MAS – Resorte - Péndulo

- Repaso de Movimiento Armónico Simple
- Resortes (horizontal y vertical)
- Péndulo
- Pequeñas Oscilaciones
- Péndulo de Foucault

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden

Las soluciones de esta ecuación diferencial son funciones trigonométricas con esta forma:

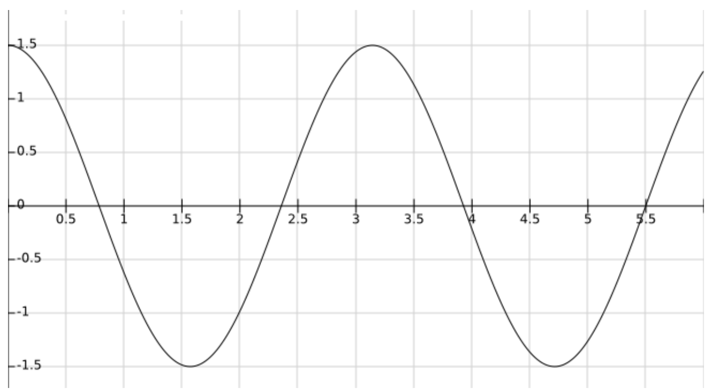
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

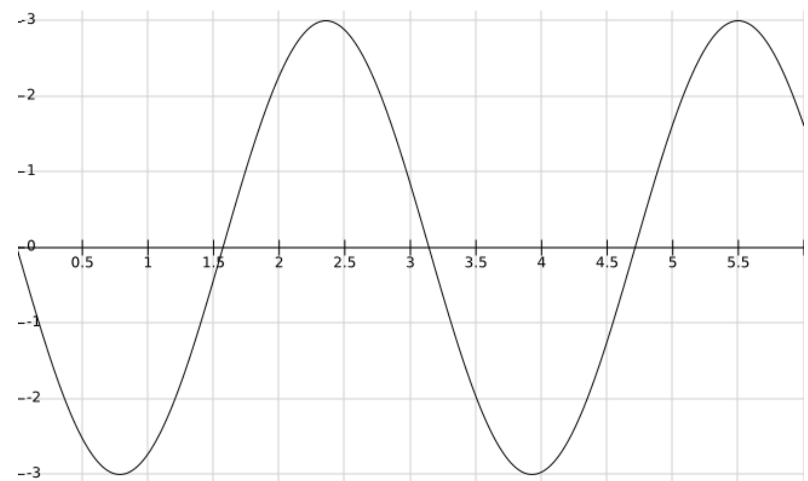
$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

A y ϕ se obtienen a partir de las **condiciones iniciales** **x(t=0) y v(t=0)** en general son datos

Algunos detalles para tener en cuenta

Si $x(t) = Acos(\omega t + \phi)$ => $\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega sin(\omega t + \phi)$



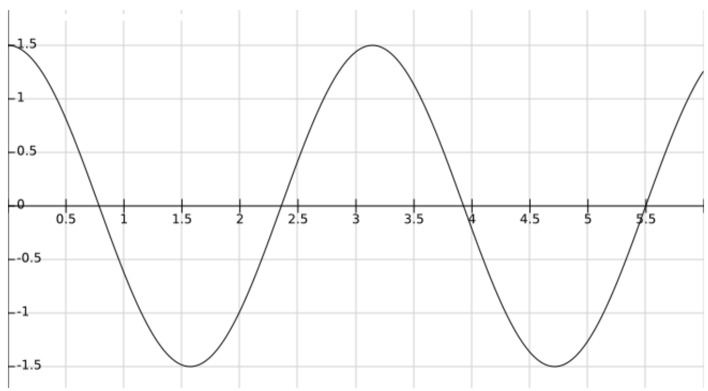


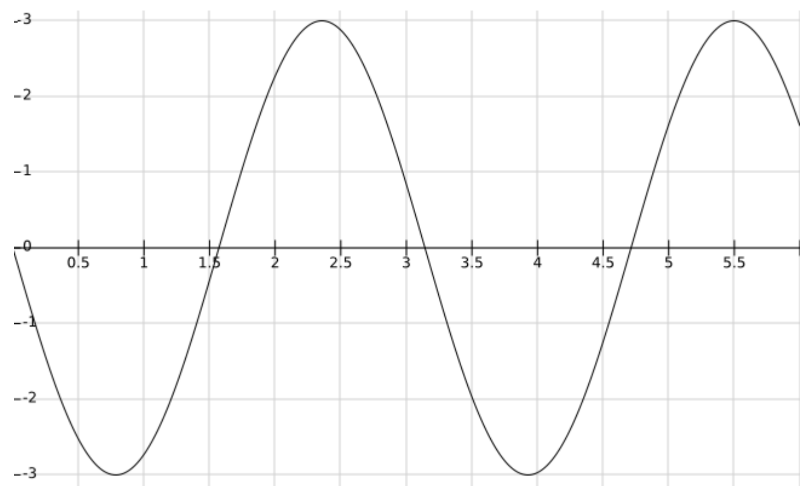
En este caso A=1.5 y la fase ϕ=0 y ω=2

El máximo de la velocidad será cuando $|v(t)|=A\omega$

Algunos detalles para tener en cuenta

Si $x(t) = Acos(\omega t + \phi)$ => $\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega sin(\omega t + \phi)$

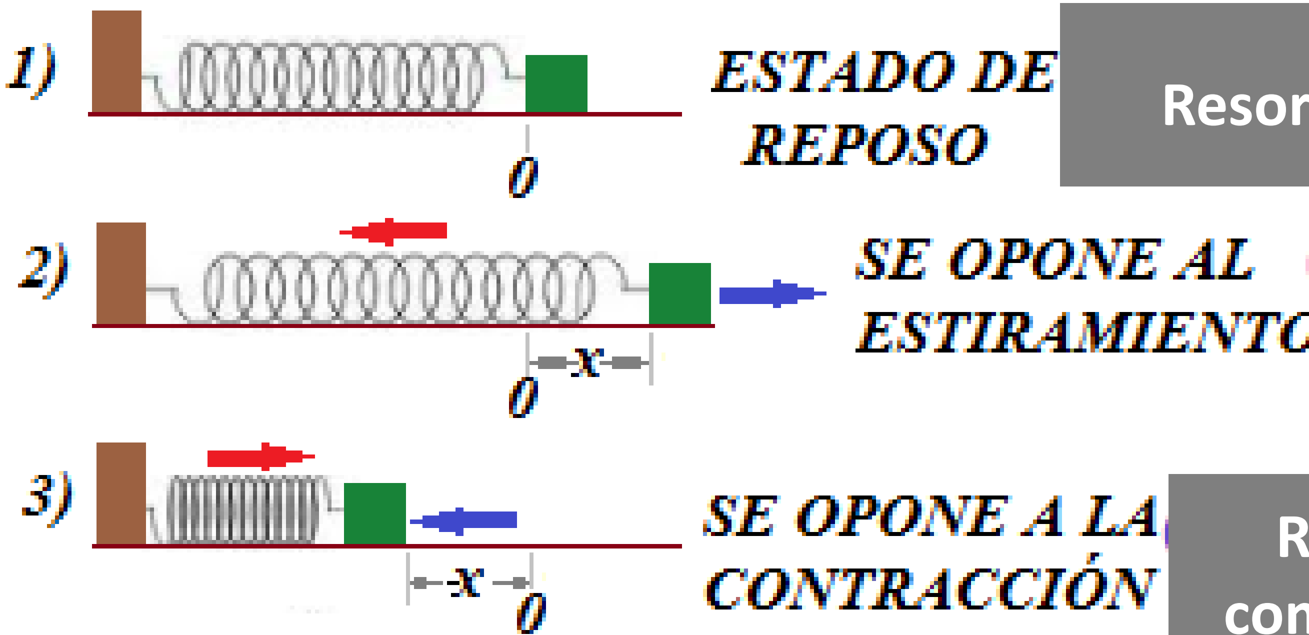




En este caso A=1.5 y la fase ϕ=0 y ω=2

El máximo de la velocidad será cuando |v(t)|=Aω

Fuerza Elástica: Resorte Lineal



Resorte sin estirar

Resorte estirado

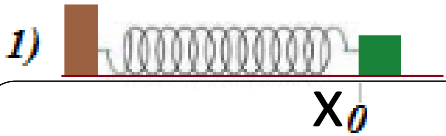
Resorte comprimido

F ∝ Δl esto significa que el módulo de la fuerza es proporcional al estiramiento

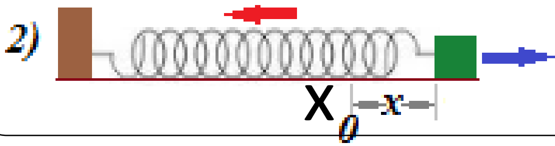
$$\overrightarrow{F_e} = -k.\overrightarrow{\Delta l}$$

k es la constante elástica del resorte

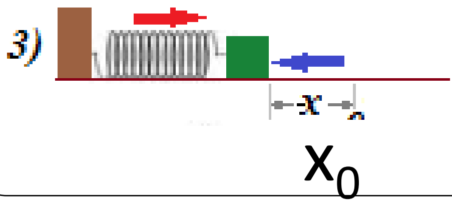
[k]=N/m (unidades de *k*)



$$\overrightarrow{\Delta l} = (l - l_0)\hat{x} = (x - x_0)\hat{x}$$



Si $(x - x_0) > 0 \Rightarrow F_e < 0$



Si $(x - x_0) < 0 \Rightarrow F_e > 0$

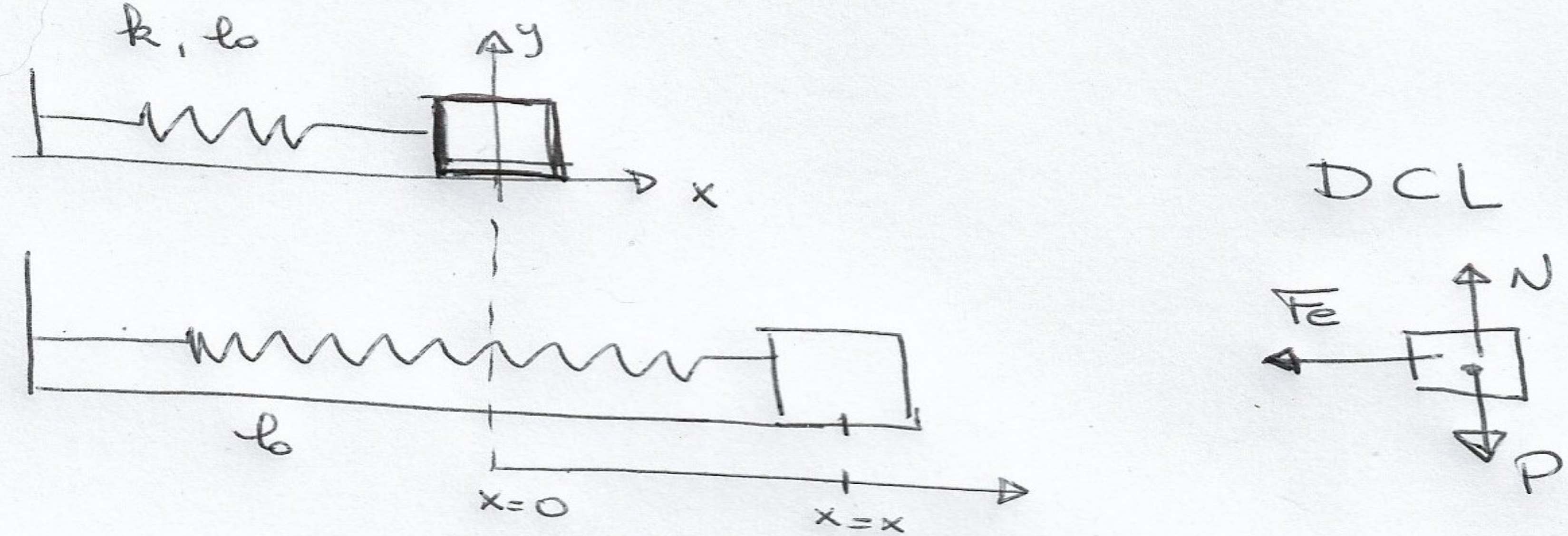
FUERZA RESTITUTIVA

En un sistema de referencia en 1D (en x) la Fuerza elástica es:

$$\overrightarrow{F_e} = -k(x - x_0)\hat{x}$$

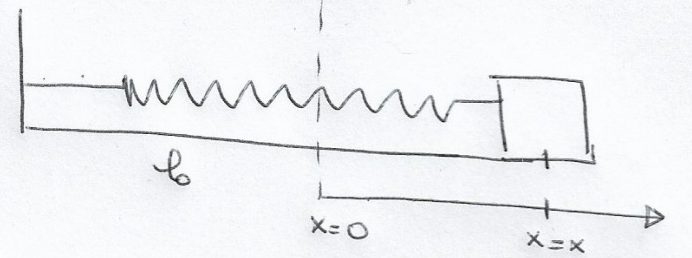
Caso 1: Resorte apoyado sobre un plano

Vamos a resolver la dinámica del resorte



$$\overline{F_e} = -k(\ell-\ell_0)\,\hat{x} = -k(x-\underbrace{x_0}_{0})\,\hat{x} = -kx\,\hat{x}$$

Esto esta asociado al Sistema de Referencia (SR) elegido



Ecs. de Newton:

x) $F_e = m \cdot a_x$

y) $N - P = 0 \Rightarrow N = P$

x) $-kx = m \cdot \ddot{x}$ ← ojo No pongo el signo de F_e 2 veces

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

divido por m a ambos miembros

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ casi !

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

$\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ A y φ de c.i

$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

Tenemos las expresiones para x(t) y la velocidad

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad A \text{ y } \varphi \text{ de c.i}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

Para encontrar los valores de A y φ uso las condiciones iniciales:

Supongamos que $\boxed{\begin{array}{l} x(0) = l_0 \\ v(0) = 0 \end{array}}$

$$x(0) = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = l_0$$

$$x(0) = A \cdot \underbrace{\cos(0 + 0)}_{\text{es } 1} = A = l_0$$

$$v(0) = -\cancel{\omega}_{0}\, \underbrace{A}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\sin(0 + \varphi)}_{} = 0$$

debe ser cero $\sin(\varphi) = 0$

$\varphi = 0$ o π o 2π . . . . . .

suponemos $\boxed{\varphi = 0}$

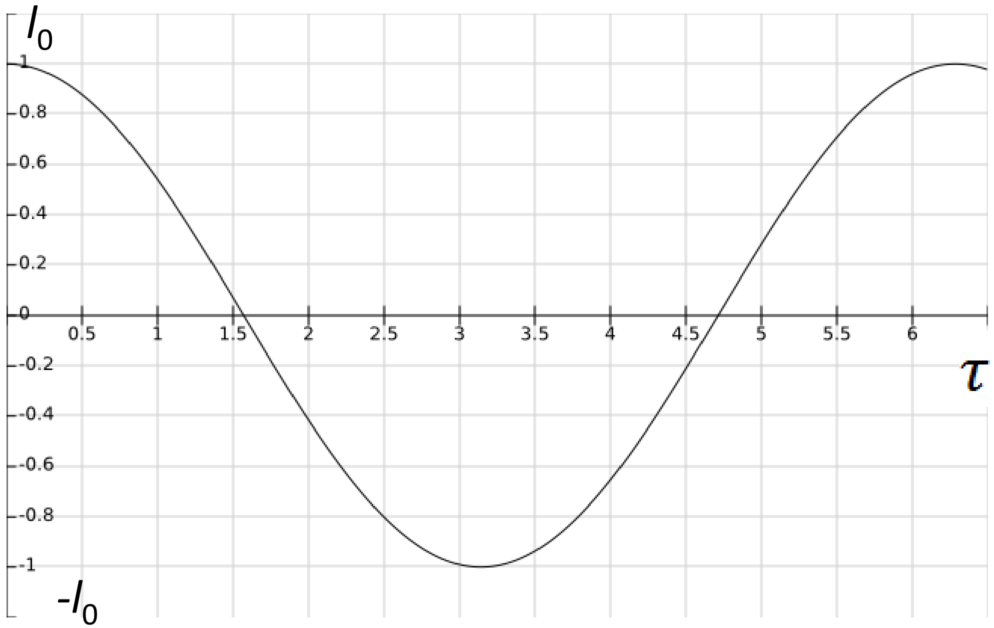
$$\boxed{x(t) = l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}$$

La ecuación de movimiento de la masa es:

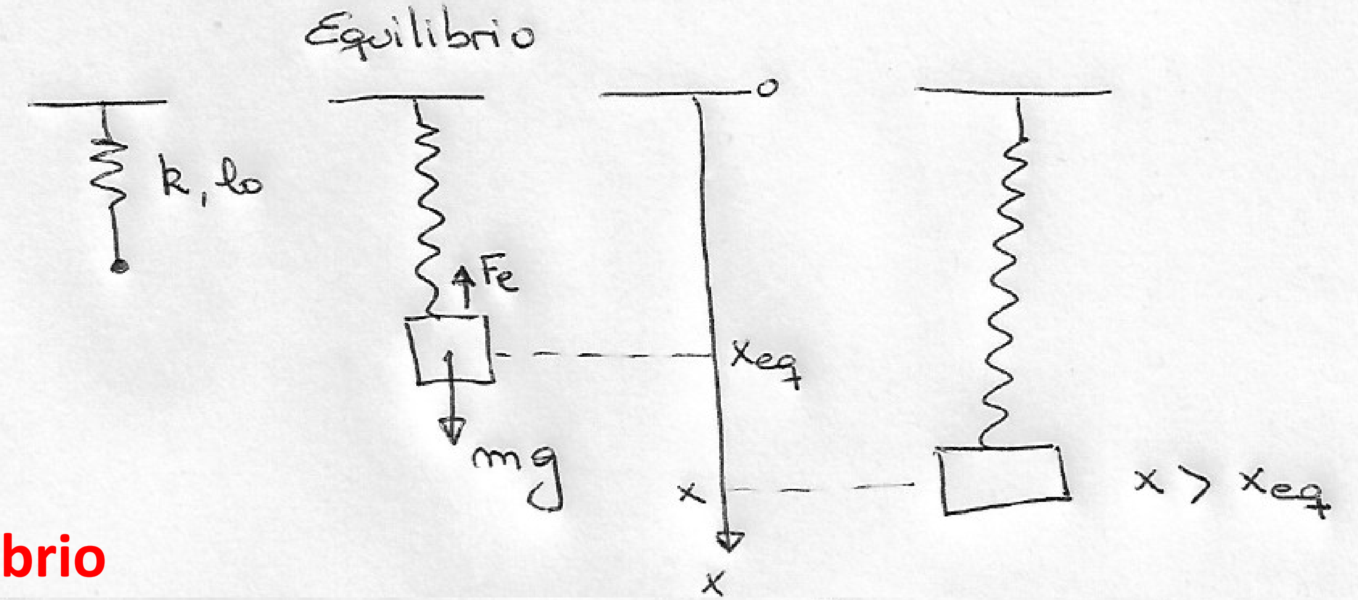
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}$$

El período de oscilación de la masa atada al resorte es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Caso 2: Resorte Vertical



Problema en Equilibrio

$$x) \quad -k(x_{eq} - l_0) + mg = 0$$

$$mg = k(x_{eq} - l_0)$$

$$mg = k x_{eq} - k l_0$$

$$\frac{mg + k l_0}{k} = x_{eq}$$

En equilibrio

$$\boxed{x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0 = \tilde{l_0}}$$

Problema Dinámico – La componente x de la Ec. De Newton

$$mg - k(x - \tilde{l}_0) = m\ddot{x}$$

$$mg - kx + k\tilde{l}_0 = m\ddot{x}$$

$$\frac{k\tilde{l}_0}{m} = \frac{\cancel{m}\ddot{x}}{\cancel{m}} + \frac{kx}{m}$$

$$\frac{k\tilde{l}_0}{m} = \ddot{x} + \omega^2 x \qquad \frac{k}{m}\tilde{l}_0 = \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}}{\cancel{k}}g + \frac{k}{m}l_0$$

Sol. general: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \tilde{l}_0}$

Inhomogeneidad

¿Por qué se escribe así?

Las ecuaciones diferenciales lineales

Homogéneas (=0)

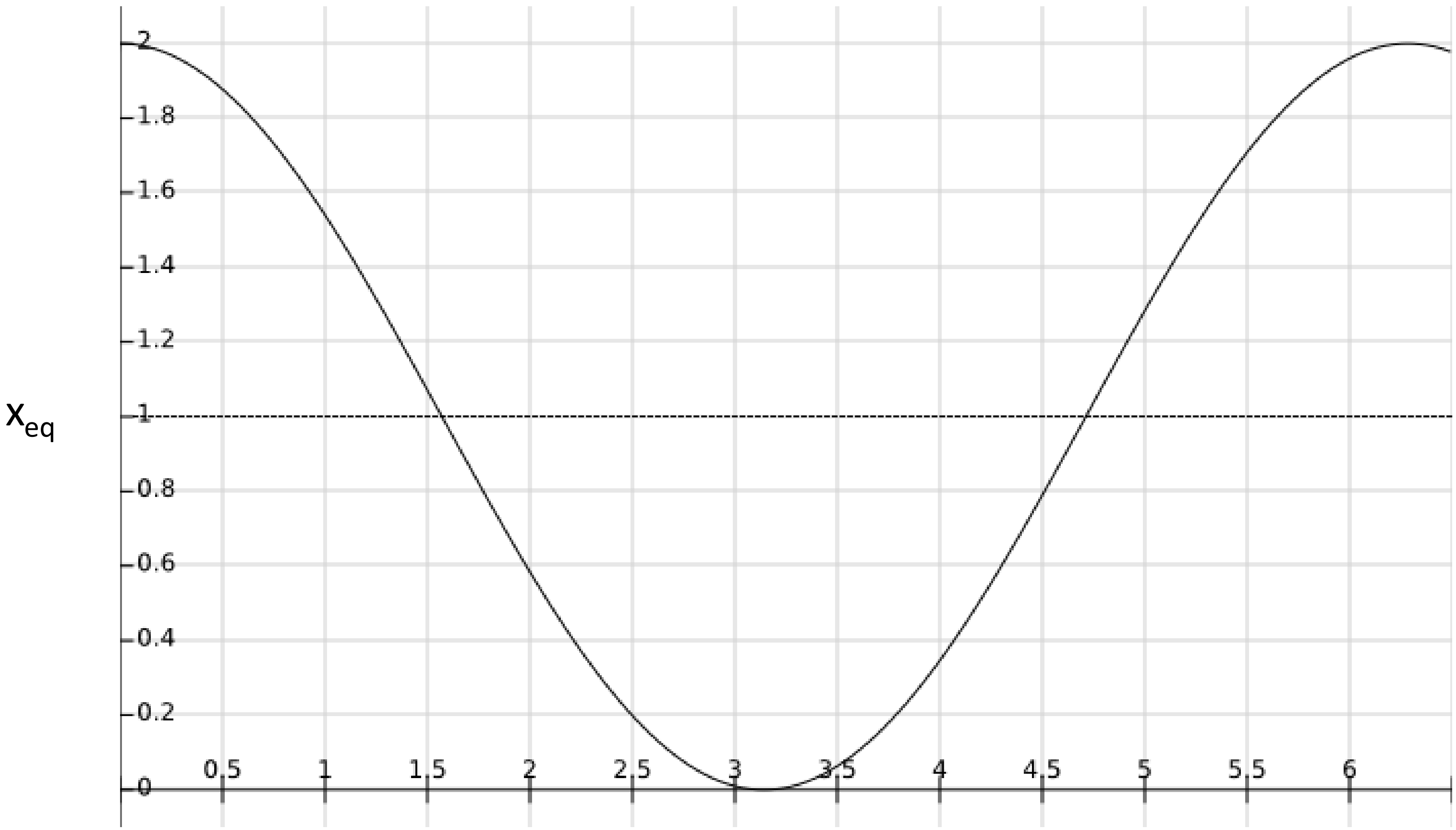
Inhomogéneas (=cte)

Solución Homogénea

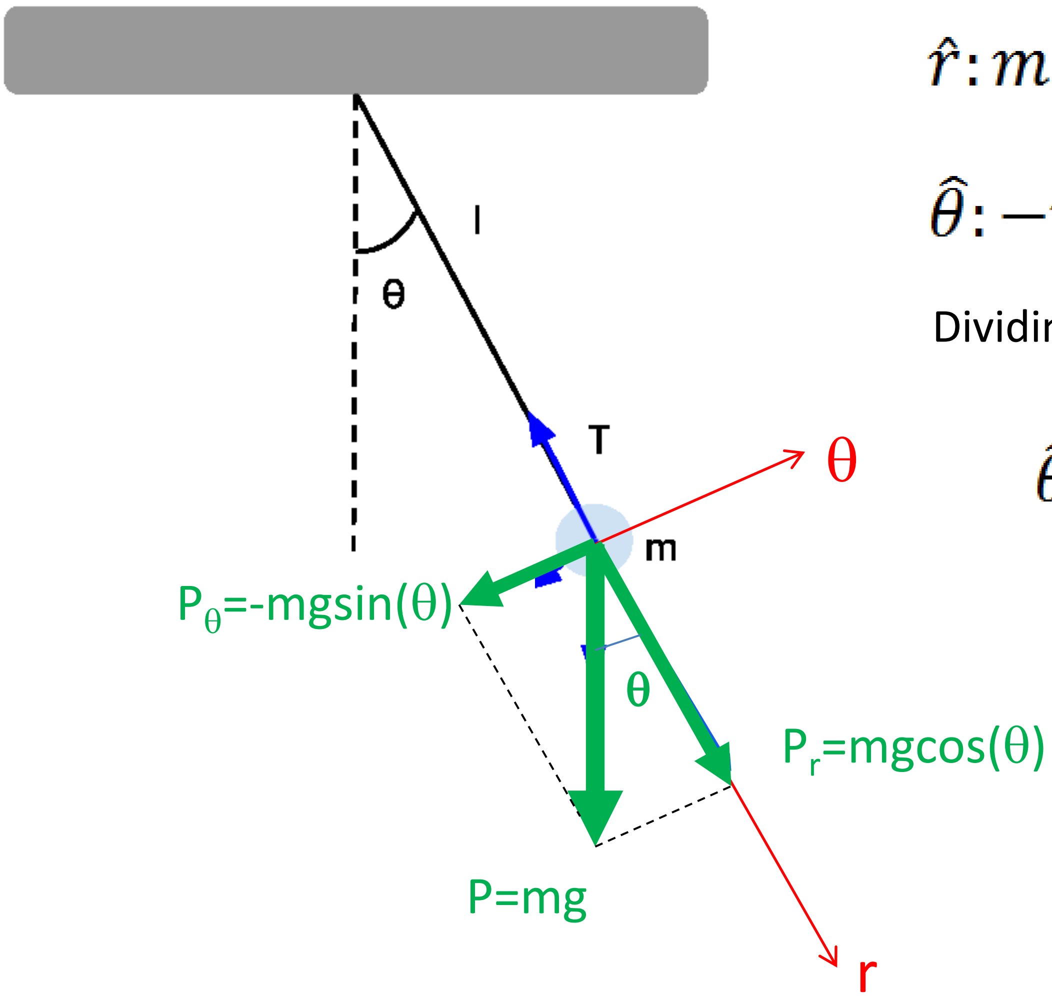
Solución Particular

$$x(t)= x_H(t)+X_P$$

La masa oscila alrededor de esta nueva posición de equilibrio $\tilde{l}_0$



Péndulo Ideal – Pequeñas Oscilaciones



$$\hat{r}: m.g.cos(\theta) - T = -ml\dot{\theta}^{\,2}$$

$$\hat{\theta}: -m.g.sen(\theta) = ml\ddot{\theta}$$

Dividimos por *ml* a ambos miembros

$$\hat{\theta}: \frac{ml}{ml}\ddot{\theta} + \frac{m.g}{ml}.sen(\theta) = 0$$

$$\boxed{\hat{\theta}: \ddot{\theta} + \frac{g}{l}.sen(\theta) = 0}$$

Ecuación diferencial **NO** lineal de segundo orden

Ecuación diferencial lineal 2do orden

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\hat{\theta}: \ddot{\theta} + \frac{g}{l}.sen(\theta) = 0$$

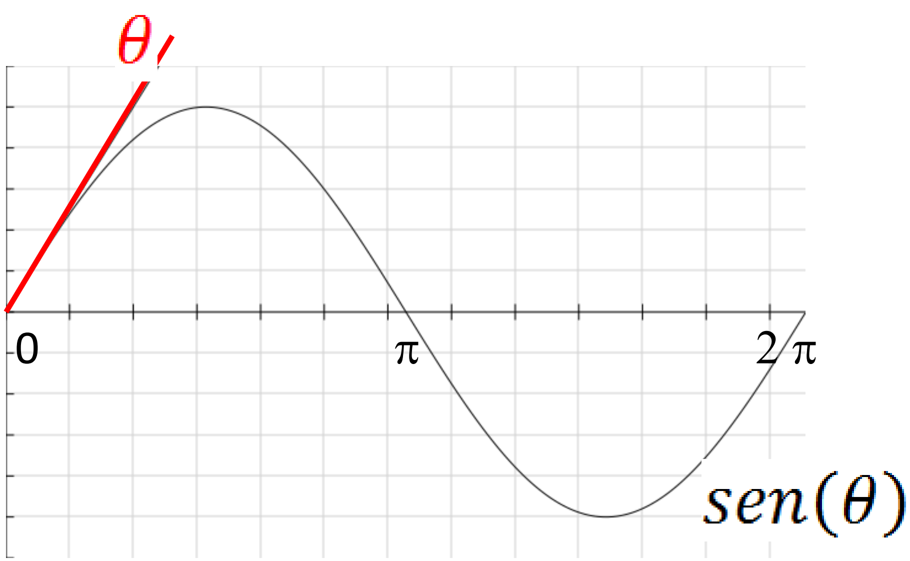
$$\hat{\theta}: \ddot{\theta} + \omega^2.sen(\theta) = 0$$

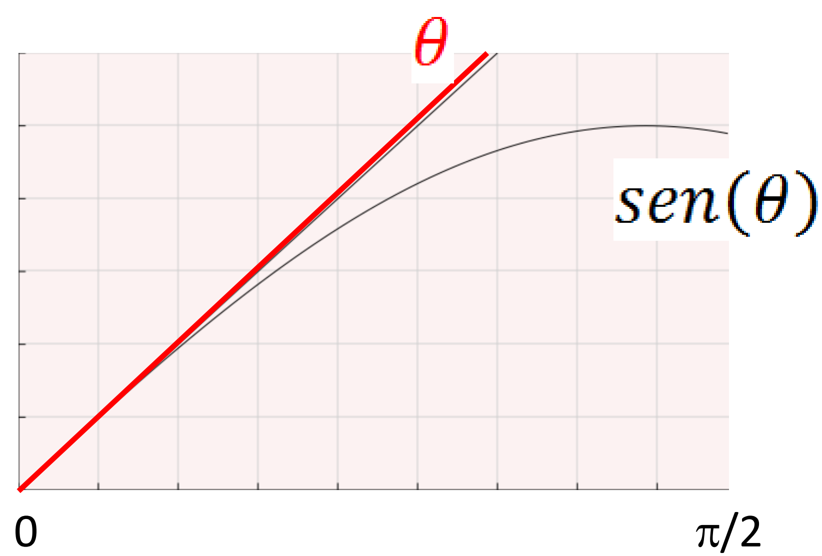
Redefiniendo : $\omega^2 = \frac{g}{l}$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

En único problema es que tenemos la función seno

Usamos la aproximación: Pequeñas Oscilaciones





$$sen(\theta) \sim \theta \text{ si } \theta \text{ es pequeño}$$

Polinomio de Taylor

- **El polinomio de Taylor es una aproximación polinómica de una función *n* veces derivable en un punto concreto.**
- El polinomio de Taylor es una suma finita de derivadas locales evaluadas en un punto concreto

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n$$

Hagamos el Polinomio de Taylor de θ cerca de 0

$$f(\theta) = sen(\theta) \quad y\ f(0) = 0$$

$$f'(\theta) = cos(\theta) \quad y\ f'(0) = 1$$

$$f''(\theta) = -sen(\theta) \quad y\ f''(0) = 0$$

$$sen(\theta) \sim 0 + \theta + 0\frac{\theta^2}{2} + \cdots$$

$$\hat{\theta}: \ddot{\theta} + \omega^2 . sen(\theta) = 0$$

$$\text{usando P. Taylor es: } \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$ Ecuación diferencial lineal 2do orden

Cuya solución es: $\theta(t) = Acos(\omega t + \phi)$ con: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Observaciones:

1) Esta solución vale en el caso en que θ es pequeño
2) Las unidades de ω son las mismas en el caso del resorte y el caso del péndulo

$$[\omega] = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{m}{seg^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{seg}$$

$$[\omega] = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{N}{m.kg}} = \sqrt{\frac{kg.m}{m.kg.seg^2}} = \frac{1}{seg}$$

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi\right)$$

$$\theta(t=0) = \frac{\pi}{4} = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}0 + \phi\right)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = 0 = -A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}0 + \phi\right) = 0$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$

Esta solución es válida siempre que el ángulo θ sea pequeño

El período de Oscilación de la masa m es: $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html

Péndulo de Foucault