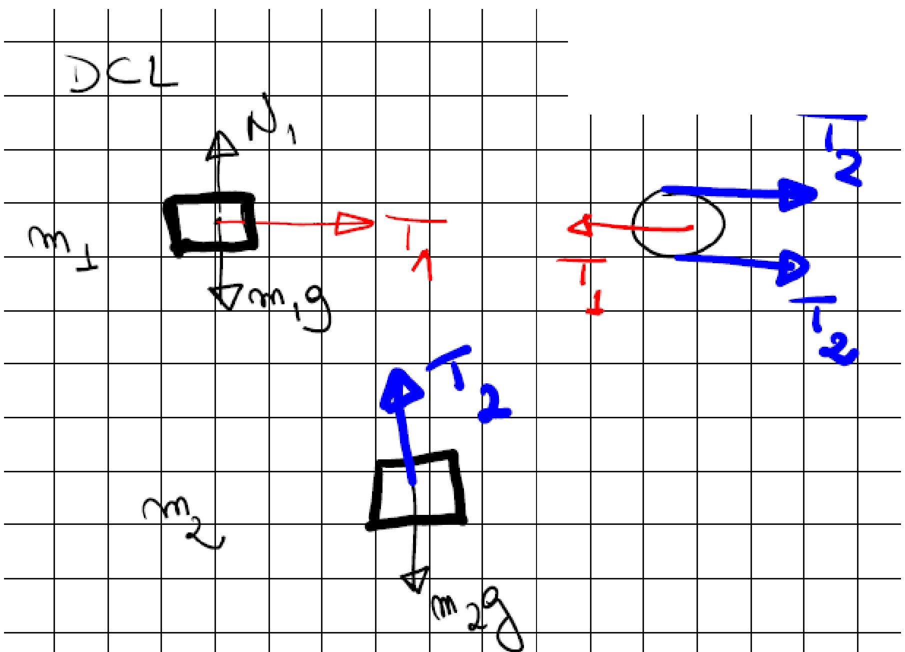
   (b) Re-escríbala ahora como una ecuación diferencial para la velocidad ($v$). Resuelva ésta ecuación, encontrando una solución $v(t)$. Considere la condición inicial $v(t=0) = v_0$.

   (c) Piense ahora cómo encontrar la expresión para $x(t)$ si $x(t=0) = x_0$.

(b) $x)\ F = m\dfrac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{F}{m} = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t \dfrac{F}{m} dt = \int_{v(t=0)}^{v(t)} dv$

# Problema: Polea móvil



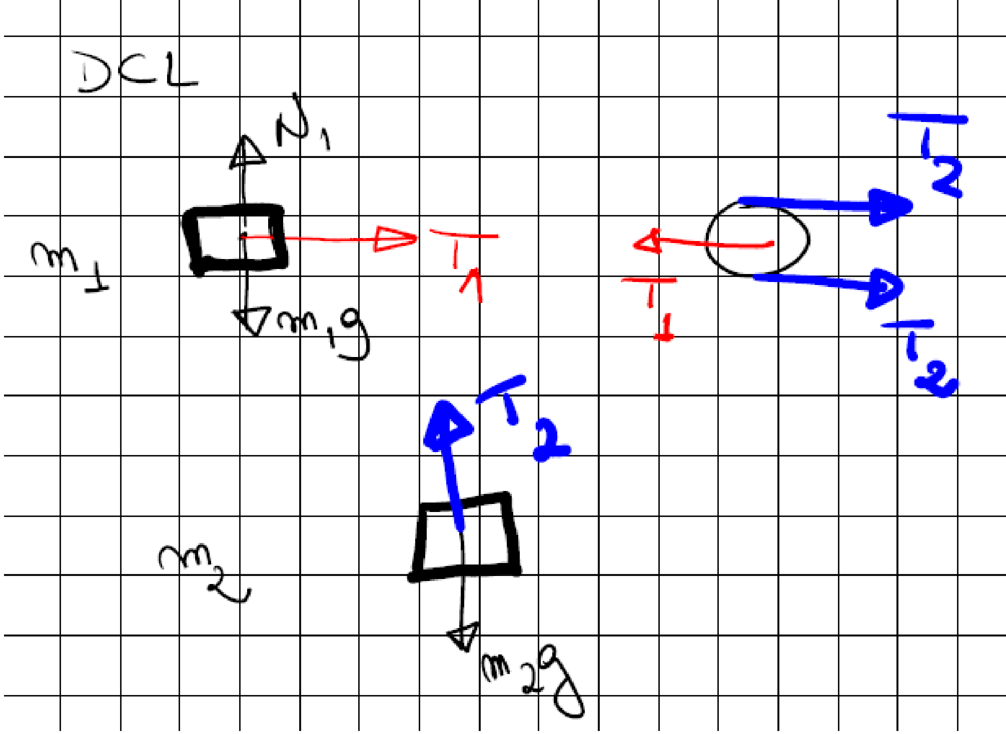

$x_f$ = punto fijo

l = longitud de la cuerda corta

L= longitud de la Cuerda larga

B = polea fija

A = polea móxil




$m_1$ – $y)$ $N_1 - m_1 g = 0$

$x)$ $T_1 = m_1 \ddot{x}_1$

ideal = 0

polea móvil $2T_2 - T_1 = m_p a_p$

$2T_2 = T_1$

$m_2$ $m_2 g - T_2 = m_2 \ddot{y}_2$

**+ Vínculos**

# Vínculos

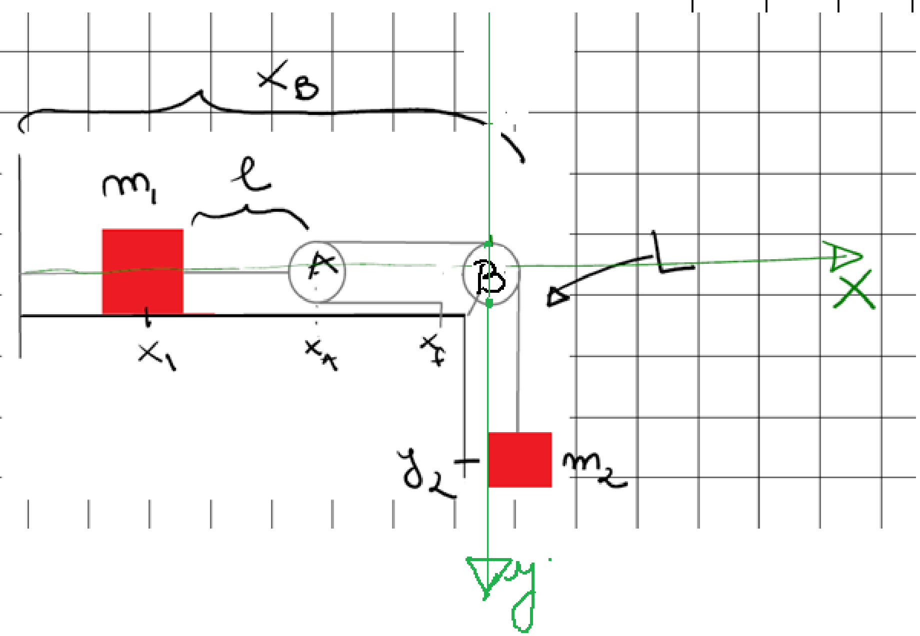
$$\ell = x_A - x_1 \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{x}_1$$

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_2$$

$$L = (x_f - x_A) + (x_B - x_A) + (y_2 - y_B)$$

$$\dot{L} = 0 = \underbrace{\dot{x}_f}_{0} - \dot{x}_A + \underbrace{\dot{x}_B}_{0} - \dot{x}_A + \dot{y}_2 - \underbrace{\dot{y}_B}_{0}$$

$$0 = -2\dot{x}_A + \dot{y}_2 \Rightarrow 0 = -2\ddot{x}_A + \ddot{y}_2$$



de $\ell \Rightarrow \ddot{x}_A = \ddot{x}_1$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_A = 2\ddot{x}_1$$

Nos queda

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 \ddot{y}_2 \\ 2T_2 = T_1 \\ \ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_1 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\ddot{y}_2 = \frac{4m_2}{4m_2 + m_1} g}$$

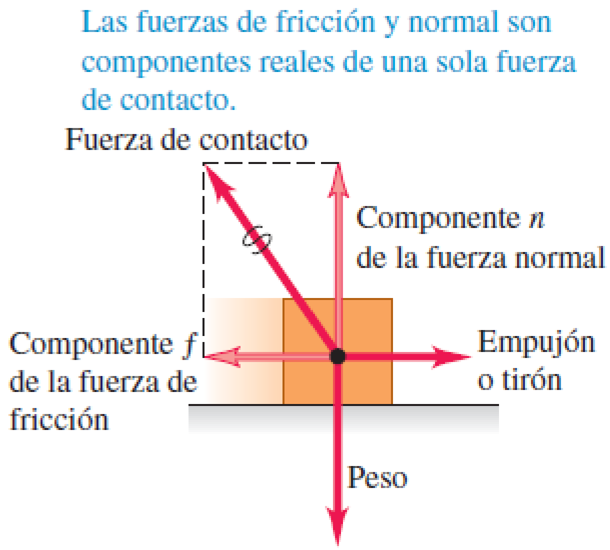
# 5.3 Fuerzas de fricción aka Fuerza de Rozamiento

Hemos visto varios problemas en que un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie que ejerce fuerzas sobre el cuerpo. Siempre que dos cuerpos interactúan por contacto directo de sus superficies, llamamos a dicha interacción *fuerzas de contacto*. La fuerza normal es un ejemplo de fuerza de contacto; en esta sección, veremos con detenimiento otra fuerza de contacto: la fuerza de fricción.

## Fricción cinética y estática

Si tratamos de deslizar una caja pesada con libros por el piso, no lo lograremos si no aplicamos cierta fuerza mínima. Luego, la caja comienza a moverse y casi siempre podemos mantenerla en movimiento con menos fuerza que la que necesitamos inicialmente. Si sacamos algunos libros, necesitaremos menos fuerza que antes para poner o mantener en movimiento la caja.

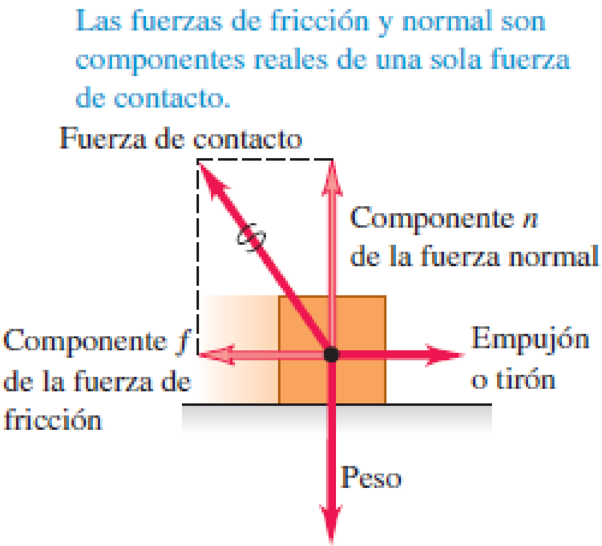
Primero, cuando un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie, podemos representar la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre el cuerpo en términos de componentes de fuerza perpendiculares y paralelos a la superficie (figura 5.17). El vector componente perpendicular es la fuerza normal, denotada con $\vec{n}$. El vector componente paralelo a la superficie (y perpendicualr a $\vec{n}$) es la **fuerza de fricción**, denotada con $\vec{f}$. Si la superficie no tiene fricción, entonces $\vec{f}$ será cero pero habrá todavía una fuerza normal. (Las superficies sin fricción son una idealización inasequible, aunque podemos aproximarla si los efectos de la fricción son insignificantes.) La dirección de la fuerza de fricción siempre es opuesta al movimiento relativo de las dos superficies.



El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la **fuerza de fricción cinética** $\vec{f}_k$. El adjetivo "cinética" y el subíndice "k" nos recuerdan que las dos superficies se mueven una relativa a la otra. La *magnitud* de esta fuerza suele aumentar al aumentar la fuerza normal. Por ello, se requiere más fuerza

## Fuerza de Rozamiento Dinámico

**(Cinético)**




$$\left|\overrightarrow{F_{roz-din}}\right| = \underbrace{\mu_{din}}_{\text{Coeficiente de rozamiento dinámico}} \cdot \left|\overrightarrow{N}\right|$$

Coeficiente de rozamiento dinámico

Coeficiente de rozamiento cinético (Sears)

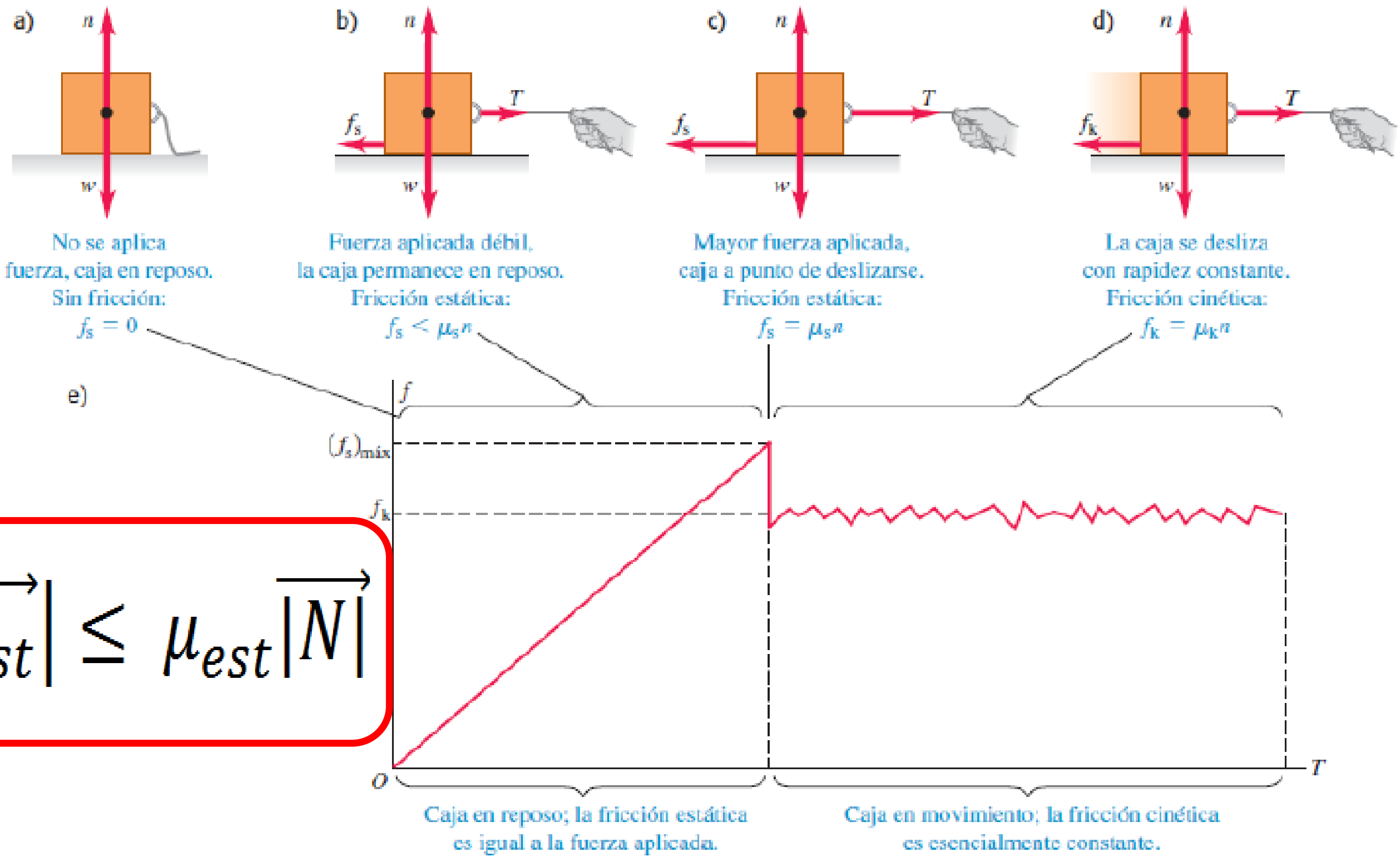
Ojo que esta es una igualdad entre módulos porque la normal es $\perp$ a la Fuerza de Rozamiento (dinámico)

# Fuerza de Rozamiento Estático

Las fuerzas de fricción también pueden actuar cuando *no* hay movimiento relativo. Si tratamos de deslizar por el piso la caja con libros, tal vez no se mueva porque el piso ejerce una fuerza de fricción igual y opuesta sobre la caja. Ésta se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{f}_s$. En la figura 5.19a, la caja está en reposo, en equilibrio, bajo la acción de su peso $\vec{w}$ y la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$. La fuerza normal es igual en magnitud al peso ($n = w$) y ejercida por el piso sobre la caja. Ahora atamos una cuerda a la caja (figura 5.19b) y gradualmente aumentamos la tensión T en la cuerda. Al principio, la caja no se mueve porque, al aumentar $T$, la fuerza de fricción estática $f_s$ también aumenta (su magnitud se mantiene igual a $T$).

# Fuerza de Rozamiento Estático

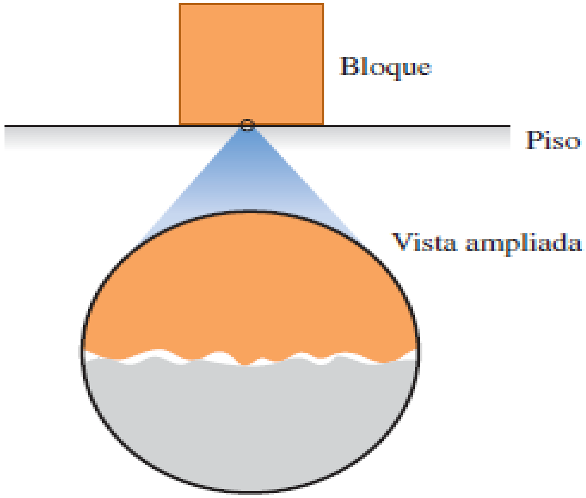
**5.19** a), b), c) Si no hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción estática $f_s$ es igual o menor que $\mu_s n$. d) Si hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción cinética $f_k$ es igual a $\mu_k n$. e) Gráfica de la magnitud de la fuerza de fricción $f$ en función de la magnitud de la fuerza aplicada $T$. La fuerza de fricción cinética varía un poco conforme se forman y se rompen los enlaces intermoleculares.




$$\boxed{\left|\overrightarrow{F_{roz-est}}\right| \leq \mu_{est}\left|\overrightarrow{N}\right|}$$

# Algunos números

**5.18** Las fuerzas normal y de fricción surgen de interacciones entre moléculas en puntos intermedios entre las superficies del bloque y del piso.

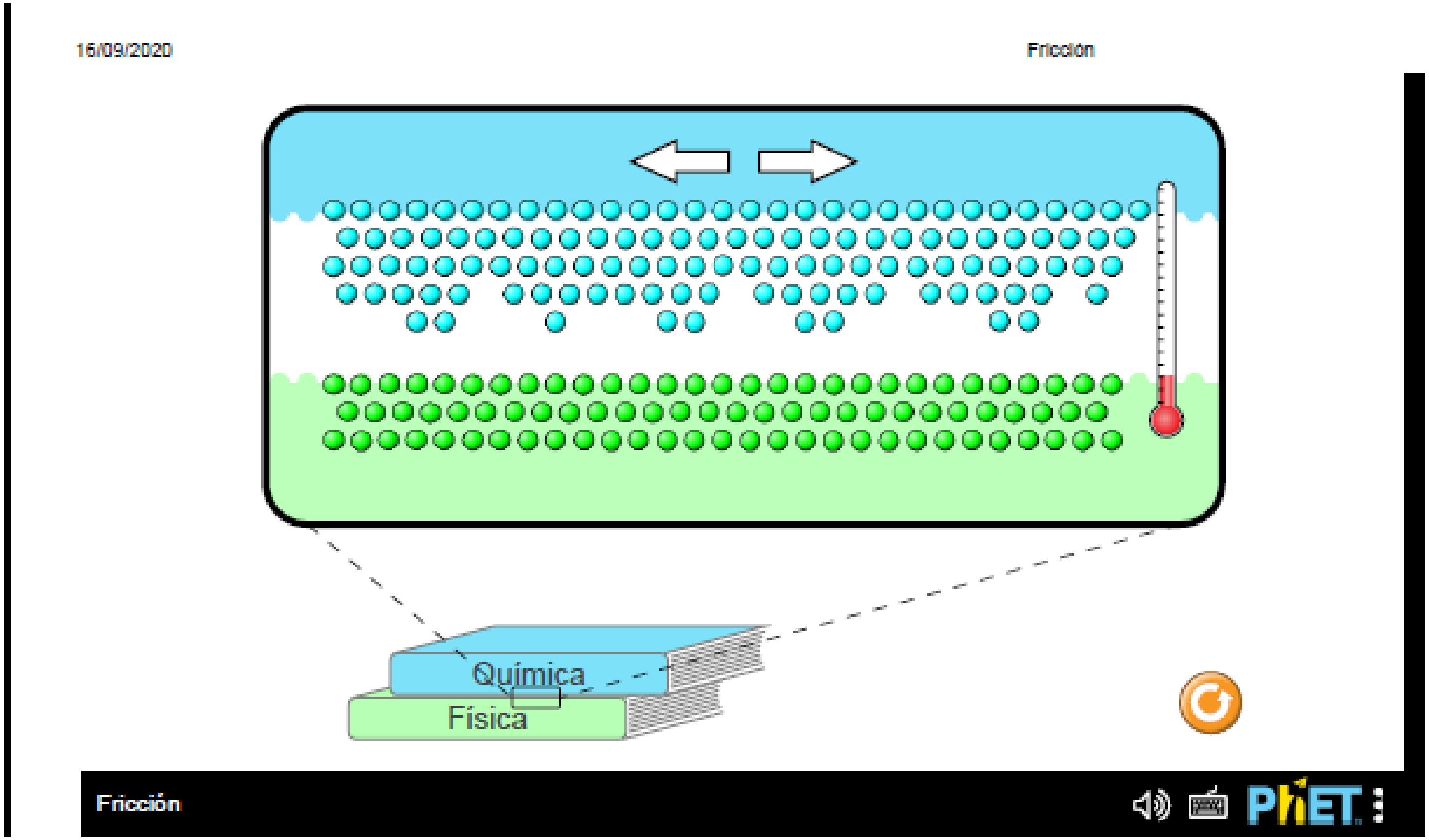



En un nivel microscópico, aun las superficies lisas son ásperas: tienden a "engancharse".

**Tabla 5.1** Coeficientes de fricción aproximados

| Materiales | Coeficiente de fricción estática, $\mu_s$ | Coeficiente de fricción cinética, $\mu_k$ |
|---|---|---|
| Acero sobre acero | 0.74 | 0.57 |
| Aluminio sobre acero | 0.61 | 0.47 |
| Cobre sobre acero | 0.53 | 0.36 |
| Latón sobre acero | 0.51 | 0.44 |
| Zinc sobre hierro colado | 0.85 | 0.21 |
| Cobre sobre hierro colado | 1.05 | 0.29 |

https://phet.colorado.edu/sims/html/friction/latest/friction_es.html



## Resistencia de fluidos y rapidez terminal

Si usted saca la mano por la ventanilla de un automóvil que viaja con gran rapidez, comprobará la existencia de la **resistencia de un fluido**, que es la fuerza que un fluido (gas o líquido) ejerce sobre un cuerpo que se mueve a través de él. El cuerpo en movimiento ejerce una fuerza sobre el fluido para hacerlo a un lado. Por la tercera ley de Newton, el fluido responde sobre el cuerpo con una fuerza igual y opuesta.

La *dirección* de la fuerza de resistencia de un fluido que actúa sobre un cuerpo siempre es opuesta a la dirección de la velocidad del cuerpo. La *magnitud* de la fuerza de resistencia de un fluido suele aumentar al incrementarse la rapidez del cuerpo en el fluido. Esto es muy diferente de la fuerza de fricción cinética entre dos superficies en contacto, que casi siempre podemos considerar independiente de la rapidez. A rapidez baja, la magnitud $f$ de la fuerza de resistencia del fluido es aproximadamente proporcional a la rapidez $v$ del cuerpo:

$$f = kv \qquad \text{(resistencia del fluido a baja rapidez)} \tag{5.7}$$

$$\boxed{\vec{F} = k\vec{v} \qquad \text{vectorial}}$$

***k*** es una constante de proporcionalidad (forma y el tamaño)

¿Unidades? f es una fuerza $\Rightarrow$ **N (Newton) = kg.m/seg$^2$** y ***v* = m/seg**

$$\frac{kg.m}{seg^2} = k.\frac{m}{seg} \Rightarrow \mathbf{k = kg/seg}$$

*A velocidades altas* La fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional a $v^2$, no a $v$, para la rapidez de una pelota de tenis o una rapidez mayor y se denomina **arrastre del aire** o sólo *arrastre*. Los aviones, las gotas de lluvia y ciclistas experimentan arrastre del aire. En este caso, sustituimos la ecuación (5.7) por

$$f = Dv^2 \qquad \text{(resistencia de fluidos a alta rapidez)} \tag{5.8}$$

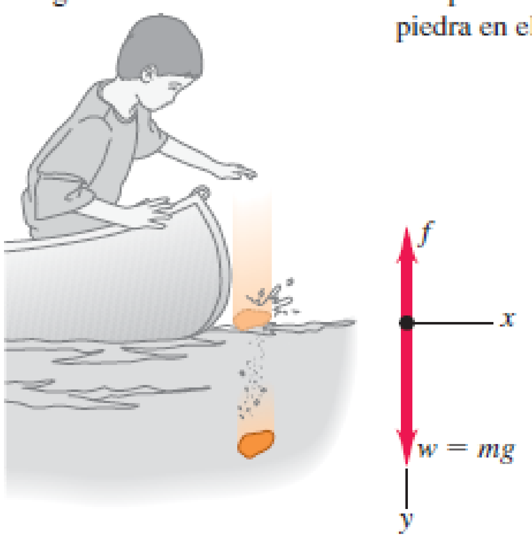
Por los efectos de la resistencia de fluidos, un objeto que cae en un fluido *no* tiene aceleración constante. Para describir su movimiento, no podemos usar las relaciones de aceleración constante del capítulo 2; más bien, debemos partir de la segunda ley de Newton. Consideremos esta situación: suponga que usted suelta una roca en la superficie de un estanque profundo, y cae hasta el fondo (figura 5.24a). En este caso, la fuerza de resistencia del fluido está dada por la ecuación (5.7). ¿Cómo cambian la aceleración, velocidad y posición de la roca con el tiempo?

**5.24** Una piedra cae a través de un fluido (agua).

a) Una piedra que cae en agua

b) Diagrama de cuerpo libre de la piedra en el agua

Diagrama de cuerpo libre




esto que la piedra se mueve hacia abajo, la rapidez $v$ es igual a la componente $y$ de la velocidad $v_y$ y la fuerza de resistencia del fluido tiene la dirección $-y$. No hay componentes $x$, así que la segunda ley de Newton da

$$\sum F_y = mg + (-kv_y) = ma_y$$

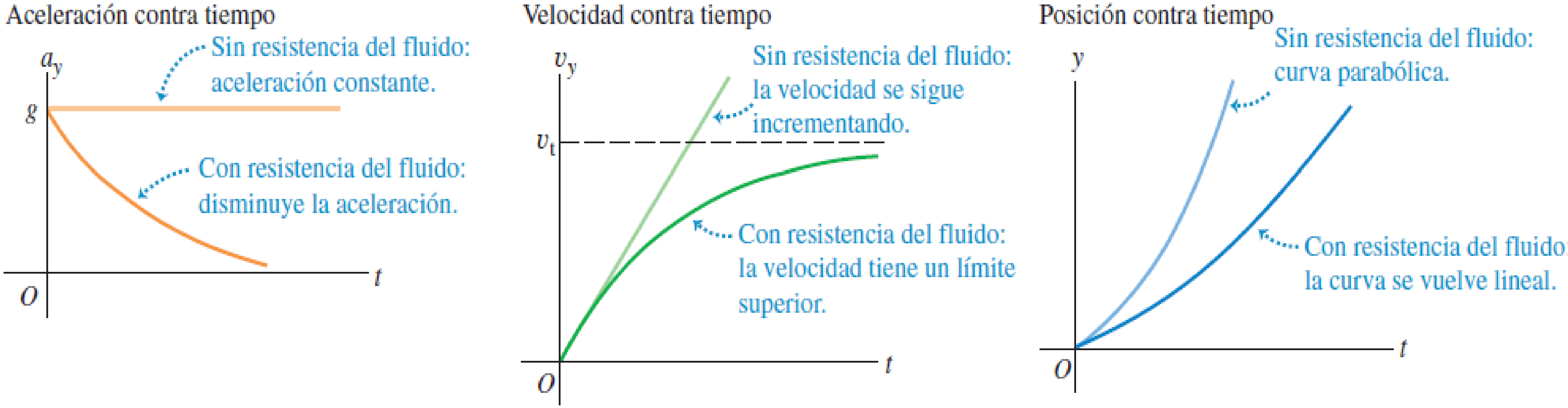
Al principio, cuando la roca empieza a moverse, $v_y = 0$, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es $a_y = g$. Al aumentar la rapidez, también se incrementa la fuerza de resistencia hasta ser igual en magnitud al peso. Ahora, $mg - kv_y = 0$, la aceleración se vuelve cero y ya no aumenta la rapidez. La rapidez final $v_t$, llamada **rapidez terminal**, está dada por $mg - kv_t = 0$, es decir,

$$v_t = \frac{mg}{k} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = kv\text{)} \qquad (5.9)$$

Al principio, cuando la roca empieza a moverse, $v_y = 0$, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es $a_y = g$. Al aumentar la rapidez, también se incrementa la fuerza de resistencia hasta ser igual en magnitud al peso. Ahora, $mg - kv_y = 0$, la aceleración se vuelve cero y ya no aumenta la rapidez. La rapidez final $v_t$, llamada **rapidez terminal**, está dada por $mg - kv_t = 0$, es decir,

$$v_t = \frac{mg}{k} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = kv\text{)} \tag{5.9}$$

**5.25** Gráficas de movimiento para un cuerpo que cae sin resistencia del fluido y con resistencia del fluido proporcional a la rapidez.



Para saber de dónde salen las curvas de la figura 5.25, debemos obtener la relación entre rapidez y tiempo en el intervalo antes de alcanzarse la rapidez terminal. Volvemos a la segunda ley de Newton, que rescribimos usando $a_y = dv_y/dt$:

$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$$

Después de reordenar términos y sustituir $mg/k$ por $v_t$, integramos ambos miembros, recordando que $v_y = 0$ cuando $t = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv_y}{v_y - v_t} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

Que ya integrada da

$$\ln\frac{v_t - v_y}{v_t} = -\frac{k}{m}t \qquad \text{o} \qquad 1 - \frac{v_y}{v_t} = e^{-(k/m)t}$$

y, por último,

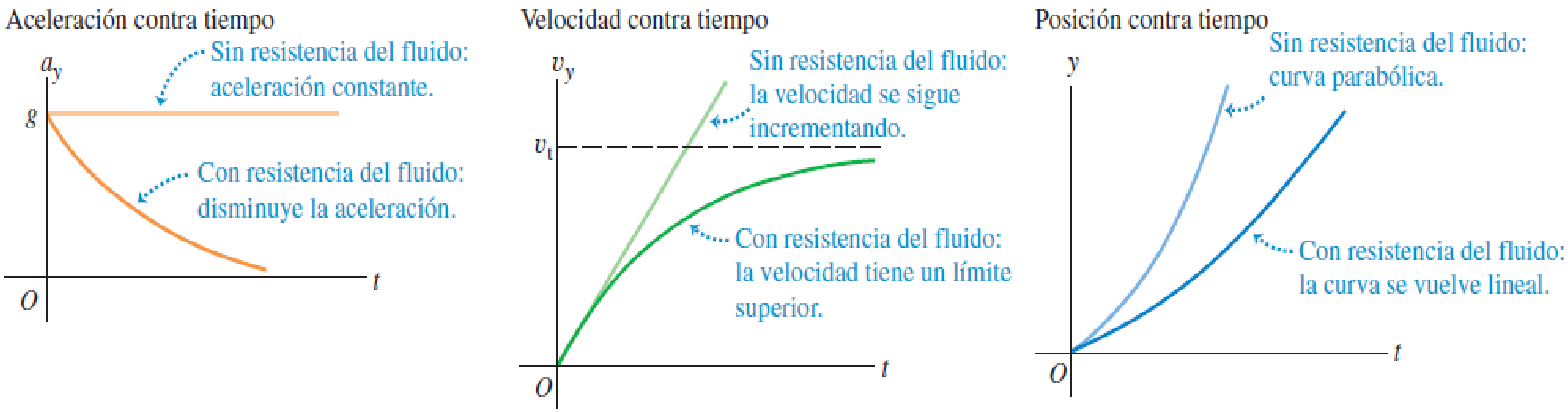
$$v_y = v_t[1 - e^{-(k/m)t}]$$

La derivada de $v_y$ con respecto al tiempo es $a_y$, y la integral de $v_y$ en el tiempo es $y$. Dejamos la derivación al lector (véase el ejercicio 5.46); los resultados son

$$a_y = g e^{-(k/m)t} \tag{5.11}$$

$$y = v_t \left[ t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right) \right] \tag{5.12}$$

**5.25** Gráficas de movimiento para un cuerpo que cae sin resistencia del fluido y con resistencia del fluido proporcional a la rapidez.

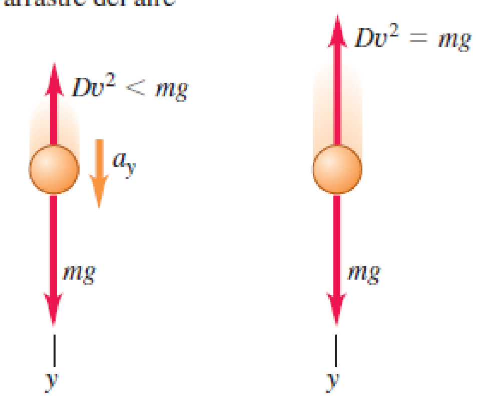



http://fooplot.com/

Al deducir la rapidez terminal en la ecuación (5.9) supusimos que la fuerza de resistencia del fluido era proporcional a la rapidez. En el caso de un objeto que cae con gran rapidez en el aire, de modo que la resistencia del fluido sea igual a $Dv^2$ como en la ecuación (5.8), la rapidez terminal se alcanza cuando $Dv^2$ es igual al peso $mg$ (figura 5.26a). Usted puede demostrar que la rapidez terminal $v_t$ está dada por

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = Dv^2\text{)} \qquad (5.13)$$

a) Diagramas de cuerpo libre para caída con arrastre del aire




Antes de la rapidez terminal: objeto con aceleración, fuerza de arrastre menor que el peso.

En la rapidez terminal $v_t$: objeto en equilibrio, fuerza de arrastre igual al peso.

Esta expresión para la rapidez terminal explica el porqué los objetos pesados tienden a caer en el aire con mayor rapidez que los ligeros. Dos objetos con el mismo tamaño pero con diferente masa (digamos, una pelota de ping-pong y una esfera de acero del mismo radio) tienen la misma $D$ pero diferente valor de $m$. El objeto con mayor masa tiene mayor rapidez terminal y cae más rápidamente. La misma idea explica por qué una hoja de papel cae más rápidamente si primero la hacemos esfera: la masa es la misma, pero el tamaño más pequeño reduce $D$ (menos arrastre para una rapidez dada) y aumenta $v_t$. Los paracaidistas usan el mismo principio para controlar su descenso (figura 5.26b).