

Ecuaciones de Maxwell (E.M.)

Interacción de la radiación e-m con la materia en una descripción macroscópica

$$(1) \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

$$(4) \quad \nabla \times \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{j}$$

Campos

$\bar{D}$ : desplazamiento

$\bar{B}$ : ind. magnética

$\bar{E}$ : eléctrico

$\bar{H}$ : magnético

$\bar{j}$ : densidad de corrientes

$\rho$ : densidad de carga

las E.M. no dicen nada sobre cómo se comporta el material frente a los campos, sólo como se relacionan los campos, las cargas y las corrientes. Tampoco describe cómo se generan esas cargas y corrientes  $\Rightarrow$  para tener una solución autoconsistente, las E.M. se deben suplementar con relaciones que describan el comportamiento del material, las llamadas relaciones constitutivas

Antes de proseguir para estudiar estas relaciones, vamos a analizar lo siguiente

1) ecuaciones de Maxwell microscópicas

Se pueden escribir las ees. (1) a (4) pero para los campos microscópicos  $\bar{D}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$  y  $\rho$  y  $\bar{j}$  las densidades microscópicas. No hay  $\bar{d}$  y  $\bar{h}$  porque todas las cargas (las que "arbitrariamente" ponemos como libres o ligadas) están contenidas en  $\rho$  y  $\bar{j}$

$\rightarrow$  desde esta descripción + Fuerza de Lorentz  $\vec{f}_i = q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B})$  se podrían resolver los campos tomando las condiciones de contorno apropiadas PERO es un llo, tedioso y generalmente evitado

$\Rightarrow$  se puede tratar de pasar a una descripción macro, tomando valores medios se pierde exactitud pero se gana en solución problemas reales

E.M. mic

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{e}} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0$$

$$\nabla \times \frac{\bar{\mathbf{b}}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{j}}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{e}} = \eta$$

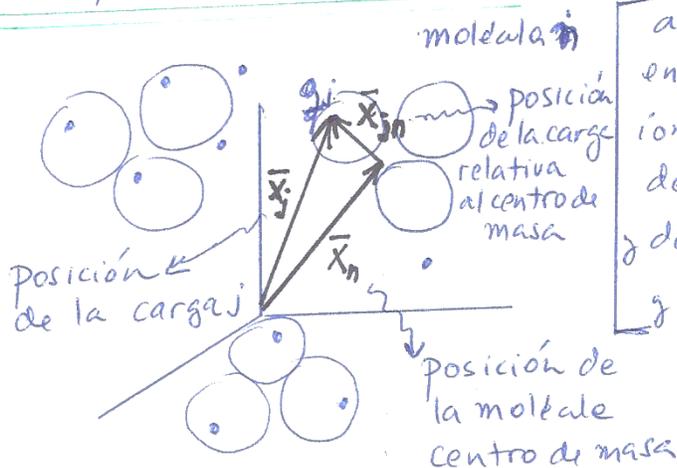
(5)

leer discusión  
Jackson 6.6  
y  
Problema 1.2

hay que tomar los promedios espaciales  $\langle \rangle_V$  de las 10 cantidades y las 6 más que aparecen cuando se analiza la respuesta del material

En resumen se usa el análisis microscópico para derivar las relaciones constitutivas y se resuelven las E.M. macroscópicas

## 2) Multipolos, Polarización $\bar{\mathbf{P}}$



a nivel micro el material es un ensamble de "building blocks" (átomos, iones, moléculas) con cierta densidad de carga  $\eta$  y densidad de corriente  $\mathbf{j}$  y se cumple (5)

$$\Rightarrow \eta(\bar{\mathbf{x}}, t) = \sum_j q_j \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_j) \quad \text{sumatoria sobre todas las cargas } q_j$$

hacemos la distinción  $\eta = \eta_{\text{libres}} + \eta_{\text{ligadas}}$   $\rightarrow$  "molécula"

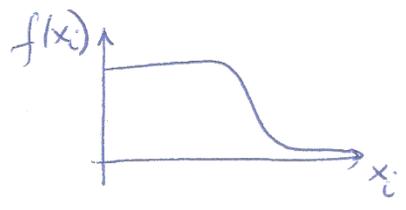
donde

$$\eta_{\text{libres}} = \sum_{j(\text{libre})} q_j \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_j)$$

$$\eta_{\text{ligada}} = \sum_n \eta_n(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad \rightarrow \text{densidad de carga de la molécula } n$$

$$\eta_n(\bar{\mathbf{x}}, t) = \sum_{j(n)} q_j \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_j) \quad (6)$$

En el problema 1.2 van a postular alguna función del tipo



para hacer el  $\langle \rangle_V$ , a  $t$  fijo

$$\langle \eta_n(\bar{x}) \rangle_V = \int dV f(\bar{x}') \eta_n(\bar{x} - \bar{x}') \stackrel{\text{de (6)}}{=} \sum_{j(n)} q_j \int dV f(\bar{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}' - \bar{x}_j)$$

$$\Rightarrow \langle \eta_n(\bar{x}) \rangle_V = \sum_{j(n)} q_j f(\bar{x} - \bar{x}_n - \underbrace{\bar{x}_{jn}}_{\text{Epsilon}})$$

$\bar{x}_n + \bar{x}_{jn}$

$\Rightarrow$  Taylor

$$\langle \eta_n(\bar{x}) \rangle_V = \sum_{j(n)} q_j \left[ f(\bar{x} - \bar{x}_n) - \bar{x}_{jn} \cdot \bar{\nabla} f(\bar{x} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{\alpha\beta} (\bar{x}_{jn})_\alpha (\bar{x}_{jn})_\beta \frac{\partial^2 f(\bar{x} - \bar{x}_n)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

$+ \dots \left. \right]$

podemos identificar que son multipolos puntuales en el centro de masa de la molécula

Es una base para describir los campos que producen esas distribuciones de carga (analogamente, de corrientes)

$$\left[ \begin{array}{ll} q_n = \sum_{j(n)} q_j & \text{carga} \\ \bar{P}_n = \sum_{j(n)} q_j \bar{x}_{jn} & \text{momento dipolar} \\ (Q_n)_{\alpha\beta} = 3 \sum_{j(n)} q_j (x_{jn})_\alpha (x_{jn})_\beta & \text{mom cuadrupolar} \\ \vdots & \end{array} \right.$$

Finalmente me va a quedar

$$(7) \quad \langle \eta \rangle = \rho_{\text{Libres}} - \bar{\nabla} \cdot \bar{P}(\bar{x}, t) + \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Q_{\alpha\beta} + \dots$$

donde  $\rho$ ,  $\bar{P}$ ,  $Q$  son los valores macroscópicos (y usé que  $\langle \eta_{\text{ligados}} \rangle = 0$ )

[en (7) el término cuadrupolar se puede poner como:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{Q}(\vec{x}, t)), \quad \vec{Q} \text{ tensor cuadrupolar}]$$

De manera que si incorporamos (7) en (5) y tomamos  $\langle \rangle_V$  podemos identificar

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} - \nabla \cdot \vec{Q} + \dots} \quad (8)$$

En general en (8) se toma hasta  $\vec{P}$  (aprox. dipolar) con el argumento de que para átomos y moléculas en un medio los multipolos superiores son despreciables. NO es así para metamateriales, donde se ~~hace~~ fabrican nanoestructuras con valores a demanda de esos multipolos

Salvo que se indique lo contrario, vamos a considerar

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad (9)$$

3)  $\vec{M} = 0$

para  $\langle \vec{j} \rangle$  hay que hacer un desarrollo similar a 2)

$$\text{y se obtiene } \langle \vec{j} \rangle = \vec{j}_{\text{libre}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\substack{\text{parte de } \vec{D} \\ \text{en ec. (4)}}} + \underbrace{\nabla \times \vec{M}}_{=0}$$

Consideramos materiales no magnéticos

o sea  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Vamos a considerar materiales no magnéticos salvo que se indique lo contrario. Quedan afuera con esta aproximación la magnetoóptica que relaciona la interacción de la luz con materiales con magnetización y los METAMATERIALES otra vez

4) Intercambio de energía entre campo y polarización

Ahora que sabemos que vamos a usar la polarización  $\vec{P}$  para representar al material veamos porqué es central para la óptica no-lineal en términos de cómo se transfiere energía del campo e-m al material

Vamos a derivar el teorema de Poynting tomando producto escalar en (3) y (4) [E.M] con  $\vec{H}$  y  $\vec{E}$  respectivamente

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (11)$$

tomamos rel. constitutivas

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

uso:

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = 2E \frac{\partial E}{\partial t}$$

Si ahora sustraemos (10) de (11) queda:

$$\frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

usando la identidad

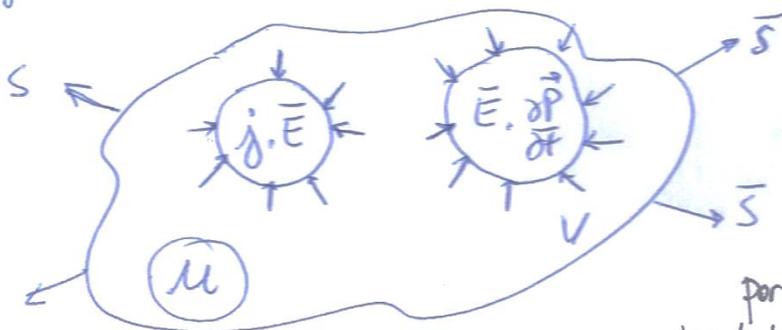
$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

queda

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (12)$$

donde  $\mu = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$  es la densidad de energía e-m

y  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  es el vector de Poynting



Balace de energía esquemático

El rate de cambio de energía electromagnética es resultado del flujo de energía saliente por la superficie más las pérdidas por efecto Joule y polarización.

Para un medio lineal o con respuesta instantánea

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$\chi \equiv \chi(t)$  y no de los instantes anteriores.

equivalente a medio no dispersivo  $\chi \neq \chi(\omega)$

(6)

La expresión (12) se transforma en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$j \mu = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

$\vec{D}$  "absorbe" los términos extra

O sea que sólo los términos **no lineales** o **dispersivos** permanecen en  $\vec{P}$

La clase que viene empezamos a estudiar  $\vec{P}$ .

Vamos a empezar viendo la respuesta lineal dieléctrica estudiando  $\vec{P}$  momento dipolar por unidad de volumen

en componentes

$$\vec{P}_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^{(1)} \vec{E}_\beta(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$\downarrow$   
 tensor de susceptibilidad lineal dieléctrica

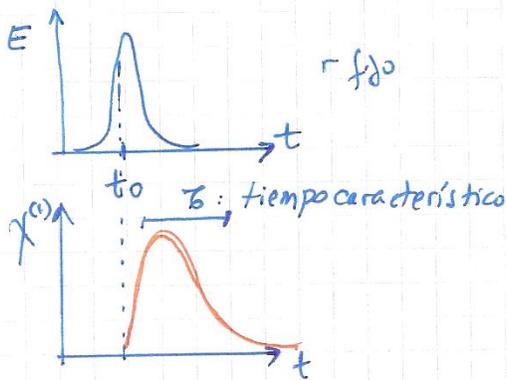
si ponemos explícitamente las dependencias

$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}, t)$$

Pero el sistema material requiere un tiempo para responder, es decir que  $\chi$  dependerá de los instantes anteriores y de los lugares vecinos

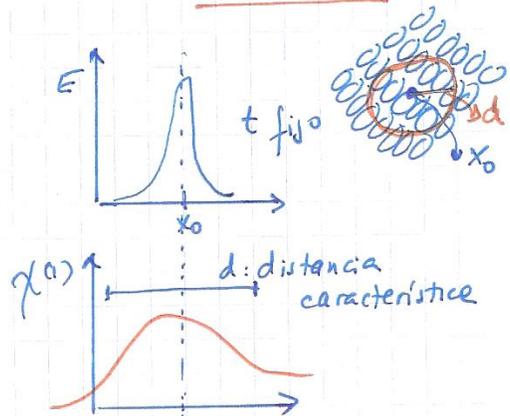
$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$$

si la respuesta no es instantánea



Esta es la que llamamos dispersión temporal  
 o "dispersión" a secas

si no es local



Esta es la que llamamos dispersión espacial  
 (generalmente despreciada)

Consideramos homogeneidad en tiempo y espacio  $\Rightarrow$  la dependencia con  $t'$  y  $r'$  es  $(t-t')$  ;  $(\vec{r}-\vec{r}')$

$$\Rightarrow P_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\beta} \epsilon_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') E_{\beta}(\vec{r}', t') d^3r' dt' \quad (2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{causalidad}} \chi_{\alpha\beta}^{(1)} = 0 \text{ si } t' > t$

Por la invariante traslacional en tiempo y espacio que propusimos, podemos usar la expansión en ondas planas via la transformada de Fourier (T.F.):

$$E_{\beta}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d\vec{k} E_{\beta}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (3)$$

Y lo mismo pasa con todos los otros campos y tensores. De ahora en más, vamos a considerar despreciable la no-localidad, es decir que no hay dispersión espacial ( $k \approx 0$  ya que la long. de onda de la luz es mucho mayor que las distancias características en materiales)

$$\Rightarrow E_{\beta}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E_{\beta}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (4)$$

$$P_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega P_{\alpha}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (5)$$

recordemos una propiedad de las T.F para la convolución

si definimos convolución entre  $f$  y  $g$ :  $[f \otimes g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$

$\Rightarrow$  la T.F( $f \otimes g$ ) = T.F( $f$ )  $\cdot$  T.F( $g$ )

de (2) [ $\gamma k_{\alpha} \approx 0$ ] tenemos  $P_{\alpha}(\vec{r}, t) = 2\pi \epsilon_0 \sum_{\beta} (\chi_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta})(\vec{r}, t)$

$\Rightarrow$  haciendo T.F

$$P_{\alpha}(\vec{r}, \omega) = 2\pi \epsilon_0 \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\vec{r}, \omega) \cdot E_{\beta}(\vec{r}, \omega) \quad (6)$$

de (6) y (5)  
 donde  
 ↓  
 de (3) y por  
 prop. de convolución de T.F

$$P_{\alpha}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}, \omega) E_{\beta}(\vec{r}, \omega) \quad (7)$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$E_{\beta}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt E_{\beta}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} \quad (9)$$

y podemos ponerlo en términos del campo de desplazamiento  $\vec{D}$

$$D_{\alpha}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \omega) E_{\beta}(\vec{r}, \omega) \quad (10)$$

donde  
 $(D = \epsilon_0 E + P)$

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}, \omega) \quad (11)$$

es el tensor dieléctrico del medio

(5) y (8) son nuestras definiciones de T.F y anti-T.F. Notar que como los campos son reales, los T.F son complejos. (No voy a hacer distinción de notación entre complejo y real). Lo mismo sucede con los tensores

### Dependencia en frecuencia del tensor dieléctrico

Recordemos la ecuación de balance de energía de la clase pasada

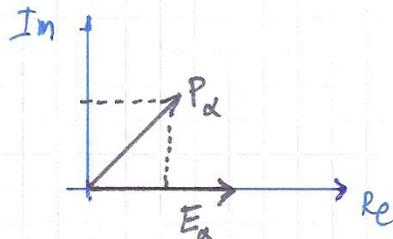
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (12)$$

Habíamos dicho que el campo e-m va a transferir energía al medio a través de la  $\vec{P}$  no lineal. si el medio es dispersivo, además lo va a hacer cuando  $\vec{P}$  es lineal. Veamos eso

Analizamos de (12) el término de intercambio <sup>de energía</sup> del campo e-m con el medio. Tomamos el valor medio temporal  $\langle \rangle$

$$\langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \rangle \quad (13)$$

vamos a ver que la relación de fase entre  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  juega un rol importante en determinar la dirección del flujo de energía (si hay alguno) a partir de mirar (12).



el desfase tiene que ver con la respuesta no instantánea

Por ahora consideremos campos puramente armónicos con frecuencia  $\omega$  (monocromáticos). Pero va a cobrar importancia cuando tengamos un medio (no lineal) que habilite tener otras frecuencias generadas.

Si tenemos 2 campos monocromáticos (reales)

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{f}(\vec{r})}_{\text{real}} e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

donde c.c. significa complejo conjugado

$$\vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{g}(\vec{r})}_{\text{complejo}} e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

Se puede demostrar (Problema 1.4) que

$$\langle \vec{g}(\vec{r}, t) \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{f}(\vec{r})^* \right] \quad (14)$$

donde \* es el conjugado complejo

Escribimos 
$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{P}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (15)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(1)}(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

↓ escalar para simplificar

donde  $\bar{E}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} E(\bar{r}) e^{-i\omega t} + c.c.$

y  $\chi^{(1)}(\bar{r}, \omega) = \chi_1^{(1)}(\bar{r}, \omega) + i \chi_2^{(1)}(\bar{r}, \omega)$  (16)

Susceptibilidad compleja  
(recordar que  $\chi^{(1)}(\bar{r}, t)$  es real)

⇒ (13) no va a ser simplemente una multiplicación de amplitudes complejas, hay que calcularlo con cuidado

de (15)  $\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}(\bar{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(1)}(\bar{r}, \omega) \bar{E}(\bar{r}) (-i\omega) e^{-i\omega t} + c.c.$

y usando (14) ⇒

(17)  $\langle \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [-i\omega \epsilon_0 \chi^{(1)}(\bar{r}, \omega) \bar{E}(\bar{r}) \cdot E^*(\bar{r})]$   
 $= \frac{1}{2} \text{Re} [-i\omega \epsilon_0 \chi^{(1)}(\bar{r}, \omega) |\bar{E}(\bar{r})|^2] = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \chi_2^{(1)}(\bar{r}, \omega) |\bar{E}(\bar{r})|^2$   
 de (16)  
 $-i\chi^{(1)} = -i\chi_1 + \chi_2$

Es decir que la energía e-m se absorbe en el medio si  $\chi_2^{(1)} \neq 0$

Si  $\chi^{(1)}$  es puramente real, eso corresponde a una polarización exactamente en fase con el campo (no dispersión en tiempo, respuesta instantánea) y el valor medio de la transferencia de energía del campo al medio es CERO.

$\chi^{(1)}$  se considera prácticamente real para muchos medios no lineales típicamente "transparentes" o sin pérdidas. Pero veremos en la próxima sección que eso no puede ser verdadero estrictamente.