

Ecuación de onda para un medio no lineal

Hasta ahora vimos la respuesta de un material no lineal al estímulo de un campo externo. La polarización generada en el material, que contiene frecuencias nuevas, ahora va a actuar como fuente de las nuevas componentes del campo e.m. Así que resolvamos las E.M. para ver esos efectos

Ahora la polarización la podemos dividir como:

$$\bar{P} = \bar{P}^L + \bar{P}^{NL} \quad (5.1)$$

Escribo los campos en la base de ondas planas monocromáticas (Fourier) y también todas las cantidades que dependan del tiempo

$$E_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad E_\alpha(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Las E.M. Si no hay cargas ni corrientes libres y el material es no magnético ($\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$) quedan:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0; \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0; \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \frac{1}{\mu_0} \bar{\nabla} \times \bar{B} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (5.2 \text{ abcd})$$

y además

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}^L + \bar{P}^{NL} = \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{E}(\omega) \bar{E} + \bar{P}^{NL} \quad (5.3)$$

\Rightarrow de (5.2a) y (5.3)

$$\boxed{\bar{\nabla} \cdot [\overset{\leftrightarrow}{E}(\omega) \cdot \bar{E}(\vec{r}, \omega)] = - \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\nabla} \cdot \bar{P}^{NL}(\vec{r}, \omega)} \quad (5.4)$$

de (5.2)
cja)

$$\nabla^2 \bar{E}(\vec{r}, \omega) - \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}(\vec{r}, \omega)) = \frac{1}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{E}(\omega) \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}(\vec{r}, \omega)}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}^{NL}(\vec{r}, \omega)}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

Considerando la forma de los campos $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$, (5.5) queda:

$$\nabla^2 \bar{E}(F, \omega) - \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}(F, \omega)) + \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega) \cdot \bar{E}(r, \omega) = -\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} P^{NL}(F, \omega) \quad (5.6)$$

donde estamos ignorando la dependencia con k , el tensor $\bar{E}(\omega)$ lo consideramos diagonal (escrito en los ejes principales).

Claramente la polarización no lineal en (5.6) a frecuencia ω va a ser

la fuente de la radiación a esa frecuencia. (5.6) es la ec. de onda no lineal

Notar que para el caso lineal tomábamos $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ (ondas transversales)

y la ec. (5.6) no contiene el segundo término. En el

Caso no lineal, eso no es cierto en general, ni siquiera para materiales

isotropos. En algunos casos se pude $\nabla \cdot \bar{E} \neq 0$ xq si E es

una onda transversal o si la birefringencia es débil de manera

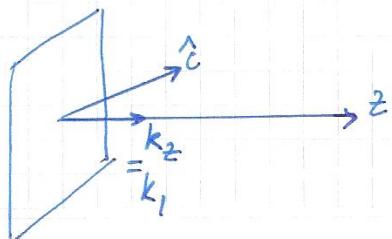
que D y E sean "casi" paralelos, es decir $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ para ondas

ordinarias y $\nabla \cdot \bar{E} \neq 0$ para extraordinarias. En principio nosotros

no vamos a tirar ese término y vamos a tratar de resolver algunas situaciones sencillas.

Generación de Segunda armónica (SHG), análisis perturbativo

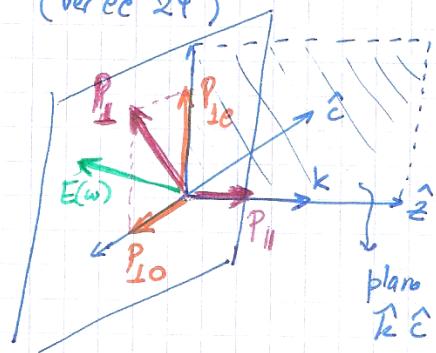
En este caso vamos a suponer que la SHG es muy débil \Rightarrow vamos a ignorar el "agotamiento" (depletion) del campo incidente.



Supongamos un campo incidente propagando en \hat{z}

Y si vimos la clase pasada que la polarización no lineal $\bar{P}_i^{(2)}$ va a tener componentes \parallel y \perp a la dirección de propagación \hat{z} (ver ec 24)
 \Rightarrow podemos poner \bar{P}_{NL}^i como:

$$(5.7) \quad \bar{P}_{NL}^i = \hat{z} P_{\parallel i}^{NL} + P_{\perp i}^{NL}$$



Si la onda incidente $E(\omega)$ es una onda plana \Rightarrow la amplitud del campo del SH $E(2\omega)$ será sólo dependiente de z \Rightarrow

$$\bar{E}(z, 2\omega) = \hat{z} E_{\parallel}(z, 2\omega) + \bar{E}_{\perp}(z, 2\omega) \quad (\text{pongo explícitamente dep en } z)$$

Usando las def de los operadores es fácil demostrar que en este caso

$$\nabla^2 \bar{E} - \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) = \frac{\partial^2 \bar{E}_{\perp}}{\partial z^2} \quad (5.8)$$

\Rightarrow Insertando en la ec. de onda (5.6) queda (sacar las dif pendencias para simplificar)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{E}_{\perp} + \frac{(2\omega)^2}{c^2} \epsilon_{\perp}(2\omega) \bar{E}_{\perp} + \frac{(2\omega)^2}{c^2 \epsilon_0} \bar{P}_{\perp}^{NL} + \\ & + \left[\frac{(2\omega)^2}{c^2} \epsilon_{\parallel}(2\omega) E_{\parallel} + \frac{(2\omega)^2}{c^2 \epsilon_0} P_{\parallel}^{NL} \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \epsilon_{\parallel} \text{ y } \epsilon_{\perp} \\ \text{respuesta} \\ \text{dieléctrica} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \text{ y } \perp \\ \text{a } \hat{z} \end{matrix} \quad (5.9)$$

Esta ecuación se tiene que satisfacer por componentes

$$\Rightarrow E_{\parallel}(2\omega, z) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{\parallel}(2\omega)} P_{\parallel}^{NL}(2\omega, z) \quad (5.10)$$

\Rightarrow no es muy informativa y generalmente se desprecia

la otra componente da la ecación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) \bar{E}_\perp(zw, z) = - \frac{(zw)^2}{c^2 \epsilon_0} \bar{P}_\perp^{NL}(zw, z) \quad (5.11)$$

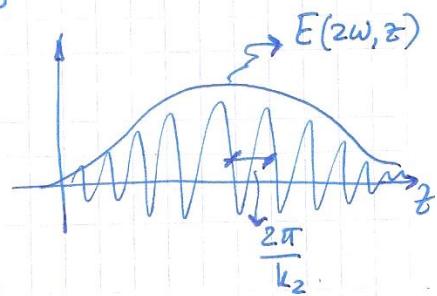
con $k_2 = \frac{zw}{c} \sqrt{\epsilon_1(zw)}$ es el vector de onda de la SH

tenemos que resolver (5.11) para ver como se propaga la onda 1 a la propagación (en este caso z).

Para eso vamos a apelar a la aproximación de envolvente lenta variable. Es decir que como $X^{(2)}$ es muy chico \Rightarrow la amplitud del campo de SH crece despacio con la posición \therefore si uno se mueve una longitud de onda, la amplitud de SH se mueve muy poco

$$(5.12) \quad \bar{E}_\perp(zw, z) = \bar{E}(zw, z) e^{ik_2 z}$$

↓ ↑
esto varía esto varía
lento rápido



la aproximación es equivalente a pedir

$$\left| \frac{\partial^2 E(zw, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_2 \frac{\partial E(zw, z)}{\partial z} \right|$$

es decir que el cambio fraccional en una distancia del orden de la long. de onda $\ll 1$

Aplicando (5.12) tenemos que:

$$(5.13) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{E}_\perp(zw, z) = - \left[k_2^2 \bar{E}(zw, z) - \frac{\partial \bar{E}(zw, z)}{\partial z} \cdot 2ik_2 - \frac{\partial^2 \bar{E}(zw, z)}{\partial z^2} \right] e^{ik_2 z}$$

$\cancel{\frac{\partial^2 \bar{E}(zw, z)}{\partial z^2}}$
despreciamos

1) escribimos

$$(5.14) \quad \bar{P}_T^{NL}(2\omega, z) = \bar{P}^{(2)}(2\omega, z) = 2 \epsilon_0 \text{deff} E^2(2\omega, z) e^{i2k_1 z} \hat{e}_z$$

↓
por (25) da lo que sigue

dirección de
PI

reemplazando (5.13) y (5.14) en la ecuación de onda (5.11) tenemos:

$$\begin{aligned} - \left(k_2^2 \bar{E}(2\omega, z) - 2ik_2 \frac{\partial \bar{E}(2\omega, z)}{\partial z} \right) e^{ik_2 z} + k_2^2 \bar{E}(2\omega, z) e^{ik_2 z} &= \\ &= - \frac{(2\omega)^2}{c^2} 2 \text{deff} E^2(\omega, z) e^{i2k_1 z} \hat{e} \\ \Rightarrow (5.15) \quad \frac{\partial E(2\omega, z)}{\partial z} &= i \frac{(2\omega)^2}{k_2 c^2} \text{deff} E^2(\omega, z) e^{i2k_1 z} \quad \boxed{\Delta k = 2k_1 - k_2} \end{aligned}$$

Si la superficie del material se encuentra en $z=0$ y el campo de STH se hace cero allí \Rightarrow integrando (5.15) con la condición de borde $E(2\omega, 0) = 0$

quedará

$$E(2\omega, z) = i \frac{(2\omega)^2}{k_2 c^2} \text{deff} E^2(\omega) e^{i \frac{\Delta k z}{2}} \frac{\sin(\Delta k z/2)}{\Delta k} \quad (5.16)$$

recordar: $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$; $k_2 = n_2 \frac{(2\omega)}{c}$

\downarrow no depende de z (sin agotamiento)
 \downarrow Δk controla la intensidad de STH

Lo que miden los detectores en el laboratorio es la magnitud del valor medio temporal del vector de Poynting, que es la irradiancia o Intensidad

$$I = |\langle \vec{s} \rangle| = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c |E_z|^2 = 2 n \epsilon_0 c |E(\omega, r)|^2$$

\downarrow donde este es el campo real

Índice de refracción a la frcc. de trabajo

\downarrow la amplitud compleja (de la T.o.F.)

⇒ en la ec (5.16) elevamos al cuadrado y queda:

$$I(2\omega, z) = \frac{2 \epsilon_0}{k_2 c^2} (2\omega)^3 d_{eff}^2 E^4(\omega) \frac{\sin^2(\Delta k z/2)}{(\Delta k)^2} \quad (5.17)$$

Si lo ponemos en términos de las intensidades incidentes (en ω) queda:

$$I(2\omega, z) = \frac{(2\omega)^2}{n_2 n_1^2 c^3 \epsilon_0} d_{eff}^2 I(\omega)^2 \frac{\sin^2(\Delta k z/2)}{(\Delta k)^2} \quad (5.18)$$

*Esto es cte xq
ignoramos agotamiento* donde $n_2 \equiv n(2\omega)$
 $n_1 \equiv n(\omega)$

Vemos que depende de la intensidad incidente al cuadrado, la no linealidad d al cuadrado y su magnitud est^a determinada por un denominador resonante Δk

Si por un momento pensamos que E es independiente de ω ⇒ $k_2 = 2k_1$ y $\Delta k = 0$
y la ec (5.16) para el campo quide

$$\xrightarrow[\Delta k \rightarrow 0]{ } \frac{\sin(\Delta k z/2)}{\Delta k} = \frac{z}{2}$$

$$(5.18) \text{ y para la intensidad} \xrightarrow[\Delta k \rightarrow 0]{ } \frac{\sin^2(z)}{(\Delta k)^2} = \frac{z^2}{4}$$

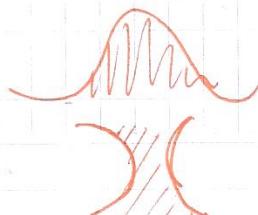
O sea que la envolvente de la SH. crece como $\frac{z^2}{2}$ (la intensidad como $\frac{z^4}{4}$)

⇒ nuestra aproximación sin agotamiento hace agua para distancias grandes

→ Aunque sabemos que esto no es cierto, queremos poder tener $\Delta k = 0$
para maximizar la intensidad de 2da armónica (SH)

Estrategias

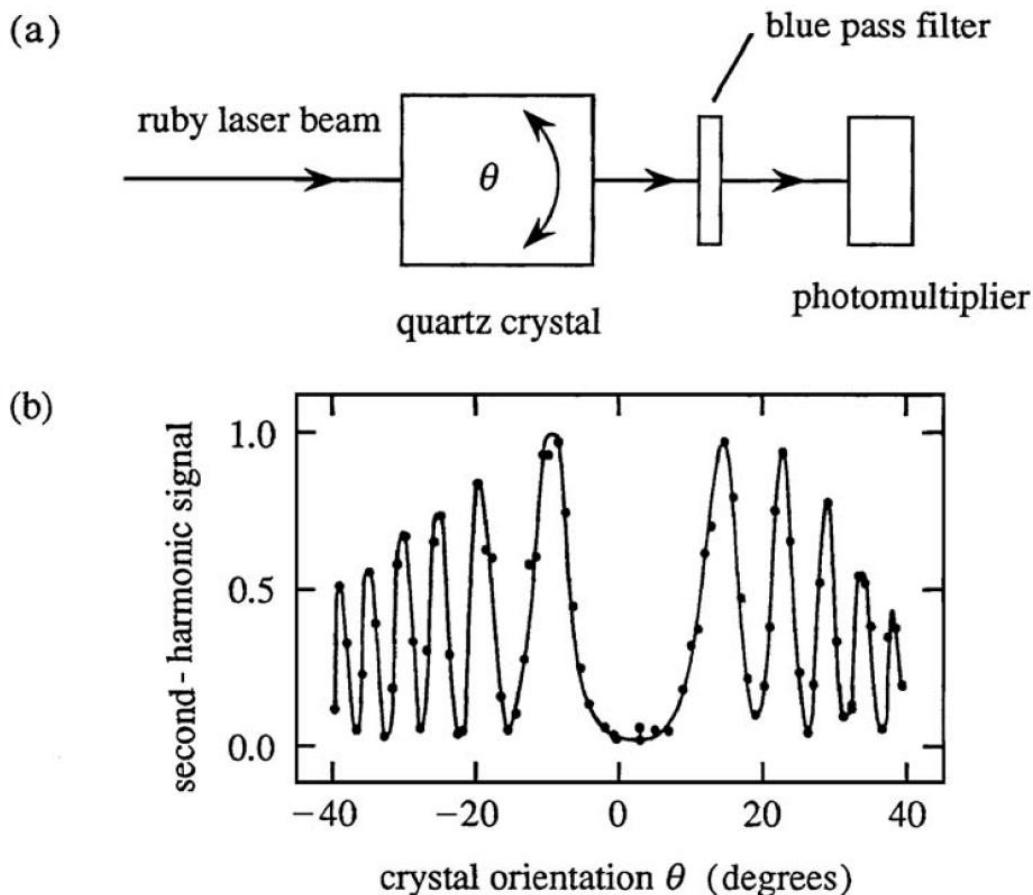
$I(\omega) \uparrow$ $\xrightarrow{\text{enfocar}} \uparrow$
 $\xrightarrow{\text{pulsos}} \uparrow$



$\Delta k = 0$ "phase matching"

Configuración experimental

$d_{eff}^2 \uparrow$
material!



Maker et al, 1962 P.D Maker, R.W Terhune, M. Nisenoff, and C. M. Savage, "Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics," Phys. Rev. Lett. 8, 21-22 (1962).

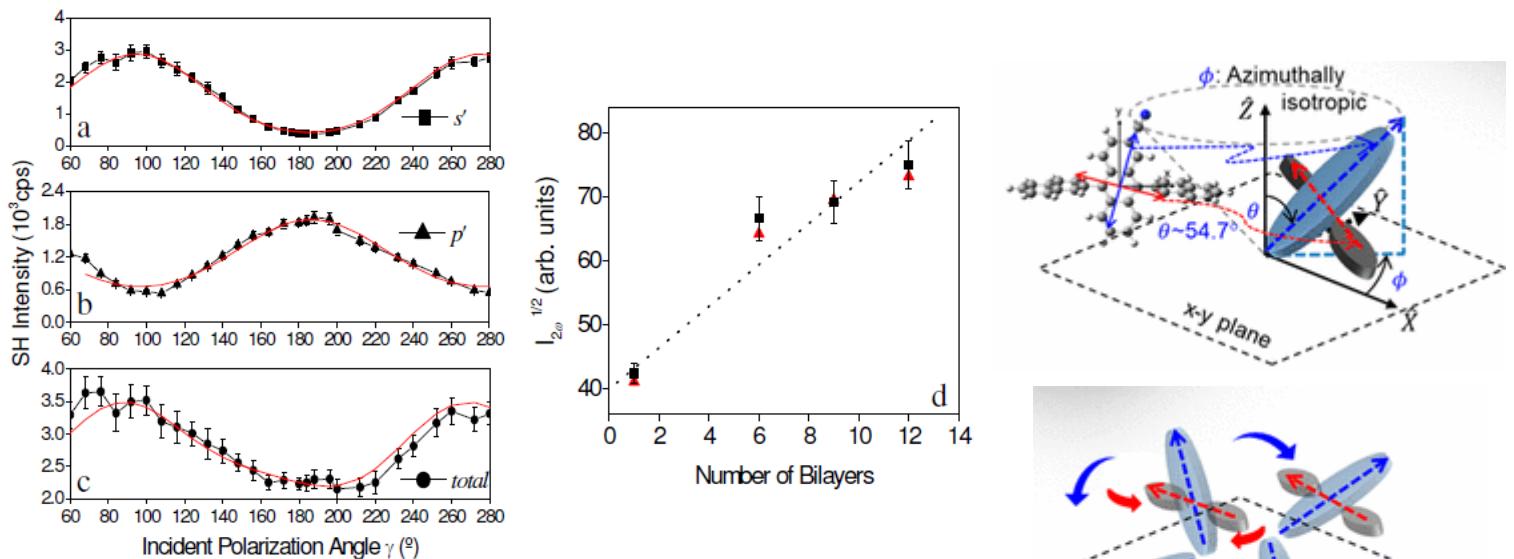


Fig. 3. (a) s' - and (b) p' -polarized SH response (rotated 15 degrees from the s - or p - polarized signals) of (PAH/PAZO)₆ as a function of the polarization angle of the fundamental beam (90° corresponds to s - polarized incident beam). (c) is the total signal. Full lines are fittings following Eq (5). (d) Square root of second-harmonic intensity of PAH/PAZO films as a function of the number of deposited bilayers. Squares correspond to the maximum total signal measured, triangles correspond to the same quantity obtained from the fitting function. Dotted line is a guide to the eye.

Phase matching (emparejamiento de fase ??)

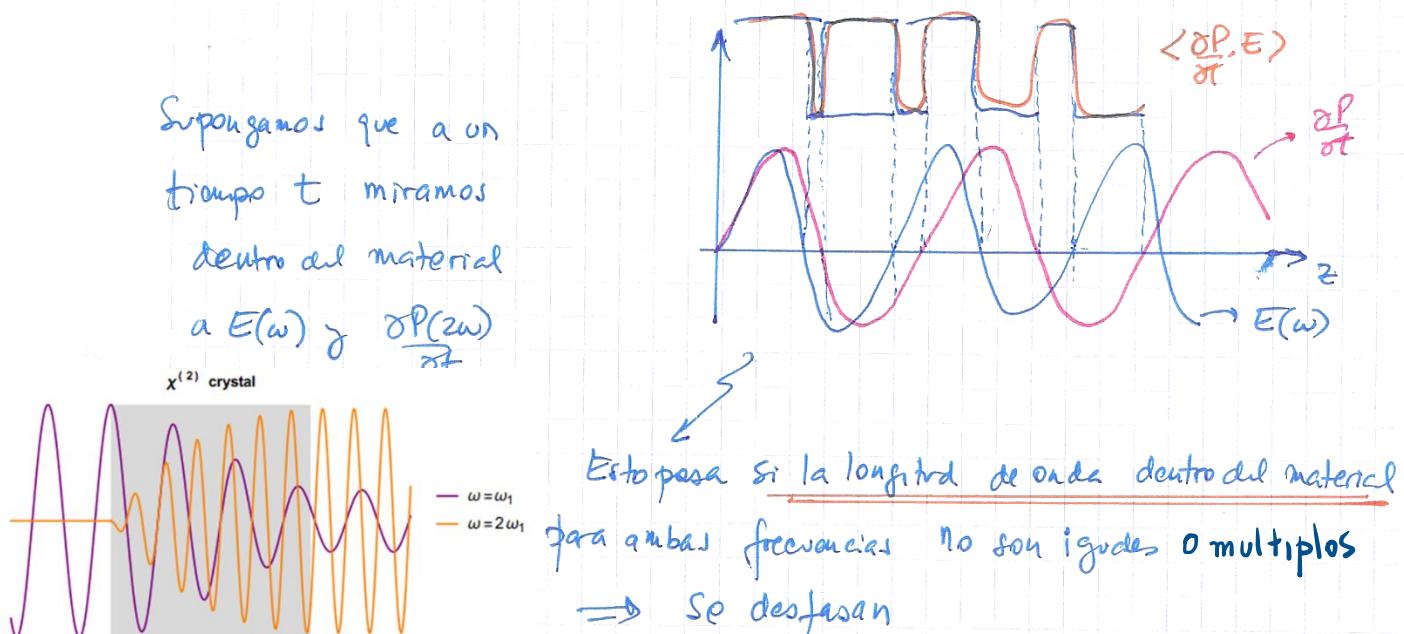
Por qué la condición $\Delta k = 0$ se llama phase-matching?

Recordemos de la clase 2 el teorema de Poynting que nos da el balance de energía, en donde el término de intercambio de energía entre el campo incidente y el medio es:

$$(5.19) \quad \left\langle \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \right\rangle \quad \text{en este caso} \quad \left\langle \bar{E}(w) \cdot \frac{\partial \bar{P}(2w)}{\partial t} \right\rangle$$

↓ ↓
 Campo incidente polarización
 no lineal.

La cantidad (5.19) puede cambiar de signo a lo largo del material y por lo tanto cambiar la dirección del flujo de energía



\Rightarrow el flujo de energía va del campo a la polarización y viceversa, alternadamente

El largo sobre el cual la energía fluye de la polarización al campo lo llamamos longitud de coherencia

$$l_c = \frac{\pi}{|\Delta k|}$$

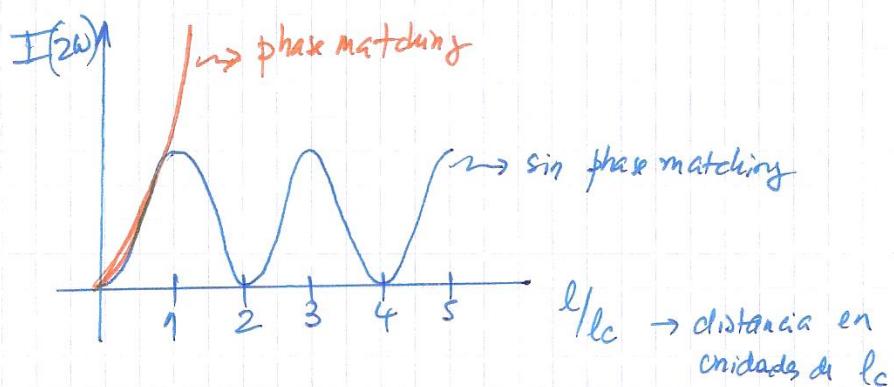
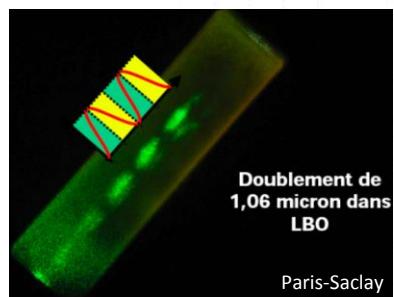
(5.20)

* las definiciones cambian ligeramente según el libro que consulten

La longitud de coherencia es el valor para el cual la I es máxima de (5.18) queda

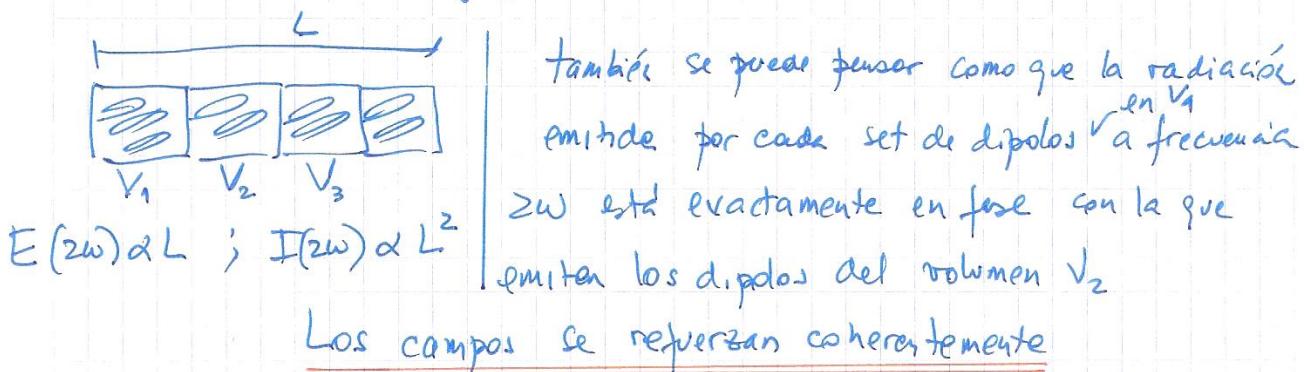
$$I(2\omega, z) = \frac{(2\omega)^2}{\pi^2 n_2 n_1^2 c^3 \epsilon_0} d_{\text{eff}}^2 I^2(\omega) l_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{l_c}\right) \quad (5.21)$$

para $z \ll l_c$ el campo crece como z (ver 5.16) y la intensidad como z^2



Si las señales $E(\omega)$ y $E(2\omega)$ están en fase $\Rightarrow l_c \rightarrow \infty$ y el proceso se dice que está "phased matched"

En el caso de la SH hay phase matching cuando $k_2 = 2k$,

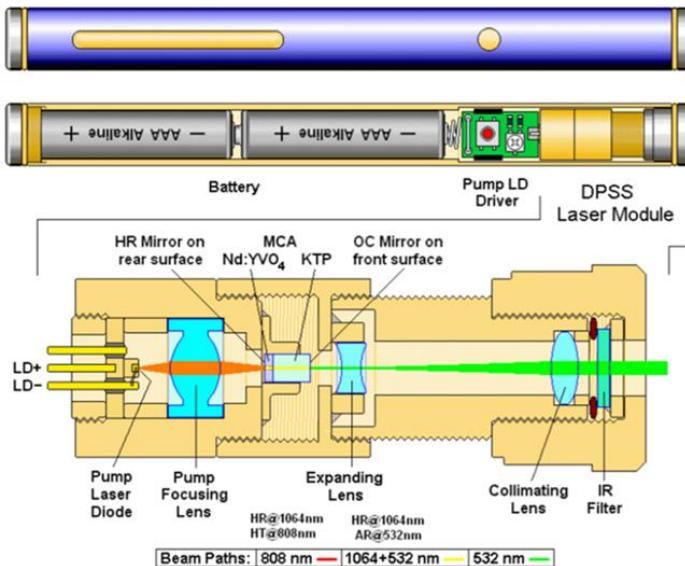


- ¿Cómo conseguimos al phase matching?

↳ asegura eficiencia

X ej el puntero verde

Cristales especialmente fabricados y cortados



5.10

Typical Green DPSS Laser Pointer Using MCA

DPSS: Diode pump solid state laser

La forma más común de conseguir $k_2 = 2k_1$ es usando la birefringencia de ciertos materiales. Si recuerdan la ecuación de índices para un cristal uniaxial (clase 2 ec 48) era

$$\frac{1}{n(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}$$

phase matching es logrado cuando $n_e(2\omega, \theta) = n_o(\omega)$

Sintonizando angularmente

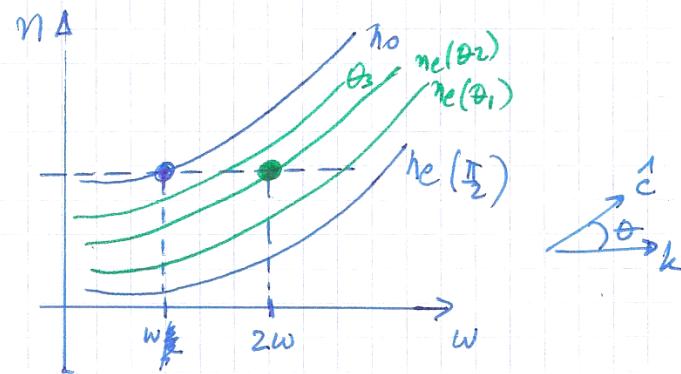
se puede lograr al phase matching

experimentalmente se rota el cristal hasta alcanzar el máximo

Esto se puede hacer para más de una longitud de onda, un mismo cristal puede servir para varias, hay que mirar las especificaciones de los cristales

El phase matching se llama:

- [Type I] cuando 2 rayos ordinarios a ω generan uno extraordinario a 2ω
- [Type II] cuando 1 rayo ordinario y 1 rayo extraordinario a ω genera 1 rayo a 2ω



En este caso es un cristal uniaxial negativo ($n_e < n_o$) pero puede ser positivo ($n_e > n_o$)

Esto es en general para
un proceso de suma
(tabla 2.3.2 del Boyd)
para STH $\omega_3 = 2\omega$
 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Ejemplos de cristales más usados: BBO, KDP

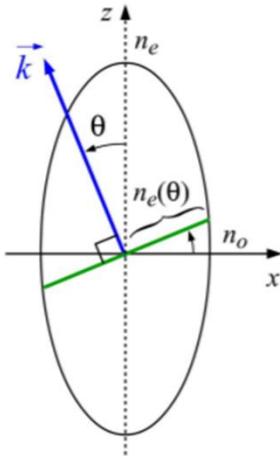
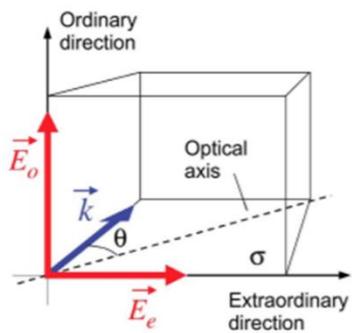
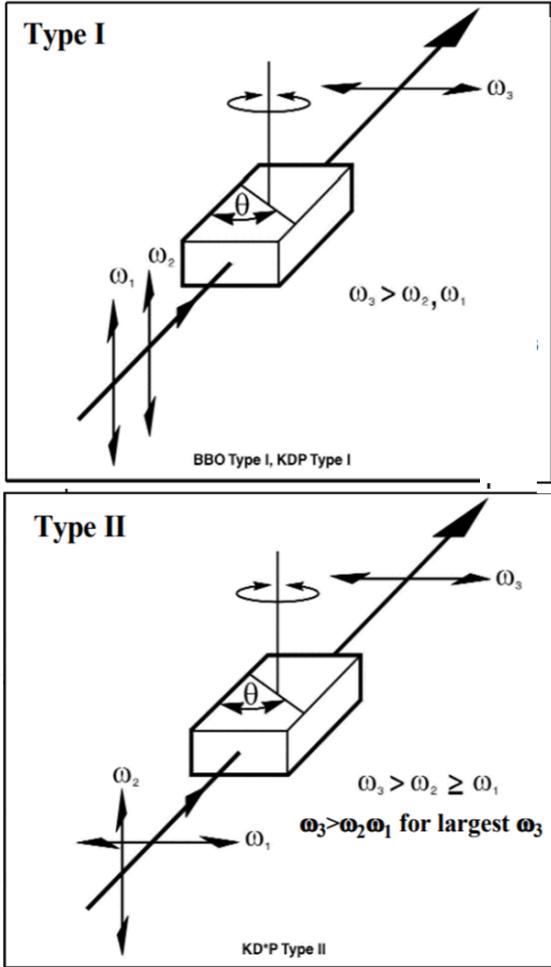


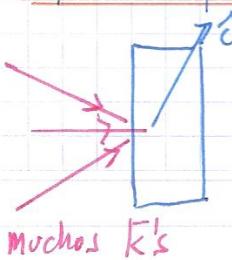
TABLE 2.3.2 Phase-matching methods for uniaxial crystals

	Positive uniaxial ($n_e > n_0$)	Negative uniaxial ($n_e < n_0$)
Type I	$n_3^o \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^e \omega_2$	$n_3^e \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^o \omega_2$
Type II	$n_3^o \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^e \omega_2$	$n_3^e \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^o \omega_2$



En la sintonización por ángulo puede haber problemas de "walk-off". Vimos en la clase 2 que el vector de Poynting $\vec{S} \neq \vec{k}$ para $\theta \neq 0 \text{ o } \pi/2 \Rightarrow$ ondas con distintas direcciones de propagación divergen a medida que se propagan en el cristal, el overlap espacial decrece \Rightarrow baja la eficiencia $I(2\omega)/I(\omega)$

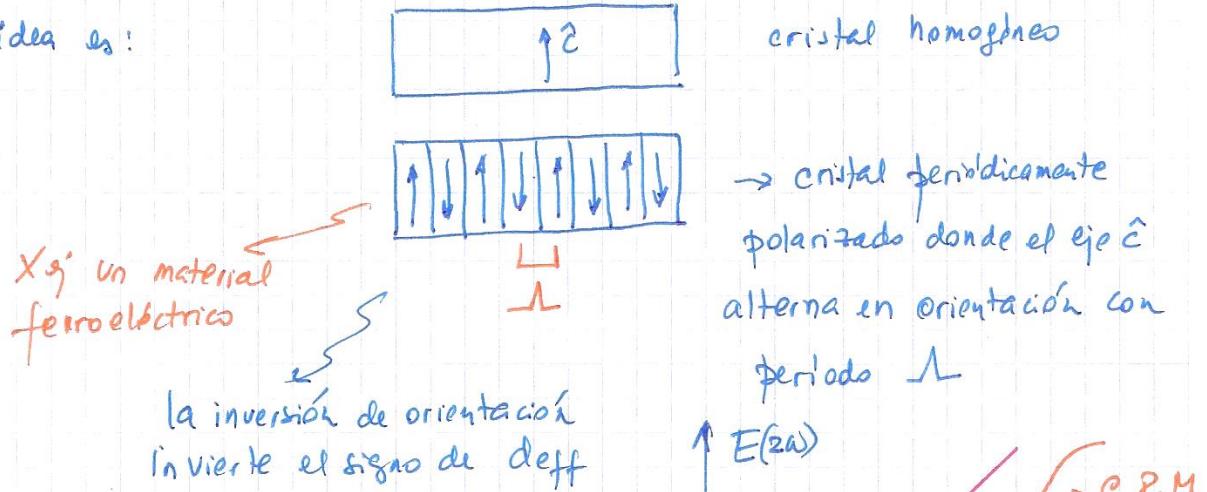
Lo mismo pasa si entocamos mucho



Quasi phase matching

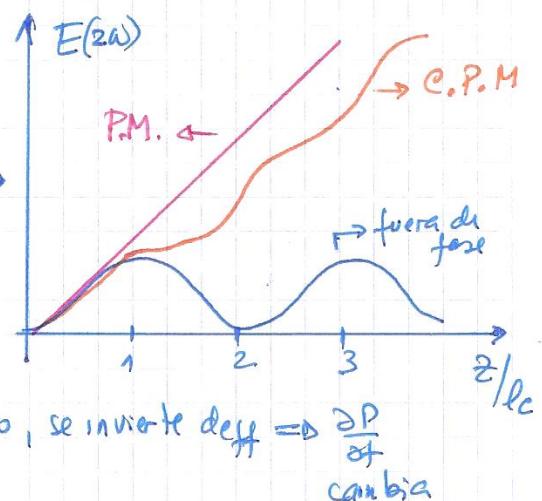
A veces es difícil usar la birefringencia porque es poca y no le gana a la dispersión (pase a λ cortas) \Rightarrow Se queda usar un método alternativo.

La idea es:



cristal homogéneo

\rightarrow cristal periódicamente polarizado donde el eje \hat{c} alterna en orientación con periodo L

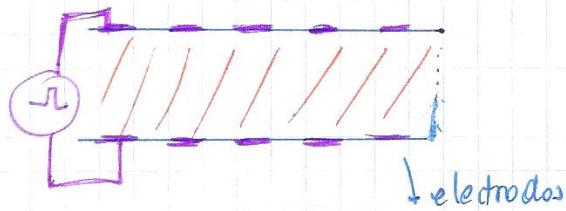


Cada vez que $\langle E \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \rangle$ va a cambiar de signo, se invierte $d_{eff} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t}$ cambia

X ej se puede tomar esta dependencia espacial

$$d(z) = d_{eff} \operatorname{Sign} \left[\operatorname{cr} \left(\frac{2\pi z}{L} \right) \right]$$

Una posibilidad es usar dominios ferroeléctricos en LiNbO_3 (niobato de litio)



la gente trabaja hasta hoy con estos cristales para fotones entrelazados, dispositivos, fotónica integrada, etc

También se puede hacer con polímeros