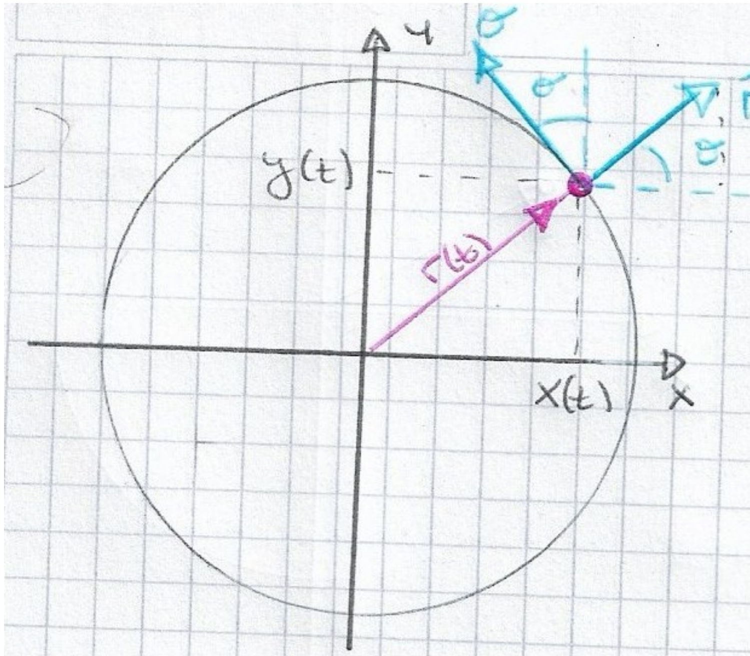
Movimientos Circulares

- Retomamos el tema de rozamiento viscoso
- Hacemos el desarrollo matemático de coordenadas polares
- Hacemos dos ejercicios de dinámica de movimiento circular usando coordenadas polares

Coordenadas Polares: Posición, velocidad y aceleración

FECHA



$$r(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

Si $r(t) = cte \Rightarrow R = r$

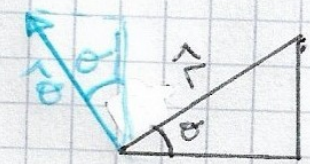
Los coordenadas polares $(\hat{r}, \hat{\theta})$ → Recordemos que tienen módulo = 1

$\bar{r} = r\,\hat{r}$ donde $|\bar{r}| = r$

¿Cómo escribir $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ en coordenadas polares?

$\hat{r} = \cos\theta \; \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta \; \hat{\jmath}$

$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta \; \hat{\imath} + \cos\theta \; \hat{\jmath}$



¿Cuánto valen $\bar{v}$ y $\bar{a}$?

Si $\bar{r} = r\hat{r} \Rightarrow \bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d(r \cdot \hat{r})}{dt} =$ derivada del producto

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \otimes$$

$$\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

$\otimes$ Hacemos esta cuenta

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\hat{r}} = \frac{d(\cos\theta)}{dt} \hat{\imath} + \frac{d(\operatorname{sen}\theta)}{dt} \hat{\jmath}$$

FECHA

$$\dot{\hat{r}} = \underbrace{\frac{d(\cos\theta)}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}}_{\text{regla de la cadena}} \hat{\imath} + \frac{d\sin\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{\jmath}$$

$$\dot{\hat{r}} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \hat{\imath} + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \hat{\jmath} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}}$$

cuánto vale $\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\hat{\theta}}$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d(\sin\theta)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d(\cos\theta)}{dt}\hat{\jmath}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r}}$$

Volvemos a la expresión para $\bar{v}$

$$\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Si $r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}}$

y $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega =$ velocidad angular

Aceleración en Polares.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r}) + \underbrace{\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\hat{\theta})}$$

producto de 3 cosas.

$$\bar{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta}) + r\frac{d(\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt}$$

$$\bar{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}$$

$$\bar{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \underbrace{\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}} + \underbrace{\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}} + \underbrace{r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta}} + r\,\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\hat{r}\right)$$

$$\bar{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2}\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

Si $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$

$$\bar{a} = -R\dot{\theta}^{2}\,\hat{r} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

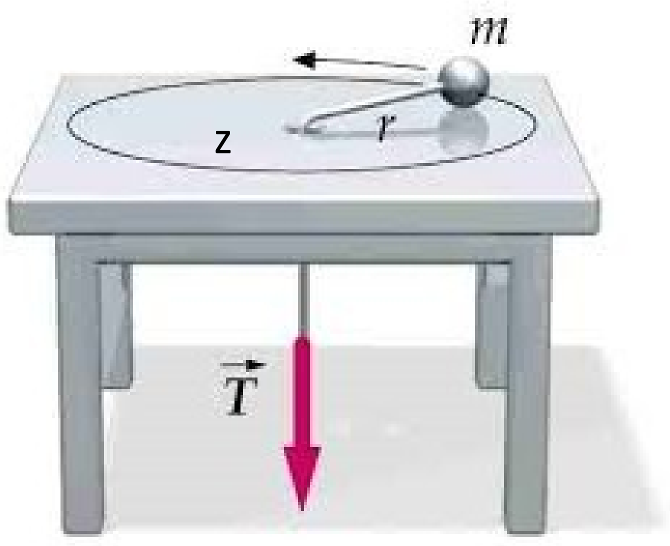
- Las componentes centrípeta (normal) y tangencial de la aceleración serán

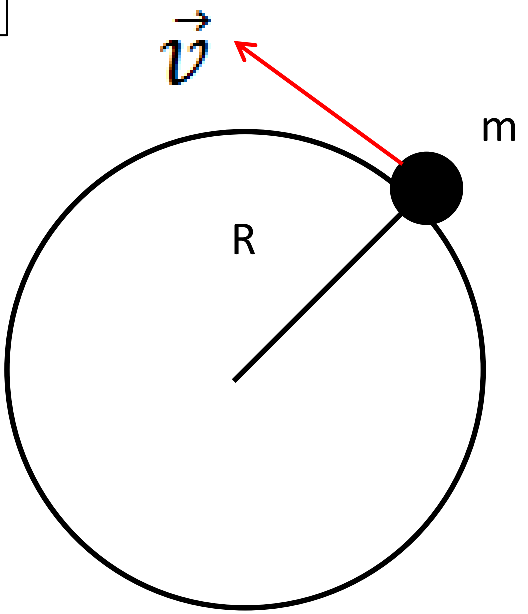
$$\boxed{\bar{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2}_{\text{aceleración centrípeta}}\,\hat{r} + \underbrace{R\ddot{\theta}}_{\text{aceleración tanpencial}}\,\hat{\theta}}$$

si $\dot{\theta} = \omega$ = constante $\Rightarrow \bar{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{r}$

$\ddot{\theta} = 0$ $\qquad \bar{a} = -R\omega^2\,\hat{r}$

Problema: Hallar la aceleración de la masa y el tiempo que tarda en dar una vuelta entera

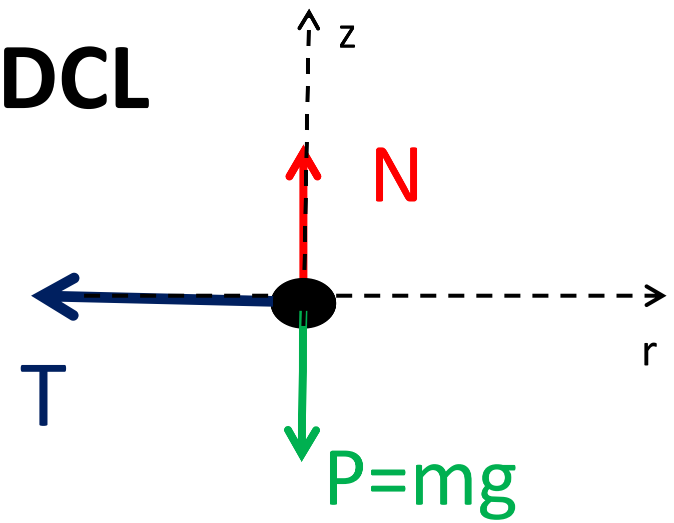


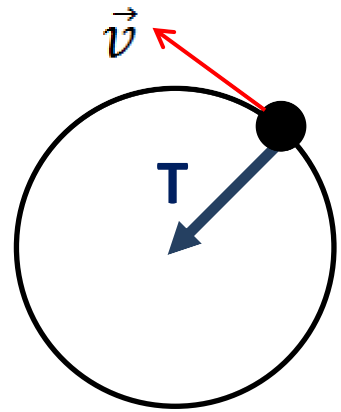


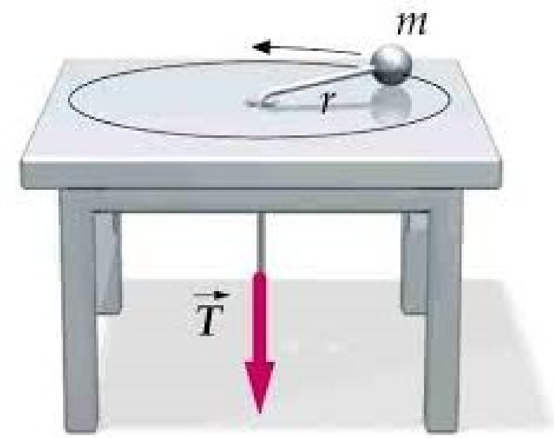
En este problema **r** está fijo => **r**=R .

<u>Problema 1:</u> Hallar la aceleración de la masa y el tiempo que tarda en dar una vuelta entera

DCL







Ahora escribimos la ecuación de Newton. ¿Cuántas componentes tiene?

Componente vertical $\hat{z}$

Componentes en el plano polar $\widehat{r}, \widehat{\theta},$

$$\hat{r}: -T = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\hat{z}: N - mg = 0 \quad \Rightarrow N = mg \qquad \hat{\theta}: 0 = m.R.\ddot{\theta}$$

$$\hat{r}: -T = m.a_r = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta}: 0 = m.a_\theta = m.R.\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow 0 = \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = constante = w$$

$$\hat{r}: -T = -mR\dot{\theta}^2 \quad => T = mR\dot{\theta}^2$$

Nos falta usar un dato: la velocidad tangencial del la masa (es **v**)

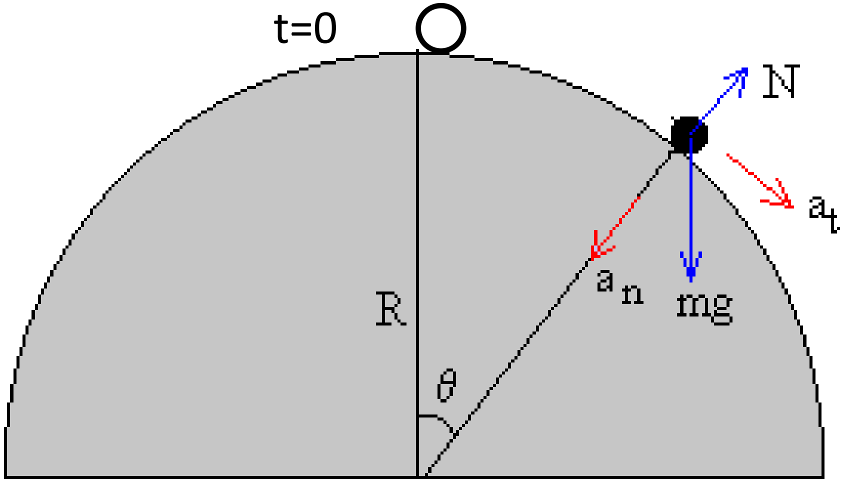
Sabemos que: $$\vec{v} = v\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

Reemplazando en la ecuación para la tensión T :

$$T = mR\left(\frac{v}{R}\right)^2 = m\frac{v^2}{R}$$

$$=> \tau = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi R}{v}$$

Numerador: la longitud de la circunferencia
Denominador: la rapidez o velocidad



Problema 2: Una partícula puntual de masa m desliza sin rozamiento por un casquete esférico. Partiendo desde su punto más alto.

a) Hallar v(θ).
b) Indicar en qué punto de la superficie de despega.

$$\hat{r}: N - m.g.cos(\theta) = -mR\dot{\theta}^{\,2} \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}: m.g.sen(\theta) = mR\ddot{\theta} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\right\} \text{Las ecuaciones de Newton}$$

Integramos la ecuación (2) usando: $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

Reemplazando esto en la ecuación (2) nos queda: $m.g.sen(\theta) = m.R\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

Juntamos todo lo que tiene θ de un lado y $\dot{\theta}$ del otro

$$\int_0^{\theta} g.sen(\theta)\,d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} R\dot{\theta}d\dot{\theta} \Rightarrow -g.cos(\theta)|_0^{\theta} = R\frac{\dot{\theta}^2}{2}|_0^{\dot{\theta}}$$

$$-g[cos(\theta) - \cos(0)] = R\frac{\dot{\theta}^2}{2} - R.0$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2g}{R}[1 - cos(\theta)]} = \dot{\theta}} \longrightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

b) Indicar en qué punto de la superficie de despega => N=0

- Volvemos a la ecuación 1 con esta condición:

$$\hat{r}: N - m.g.cos(\theta) = -mR\dot{\theta}^{\,2}$$

$$-m.g.cos(\theta_{despegue}) = -m.R\,\dot{\theta}^2_{desp.}$$

$$g.cos(\theta_{despegue}) = R\frac{2g}{R}[1 - cos(\theta_d)]$$

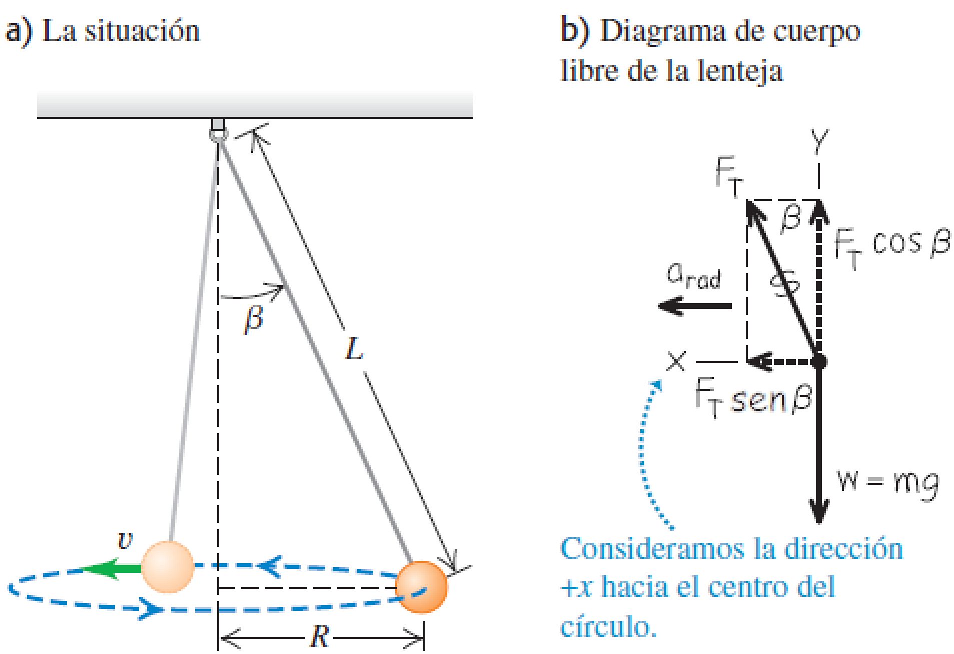
$$\cos(\theta_d) = 2 - 2\cos(\theta_d)$$

$$3\cos(\theta_d) = 2$$

$$\cos(\theta_d) = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_d = arcos\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \theta_d = 48.2^{\circ}$$

Problema 3: Péndulo Cónico

5.32 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.



Intentar escribir las ecuaciones de Newton para este sistema

https://www.youtube.com/watch?v=VyhR1Hf1_OU