

Susceptibilidad no lineal

Vamos a ver la respuesta no lineal de un material. Para eso recuerden que la primera clase hablamos puesto:

$$\bar{P}(t) = \epsilon \chi^{(1)} \bar{E}(t) + \epsilon \chi^{(2)} \bar{E}^2(t) + \epsilon \chi^{(3)} \bar{E}^3 + \dots$$

pero que solo vale para un material isotropo, sin perdidas y sin dispersión. Escribamos ahora la polarización y χ^{NL} para el caso general

Si tenemos un campo eléctrico que es la suma discreta de un número de campos monocromáticos a frecuencias ω_n , escribimos:

$$(1) \quad \bar{E}(F, t) = \sum_n \bar{E}_n(F, t) \quad \text{donde } \bar{E} \text{ y } E_n \text{ son REALES}$$

$$(2) \quad \bar{E}_n(F, t) = \bar{E}_n(F) e^{-i\omega_n t} + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \bar{E}_n(F) e^{-i\omega_n t} + \bar{E}_n^*(F) e^{i\omega_n t} \right\}$$

\Downarrow $\begin{matrix} \bar{E}(\omega_n) \\ \text{complejo} \end{matrix}$ $\bar{E}_n(F) = A_n e^{i(k_n \cdot F)}$ $\bar{E}(-\omega_n)$

como \bar{E} es real $\bar{E}(\omega_n) = E^*(\omega_n)$ y $A(\omega_n) = A^*(\omega_n)$

⇒ si absorbo el $\frac{1}{2}$ en A_n

podemos escribir (1) como

$$(4) \quad \boxed{\bar{E}(F, t) = \sum_{\pm \omega_n} \bar{E}_n(F, t) = \sum_{\pm \omega_n} \bar{E}(\omega_n) e^{-i\omega_n t}}$$

donde \bar{E}_n es el campo de frecuencia ω_n y vector de onda k_n y la suma se hace sobre las frecuencias positivas y negativas

HOJA N

FECHA

En realidad esto es lo mismo que haremos para el caso lineal pero acá es importante computar la suma sobre las $w + \gamma$.

En el caso lineal se puede trabajar con una frecuencia (ω') y sacar la parte real al final. Debido a las no linealidades hay que operar con γ porque se mezclan independientemente.

Análogamente al caso lineal vamos a trabajar con la χ^{NL} en el espacio de frecuencias

Empecemos con la susceptibilidad de 2do orden $\chi_{ijk}^{(2)}$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m, w_n, w_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m; w_n, w_m)$$

↙
esto es notación para enfatizar
que no son argumentos independientes

la polarización de 2do orden es: (no voy a usar k explícito, está implícito)

$$(5) P_i^{(2)}(w_n + w_m) = \epsilon \sum_{jk} \sum_{\substack{\{ \pm w_n \} \\ \{ \pm w_m \}}} \chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m; w_n, w_m) E_j(w_n) E_k(w_m)$$

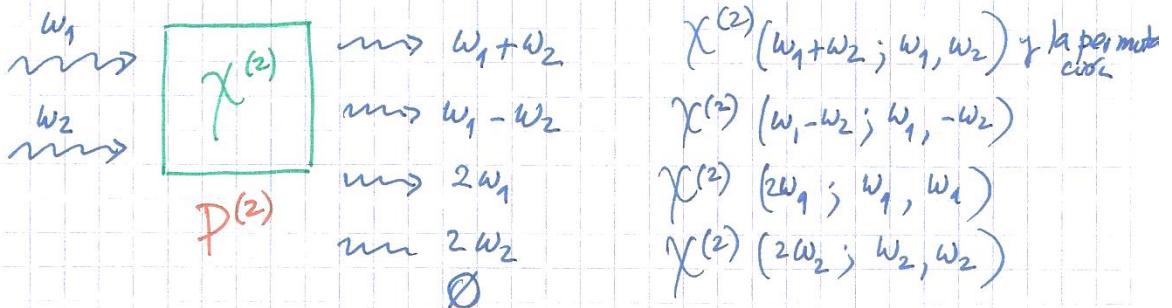
$$\begin{matrix} w_n & w_m \\ w_m & w_n \end{matrix} \boxed{\chi^{(2)}} \quad \begin{matrix} w_n \\ w_n + w_m \end{matrix}$$

Esto significa que 2 ondas planas de $\pm w_n, \pm w_m$ se mezclan en el material para producir una onda $w_n + w_m$ (con su signo)

Cuando se consideran contribuciones de la $\chi^{(2)}$ al momento dipolar por unidad de volumen (5), hay términos de "auto interacción" y términos de "interacción cruzada".

Veamos que buscar en la polarización de 2^{da} orden $P_i^{(2)}(w_n + w_m)$
(saco el subíndice i)

Supongamos que entra al material 2 frecuencias w_1 y w_2



Depende qué frecuencia voy a buscar en P
es el término de χ que miro

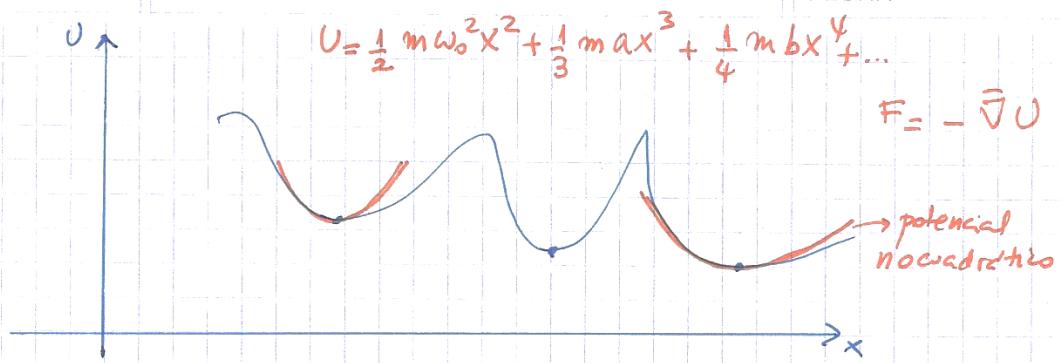
Nota: acá me comí (omiti) \vec{k} en todos lados pero recuerden que cada w_n tiene asociado su k_n , que se suman, se restan, se duplican vectorialmente

Análogamente la $\chi^{(3)}$ y $P^{(3)}$ se escribe:

$$P_i^{(3)}(w_n + w_m + w_e) = \epsilon_0 \sum_{ijk} \sum_{\{nme\}} \chi_{ijk0}^{(3)} (w_n + w_m + w_e; w_n, w_m, w_e) \cdot E_j(w_n) \cdot E_k(w_m) \cdot E_0(w_e) \quad (6)$$

Modelo del oscilador anarmónico

Vamos a hacer un modelo simple para ver qué forma tiene χ^{NL}
Recuerden la ec de la clase 3, ec (24) donde planteamos un
oscilador armónico con una fuerza restauradora lineal. Ahora vamos
a extender ese aproximación zero con fuerzas restauradoras no lineales



Vamos a plantear algo similar a nuestros modelos Lorentziano (ec(2.24)) con un movimiento unidimensional para simplificar \Rightarrow la ecación a resolver es:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + a x^2 + b x^3 = \frac{e}{m} E(t) \quad (7)$$

\downarrow
nos quedamos con la fuerza restitutiva hasta
3er orden (cúbica) \therefore potencial U hasta orden 4.

Luego veremos si la simetría del cristal en particular permite términos pares o impares en el potencial.

Supongamos que tenemos un campo incidente (real) que es superposición de campos a frecuencia ω_1 y ω_2

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.} \quad (8)$$

La ecación (7) no se puede resolver en forma simple (de hecho en algunas condiciones puede tener soluciones catácticas) y las soluciones analíticas exactas pueden ser (cuando posibles) complicadas. Sin embargo como el término anarmónico es muy pequeño respecto del armónico, los efectos también van a ser pequeños sobre x en relación a su dependencia lineal sobre el campo incidente (recuerden solución 3.26)

de manera que buscamos una solución del tipo

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \dots \quad (9)$$

Sabemos que
 $x^{(1)} \sim E$
 \downarrow
 $\left. \begin{array}{c} \sim E^2 \\ \sim E^3 \end{array} \right\}$
 $x^i \sim E^{(i)}$

⇒ poniendo (9) en (7) e igualando potencias iguales de E queda

Lorentz ↲ $\ddot{x}^{(1)} + \gamma \dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -e E(t)/m \quad (10a)$

$$\ddot{x}^{(2)} + \gamma \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + a[x^{(1)}]^2 = 0 \quad (10b)$$

$$\ddot{x}^{(3)} + \gamma \dot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} + b(x^{(1)})^3 + 2a x^{(1)} x^{(2)} = 0 \quad (10c)$$

(ignoramos órdenes superiores)

La solución de (10a) ya la obtuvimos en la clase 2 y es:

$$\boxed{\ddot{x}^{(1)}(\omega_j) = -\frac{e}{m} \frac{E_i}{D(\omega_j)}} \quad j = 1, 2 \quad (11)$$

donde
 $D(\omega_j) = \omega_0^2 - \omega_j^2 - i\omega_j \gamma$ (12)

Ahora en la ec (10b) podemos pensar al último término como un forzante y lo pasamos al miembro derecho. Si elevamos al cuadrado la expresión (11) vamos a tener que contiene términos $\pm 2\omega_1, \pm 2\omega_2, \pm (\omega_1 + \omega_2), \pm (\omega_1 - \omega_2)$ y 0. Por ejemplo para la frecuencia $2\omega_1$ queda:

$$\ddot{x}^{(2)} + \gamma \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{a(eE_1/m)^2 e^{-2i\omega_1 t}}{D^2(\omega_1)} \quad (13)$$

Como las contribuciones de 2do orden son pequeñas perturbaciones del movimiento lineal \Rightarrow las diferentes componentes $\omega \neq$ frecuencias se consideran independientes entre sí. \Rightarrow el desplazamiento total será una superposición de los desplazamientos $\omega \neq$ frecuencias. En experimentos reales, entran a tallar otros efectos que van a hacer que un proceso de mezcla no lineal domine frente a otros \therefore phase matching que veremos más adelante.

para (13) buscamos la solución $X^{(2)}(t) = X^{(2)}(2\omega_1) e^{-2i\omega_1 t}$

Reemplazando queda

$$X^{(2)}(2\omega_1) = \frac{-a(e/m)^2 E_1^2}{D(2\omega_1) D^2(\omega_1)} \quad (14)$$

Análogamente podemos encontrar las expresiones para las otras frecuencias:

$$X^{(2)}(2\omega_2) = \frac{-a(e/m)^2 E_2^2}{D(2\omega_2) D^2(\omega_2)} \quad (15a)$$

$$X^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{-2a(e/m)^2 E_1 E_2}{D(\omega_1 + \omega_2) D(\omega_1) D(\omega_2)} \quad (15b)$$

$$X^{(2)}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{-2a(e/m)^2 E_1 E_2^*}{D(\omega_1 - \omega_2) D(\omega_1) D(-\omega_2)} \quad (15c)$$

$$X^{(2)}(0) = \frac{-2a(epm)^2 E_1 E_1^*}{D(0) D(\omega_1) D(-\omega_1)} + \frac{-2a(e/m)^2 E_2 E_2^*}{D(0) D(\omega_2) D(-\omega_2)} \quad (15d)$$

en (15) la estructura es similar en todos los casos, x ej en (15b) la frecuencia ω_1 se mezcla con $\omega_2 \Rightarrow$ produce $\omega_1 + \omega_2$: es una mezcla de 3 ondas. Y la expresión es resonante para las 3 ondas, cualquiera de ellas en resonancia con el oscilador ω_0 , produce una intensificación del efecto no lineal.

HOJA 14

FECHA

Ahora vamos a escribir la polarización y la susceptibilidad como hicimos para el caso lineal, simplemente multiplicando por $\epsilon \cdot n$

Por ejemplo

$$P^{(2)}(2\omega_1) = -en X^{(2)}(2\omega_1) \quad (16)$$

$$\Rightarrow \chi^{(2)}(2\omega_1; \omega_1, \omega_1) = \frac{an(e^3/m^2)}{\epsilon_0 D(2\omega_1) D^2(\omega_1)} \quad (17)$$

pero si recuerdan de la clase 2 (ec. 28) la expresión para $\chi^{(1)}$ es:

$$(m=m_e) \quad \chi^{(1)}(\omega) = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{D(\omega)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi^{(2)}(2\omega_1; \omega_1, \omega_1) = \frac{\epsilon_0^2 m a}{n^2 e^3} \chi^{(1)}(2\omega_1) [\chi^{(1)}(\omega_1)]^2} \quad (18)$$

y análogamente se expresan todas las otras

Algo similar pasa para los términos de 3er orden, que ustedes van a escribir explícitamente en los Problemas.

En el caso de 3er orden $X^{(3)}$ tenemos a tener mezclados de 4 ondes

En loc podemos ver

que para $X^{(3)}$ el forzado va a tener términos

$$b (X^{(1)})^3$$

$$2a X^{(1)} X^{(2)}$$

todo lleva a contribuciones de mezclas múltiples

§

pero este mezclado

tiene 2 tipos de contribuciones

dadas por la molinectidad a

y por la b

por ejemplo, la expresión para $X^{(3)}$ a la frecuencia $2\omega_1 - \omega_2$ tenemos:

$$(19) \quad X^{(3)}(2\omega_1 - \omega_2) = -\frac{e^2}{4m^3} \frac{\left[\frac{3}{2}b - 2a^2 \right]}{D(2\omega_1 - \omega_2) D^2(\omega_1) D(-\omega_2)} \cdot \left[\frac{D(\omega_1 - \omega_2)}{D(\omega_1)} - \frac{a^2}{D(\omega_1)} \right] \cdot E_1^2 E_2^*$$

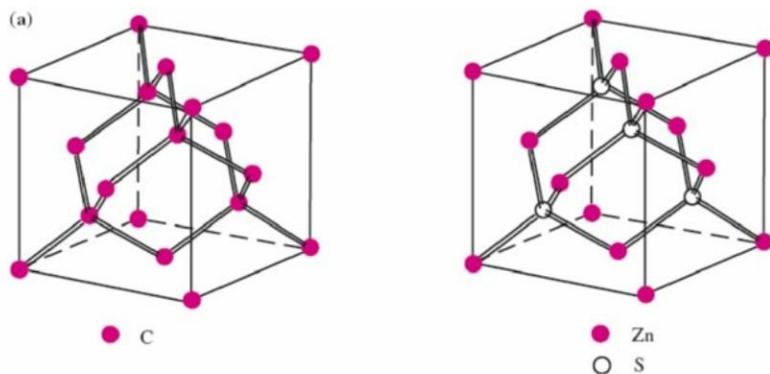
En la solución para $X^{(3)}$ participan los procesos "tipo a" y los procesos "tipo b"

Supongamos primero que el término de potencial cúbico $\frac{1}{3}max^3 = 0$, es decir que el material es centrosimétrico, para el cual $U(x) = U(-x) \Rightarrow$ de (14) y (15) $X^{(2)} = 0$ para todas las mezclas de 3 ondas y $\Rightarrow X^{(3)} = 0$

Ejemplos: Estructura diamante (centrosimétrica)
Estructura zincblende (no-centrosimétrico)

?

Ambas fcc
cúbicas
diferentes bases

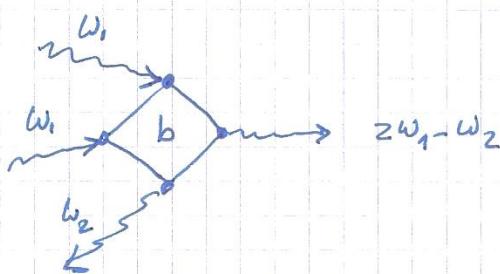


CS ← Ejemplos de Diamante: C, Si, Ge, S Ambas cúbicas, ambos no son
NCS ← Ejemplos de Zincblende: ZnS, GaAs birrefringente

Volviendo a $X^{(3)}$. ¿Qué sucede para un material C.S? $a=0 \Rightarrow$
tenemos una interacción directa entre 4 ondas y tenemos en (19) los
términos resonantes para: 2 veces ω_1 , 1 vez $-\omega_2$ y 1 vez $(2\omega_1 - \omega_2)$

Este proceso de "tipo b", o sea cuártico en el potencial podemos representar esquemáticamente así:

(20)



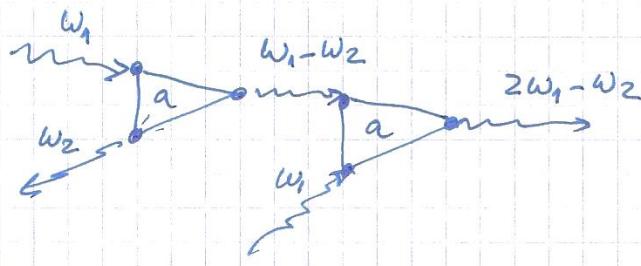
$$\frac{1}{4} m b \times 4 \text{ lo}$$

(convenio: positivas van de izquierda a derecha; negativas de derecha a izquierda)

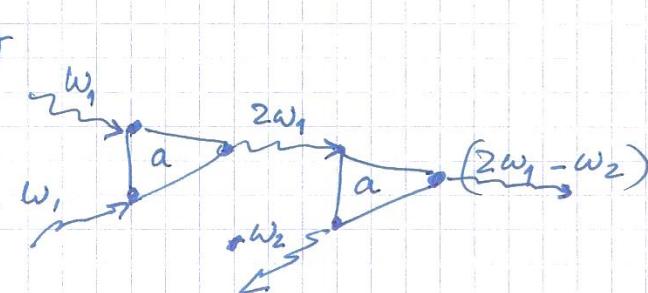
mezcla directa de 4 ondas

pero si el material es N.C.S., los procesos tipo b y tipo a están presentes \Rightarrow al gráfico (20) se le agregan los procesos que produce la mezcla de 3 ondas \therefore una interacción efectiva de 4 ondas va a provenir de una sucesión de 2 interacciones de mezcla de 3 ondas. Así:

(21)



todas estas ondas tienen denominadores resonantes en (19)



Todas las mezclas de 4 ondas producidas en $X^{(3)}$ tendrán contribuciones de este tipo.

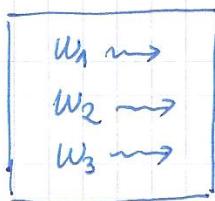
la polarización $P^{(3)}(2\omega_1 - \omega_2) = -en X^{(3)}(2\omega_1 - \omega_2)$ (22)

Algunas nociones de simetrías en la χ^{NL}

Volvamos a mirar la característica tensorial de χ^{NL} y trataremos de analizar algunas simetrías formales que nos van a hacer la vida más fácil a la hora de calcular todos los $\tilde{P}^{NL}(w_i)$ que se generan dentro del material.

\Rightarrow las polarizaciones están interrelacionadas una influencia a las otras

Supongamos que tenemos 3 ondas en el material no lineal



$$w_1, w_2 \text{ o } w_3 = w_1 + w_2$$

\Rightarrow

$$P_i^{(2)}(w_n + w_m) = \epsilon \sum_{jk} \sum_{\{n,m\}} \chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m; w_3, w_m) E_j(w_n) E_k(w_m) \quad (22)$$

de las permutaciones, $\chi \not\propto$: $w_1 + w_2$ y $w_2 + w_1$ dan lo mismo \Rightarrow que se vuelve factor 2

\Rightarrow para conocer todos los $P(w_i)$ necesito:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(w_3; w_1, w_2) \quad \chi_{ijk}^{(2)}(w_3; w_2, w_1) \quad \leftarrow P^{(2)}(w_3)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(w_2; w_3, -w_1) \quad \chi_{ijk}^{(2)}(w_2; -w_1, w_3) \quad \leftarrow P^{(2)}(w_2)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(w_1; w_3, -w_2) \quad \chi_{ijk}^{(2)}(w_1; -w_2, w_3) \quad \leftarrow P^{(2)}(w_3)$$

permuyendo $ijk = \overleftrightarrow{x} \overleftrightarrow{y} \overleftrightarrow{z}$ tengo 27 componentes

+ los otros 6 tensores que tienen las free negativas

$$\Downarrow 12 \cdot 27 = 324 \text{ números diferentes!}$$

\Rightarrow Vamos a ver algunas simetrías que limitan esta cantidad de valores independientes

- Campos reales Recordar que si bien uno trabaja con $P(w_n)$, todos los campos son reales $\Rightarrow \bar{P}(F, t) \Rightarrow P(-w_n, -w_m) = P^*(w_n + w_m)$
 $E(-w_n) = E^*(w_n)$

$$\Rightarrow \chi_{ijk}^{(2)}(-w_n - w_m; -w_n, -w_m) = \chi_{cjk}^{(2)*}(w_n + w_m; w_n, w_m)$$

- Simetría intrínseca

de (22) vemos que los índices $j \leq n \leq m$ son índices mudos \Rightarrow podemos intercambiarlos sin afectar el resultado $n \leftrightarrow m ; j \leftrightarrow k$

$$\Rightarrow \chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m; w_n, w_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(w_n + w_m; w_m, w_n)$$

\downarrow permutación "intrínseca"

es decir que si intercambiamos los campos incidentes (no importa cuel es el primero y cual el segundo) dentro de (22) \Rightarrow intercambio los $j \leq k$

- Simetría para medios sin pérdidas

a) Si no hay pérdidas $\Rightarrow \chi_{ijk}^{(2)}(w_n + w_m; w_n, w_m)$ es real

b) Simetría total de permutación \rightarrow todas las frecuencias pueden ser intercambiadas si los correspondientes índices cartesianos también se intercambian

$$\Rightarrow x. \text{ ejemplo } \chi_{ijk}^{(2)}(w_3 = w_1 + w_2; w_1, w_2) = \chi_{jki}^{(2)}(w_1 = w_3 - w_2; -w_2, w_3)$$

\downarrow

análogamente las demás

\uparrow permuto el índice,
permuto la frecuencia y pongo
con su signo los valores

(esto lo decimos sin demostración, pueden consultar sección 1.5.4 del Bojd)

• Simetría de Kleinman

Si las frecuencias involucradas están lejos de las resonancias \Rightarrow se puede aproximar a un medio sin pérdidas y se cumplen las simetrías de permutación anteriores. Pero además como a esas frecuencias el medio es prácticamente no-dispersivo, no hace falta permutar las frecuencias

$$\Rightarrow \chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{jki}^{(2)} = \chi_{kij}^{(2)} = \chi_{ikj}^{(2)} = \chi_{jik}^{(2)} = \chi_{kji}^{(2)}$$

en $(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 ; \omega_1, \omega_2)$

↓ Esto se llama la condición de
Simetría de Kleinman

Notación contraída

En los primeros experimentos de D.N.L se usaba "d" en lugar de χ y actualmente se sigue usando para materiales donde vale Kleinman.

Tiene unidades $\frac{m}{V}$, que usualmente se dan en pm/V

definimos

$$d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)}$$

se suprimen los argumentos si vale Kleinman

$$\Rightarrow P_i^{(2)}(\omega_n + \omega_m) = \epsilon_0 \sum_{jk} \sum_{\{n,m\}} 2 d_{ijk} E_j(\omega_n) E_j(\omega_m) \quad (23)$$

es simétrico respecto de jk para
la condición de Kleinman

y también es válido siempre para STG*
(\times las frecuencias n y m son iguales)

* Segunda armónica

\Rightarrow se contraen los índices $j \& k$ a $\rightarrow l$ $l = 1 \dots 6$

la matriz d_{il} tiene 18 elementos, es una matriz 3×6

X. ejemplo para STG (23) es:

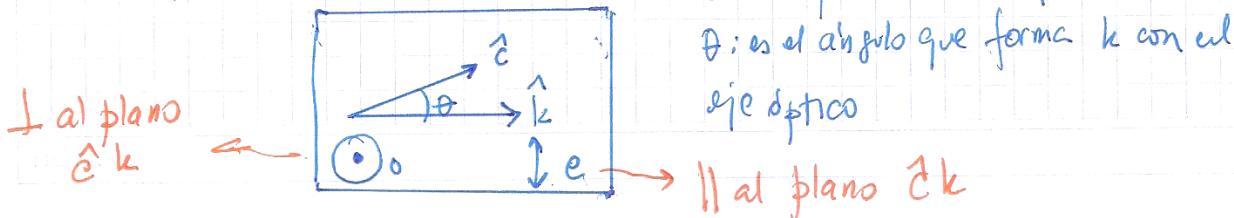
$$\begin{bmatrix} P_x^{(2)} \\ P_y^{(2)} \\ P_z^{(2)} \end{bmatrix} = 2 E_0 \begin{bmatrix} d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{31} & & & & & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2 E_y(\omega) E_z(\omega) \\ 2 E_x(\omega) E_z(\omega) \\ 2 E_x(\omega) E_y(\omega) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Acl se ve cómo si xq. el campo incidente es transversal \rightarrow esto no necesariamente significa que la polarizació N.L. $P^{(2)}(2w)$ sea transversal.
El carácter tensorial de \vec{d} mezcla los campos

Valor efectivo de \vec{d} - d_{eff}

Para una determinada situación, donde estén definidas la dirección de propagación y de polarización \Rightarrow es posible expresar la P^{NL} como una "relación escalar", y encontrar un " d_{eff} "

Supongamos que los campos incidentes son linealmente polarizados y que tenemos un cristal Uniaxial \Rightarrow podemos escribir a la onda en la base de los campos "ordinario" y "extraordinario", e y o que tienen direcciones definidas en términos de los ángulos polares θ y ϕ



θ : es el ángulo que forma k con el eje óptico

\hat{k} al plano e

\hat{k} al plano e

la multiplicación de matrices (24) se puede escribir de manera que las magnitudes de las ondas ϵ y σ salgan factor común de la columna de los campos incidentes \Rightarrow esa factorización deja a (24) como la multiplicación de la matriz $d \times$ una columna que solo depende de factores geométricos (θ, ϕ) $\Rightarrow d \times$ factores geométricos es $d_{\text{eff},i}$ para c/u de los componentes cartesianas $P_i^{(2)}$

$$P_i^{(2)}(2\omega) = 2\epsilon_0 d_{\text{eff},i}(\theta, \phi) E^2(\omega) \quad (25)$$

o sea que el módulo se irá a poder escribir como

$$P^{(2)}(2\omega) = 2\epsilon_0 d_{\text{eff}} E^2(\omega) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P^{(2)}(2\omega) &= |\bar{P}^{(2)}(2\omega)| \\ E(\omega) &= |\bar{E}(\omega)| \end{aligned}$$

d_{eff} está tabulado para dirección de propagación arbitraria y todos los grupos puntuales

Nota: recordar que todo esto es para condiciones lejos de resonancia
(sin dispersión, Kleinman)

Para P_{\perp}^{NL} (perpendicular a la dir. de propagación) se puede utilizar el hecho de que P_{\perp}^{NL} se acoplará con algunos de los modos propagantes ϵ y σ
 \Rightarrow (25) se proyecta en ϵ y $\sigma \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} P_{\sigma}^{(2)}(2\omega) &= 2\epsilon_0 d_{\text{eff},\sigma}(\theta, \phi) E^2(\omega) \\ P_{\epsilon}^{(2)}(2\omega) &= 2\epsilon_0 d_{\text{eff},\epsilon}(\theta, \phi) E^2(\omega) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} d_{\text{eff}} \\ \text{se saca de tablas} \end{matrix}$$

TABLE 3.3 d_{eff} for Crystals When Kleinman's Symmetry is Valid

Point Group	Interactions with Two o-Waves and One e-Wave		Interactions with Two e-Waves and One o-Wave
	XY	YZ	
$\bar{4}2m$	$d_{36} \sin \theta \sin 2\phi$		$d_{36} \sin 2\theta \cos 2\phi$
3m	$d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$		$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$
4, 4mm, 6, 6mm	$d_{15} \sin \theta$		0
$\bar{4}$	$-(d_{14} \sin 2\phi + d_{15} \cos 2\phi) \sin \theta$		$(d_{14} \cos 2\phi - d_{15} \sin 2\phi) \sin 2\theta$
3	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta$ + $d_{15} \sin \theta$		$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta$
32	$d_{11} \cos \theta \cos 3\phi$		$d_{11} \cos^2 \theta \sin 3\phi$
$\bar{6}$	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta$		$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta$
$\bar{6}m2$	$-d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$		$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$
422, 622	0		0
2	XY $d_{23} \cos \phi$ YZ $d_{21} \cos \theta$ XZ 0		$d_{25} \sin 2\phi$ $d_{25} \sin 2\theta$ $d_{25} \sin 2\theta + d_{21} \cos^2 \theta + d_{23} \sin^2 \phi$
m	XY $d_{13} \sin \phi$ YZ $d_{15} \sin \theta$ XZ $-d_{12} \cos \theta + d_{24} \sin \theta$		$d_{15} \sin^2 \phi + d_{24} \cos^2 \phi$ $d_{12} \cos^2 \theta + d_{13} \sin^2 \theta$ $d_{12} \sin 2\theta$
mm2	XY 0 YZ $-d_{15} \sin \theta$ XZ $-d_{24} \sin \theta$		$-d_{15} \sin^2 \phi - d_{24} \cos^2 \phi$ 0 0
222	XY 0 YZ 0 XZ 0		$-d_{14} \sin 2\phi$ $-d_{14} \sin 2\theta$ $d_{14} \sin 2\theta$
Centrosymmetric	0		0

Tabla sacada del Powers, sección 3.3.7