

Fenómenos no lineales de 3<sup>er</sup> orden

La ocurrencia de los fenómenos no lineales de 3<sup>er</sup> orden son mucho menos restrictivos que los de 2<sup>do</sup> orden  $\Rightarrow$  aparecen en casi todos los materiales.

Una característica propia de los procesos  $\chi^{(3)}$  es que incluyen los efectos "autoinducidos", es decir aquellas interacciones para las cuales la polarización no lineal se genera a la misma frecuencia de entrada  $\omega$ .

$\Rightarrow \chi^{(3)}$  da lugar a  $P^{\text{NL}} \propto$  campos al cubo

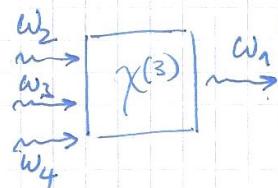
En el problema 4 de la guía 2 vimos cuáles eran todas las posibles frecuencias de salida en un proceso  $\chi^{(3)}$ . Podemos resumirlo en la siguiente tabla:

**TABLE 8.1 Frequencies Present in the Nonlinear Polarization for an  $\chi^{(3)}$  Process When Three Frequencies,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , and  $\omega_4$ , are Present at the Input**

Multiplicity	New Frequencies		
1	$3\omega_2$	$3\omega_3$	$3\omega_4$
3	$2\omega_2 + \omega_3$	$2\omega_2 + \omega_4$	$\omega_2 + 2\omega_4$
	$2\omega_2 - \omega_3$	$2\omega_2 - \omega_4$	$\omega_2 - 2\omega_4$
	$2\omega_4 + \omega_3$	$2\omega_3 + \omega_2$	$2\omega_3 + \omega_4$
	$2\omega_4 - \omega_3$	$2\omega_3 - \omega_2$	$2\omega_3 - \omega_4$
	$\omega_2 + \omega_2 - \omega_2$	$\omega_3 + \omega_3 - \omega_3$	$\omega_4 + \omega_4 - \omega_4$
6	$\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$	$\omega_2 + \omega_3 - \omega_4$	$\omega_2 + \omega_4 - \omega_3$
	$\omega_3 + \omega_4 - \omega_2$		
	$\omega_2 + \omega_3 - \omega_3$	$\omega_2 + \omega_4 - \omega_4$	$\omega_3 + \omega_2 - \omega_2$
	$\omega_3 + \omega_4 - \omega_4$	$\omega_4 + \omega_2 - \omega_2$	$\omega_4 + \omega_3 - \omega_3$

Note: The multiplicity is the number of times the particular term appears in  $E^3$ . Pairings such as  $\omega_2 + \omega_3 - \omega_3$  are not simplified; they are written to show their origin.

es el caso más general



Podemos ver que además de las frecuencias, tenemos las "multiplicidad". Veamos qué es esto.

Por ejemplo si consideramos la polarización no lineal a  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$  tenemos:

$$(10.1) \quad P^{(3)}(\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \propto \underset{6}{\textcircled{6}} \chi^{(3)}(\omega_1; \omega_2, \omega_3, \omega_4) A(\omega_2) A(\omega_3) A(\omega_4) e^{i(k_2 + k_3 + k_4)z}$$

Este factor indica que este particular término ocurre 6 veces (ver tabla)

(Ací usamos como siempre la notación  $E(\omega_n, z) = A_n e^{ik_n z - i\omega_n t}$ )

Otro ejemplo: a  $2\omega_2 + \omega_3$

$$(10.2) \quad P^{(3)}(2\omega_2 + \omega_3) \propto \underset{3}{\textcircled{3}} \chi^{(3)}(2\omega_2 + \omega_3; \omega_2, \omega_2, \omega_3) A^2(\omega_2) A(\omega_3) e^{i(2k_2 + k_3)z}$$

multiplicidad 3

Otro: a  $3\omega_2$

$$(10.3) \quad P^{(3)}(3\omega_2) \propto \underset{1}{\textcircled{1}} \chi^{(3)}(3\omega_2; \omega_2, \omega_2, \omega_2) A^3(\omega_2) e^{i3k_2 z}$$

multiplicidad 1

$\Rightarrow$  la multiplicidad esté dada por el número de permutaciones distintas de los 3 campos incidentes. Resumiendo:

Si no hay degeneración  $\Rightarrow$  6 veces

" hay 1 "  $\Rightarrow$  3 veces

todo degenerado  $\Rightarrow$  1 vez

$$\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$$

$$\begin{array}{l} \omega_2 \omega_3 \omega_4 \\ \omega_2 \omega_4 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_2 \omega_4 \\ \omega_3 \omega_4 \omega_2 \\ \omega_4 \omega_2 \omega_3 \\ \omega_4 \omega_3 \omega_2 \end{array}$$

6 veces de el mismo término en  $P^{(3)}$

Como caso singular de los procesos de  $\chi^{(3)}$  podemos buscar la polarización a una de las frecuencias de entrada,  $\omega_2$

$$(10.4) \quad P^{(3)}(\omega_2) \propto \begin{cases} 3 \chi^{(3)}(\omega_2; \omega_2, \omega_2, -\omega_2) |A(\omega_2)|^2 A(\omega_2) e^{ik_2 z} \\ + 6 \chi^{(3)}(\omega_2; \omega_2, \omega_3, -\omega_3) |A(\omega_3)|^2 A(\omega_2) e^{ik_2 z} \\ + 6 \chi^{(3)}(\omega_2; \omega_2, \omega_4, -\omega_4) |A(\omega_4)|^2 A(\omega_2) e^{ik_2 z} \end{cases}$$

ninguna degeneración ( $\omega_i$  y  $-\omega_i$  no están degenerados)

Hasta ahora justificamos el hecho de tomar cada componente de la  $P^{NL}$  a la free. de interés, tomandolos como términos independientes porque la interacción no lineal es clara. Pero ahora  $\chi^{(3)}$  permite los efectos autoinducidos que van a crear una polarización a la misma frecuencia de entrada  $\Rightarrow$  hay que tener cuidado de no dejar fuera ningún proceso (que tal vez va colgado de otro)

Respecto a las simetrías, se puede usar Kleinman siempre que la dispersión de  $\chi^{(3)}$  sea despreciable (o sea, se pueden permutar los índices sin permutar las frecuencias)

$\Rightarrow$  en esas condiciones la expresión para  $P^{(3)}$  considerando  $\chi^{(3)}$  como un tensor de rango 4, es:

$$(10.5) \quad P_i^{(3)}(\omega_1) = \varepsilon_0 \sum_{jkl} D \left\{ \chi^{(3)}_{ijkl} (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4; \omega_2, \omega_3, \omega_4) A_j(\omega_2) A_k(\omega_3) A_l(\omega_4) e^{i(k_2 + k_3 + k_4)z} \right\}$$

↓  
la expresión compacta  
de la mezcla de  
las 4 ondas  
(sin dispersión)

↓ multiplicidad  $\rightarrow D = \begin{cases} 1 & \text{si todos los campos son indistinguibles} \\ 3 & \text{si 2 campos son indistinguibles} \\ 6 & \text{si todos los campos son distinguibles} \end{cases}$

Las 81 componentes del tensor se quedan reducir por simetría como sucede con  $\chi^{(2)}$ . Si quieren ver las distintas componentes  $\neq 0$  de  $\chi^{(3)}$  de c/u de los grupos puntuales, esté en el Powers (Tabla 8.2) y en el Boyd sección 4.2.

Tabla 2 del Sutherland, capítulo 1

### Ecuaciones acopladas

Como hicimos en el caso de  $\chi^{(2)}$ , a partir de la ecuación de onda se llega a las ecuaciones acopladas, que describen los cuadros en función de  $z$  (repassar clase 6) ec. 6.9

En el caso general de mezcla de 4 ondas, considerando escalera  $\chi^{(3)}$ , queremos saber la polarización no lineal <sup>ver ec. (10.5)</sup>  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ , para luego ponerla como fuente de la ec. de onda

Cuáles son todas las combinaciones que dan  $\omega_1$ ?

$$\text{todas indist} \leftarrow \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$$

$$2 \text{ indist} \leftarrow \omega_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$$

$$3 \text{ indist} \leftarrow \omega_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_2$$

$$\vdots \quad \omega_1 = \omega_1 + \omega_3 - \omega_3$$

$$\vdots \quad \omega_1 = \omega_1 + \omega_4 - \omega_4$$

de (10.5) queda

$P^{(3)}(\omega_1)$   $(\omega_1)$  no a contar con todas estas contribuciones

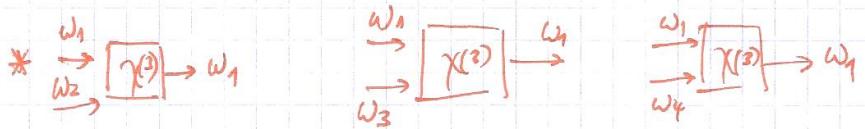
$$(10.6) \quad P^{(3)}(\omega_1) = 36 \chi^{(3)} \cdot \left( \begin{array}{l} \left( |A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2 \right) \cdot A_1 e^{ik_1 z} \\ + 2 \cdot A_2 A_3 A_4 e^{i(k_2+k_3+k_4)z} \end{array} \right)$$

fíjense primero que nade las multiplicidades, y después veamos las \*

Los términos ~~\*~~ tienen dependencia  $e^{ik_1 z} \Rightarrow$  están AUTOMÁTICAMENTE EN PHASE MATCHING

$\left\{ \begin{array}{l} \text{la mezcla y la onda } \omega_1 \\ \text{tienen la misma longitud de onda} \end{array} \right.$

Los términos ~~\*~~ la long de onda esté determinada por  $k_2 + k_3 + k_4 \Rightarrow$  requiere PHASE MATCHING para tener una contribución apreciable



Las ecuaciones acopladas quedan:

$$\frac{dA_1}{dz} = i \frac{3\omega_1 \chi^{(3)}}{2n_1 c} \left[ (|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2)A_1 + 2A_2 A_3 A_4 e^{-i\Delta kz} \right],$$

$$\frac{dA_2}{dz} = i \frac{3\omega_2 \chi^{(3)}}{2n_2 c} \left[ (|A_2|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2)A_2 + 2A_1 A_3^* A_4^* e^{i\Delta kz} \right],$$

(10.7)

$$\frac{dA_3}{dz} = i \frac{3\omega_3 \chi^{(3)}}{2n_3 c} \left[ (|A_3|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_4|^2)A_3 + 2A_1 A_2^* A_4^* e^{i\Delta kz} \right],$$

$$\frac{dA_4}{dz} = i \frac{3\omega_4 \chi^{(3)}}{2n_4 c} \left[ (|A_4|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2)A_4 + 2A_1 A_2^* A_3^* e^{i\Delta kz} \right],$$

$$\Delta k = k_1 - k_2 - k_3 - k_4.$$

Notar que (10.7) es para el caso específico de  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ . Un set de ecuaciones acopladas ~~para cada~~ se obtienen para cada combinación de frecuencias. Se pueden trabajar en varios límites para poder resolverlos, por ejemplo no agotamiento para  $\omega_2, \omega_3 \text{ y } \omega_4$ .

## Índice de refracción no lineal - Efecto Kerr óptico

Consideremos ahora un proceso  $\chi^{(3)}$  en un medio sin pérdidas que involucra a una frecuencia  $\omega$  y la Polarización sea también la misma frecuencia  $\omega$  → propagando en  $z$ , mediante polarización  $\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi^{(3)}$

$$P^{(3)}(\omega) = 3 \epsilon \chi^{(2)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) |A|^2 A e^{ikz} \quad (10.8)$$

$$\overrightarrow{E(\omega)} \boxed{\chi^{(3)}} \rightarrow E(\omega) e^{i\phi_{NL}}$$

Si el proceso no lineal  $\chi^{(3)}$

leva a dejar una fase NL

⇒ la polarización total del material será

$$P_{\text{tot}}^{(3)}(\omega) = (\epsilon \chi^{(1)} A + 3 \epsilon \chi^{(3)} |A|^2 A) e^{ikz} \quad (10.9)$$

$\equiv \epsilon \chi_{\text{eff}} A e^{ikz}$  definimos una susceptibilidad efectiva

$$\Rightarrow \chi_{\text{eff}} = \chi^{(1)} + 3 \chi^{(3)} |A|^2 \quad (10.10)$$

Esto nos permite definir un índice de refracción dependiente de  $|A|^2$  como

$$n^2 = (1 + \chi_{\text{eff}}) = (n_0 + 2 \bar{n}_2 |A|^2)^2 \quad (10.11)$$

usando (10.10) en (10.11)

$$\underbrace{[n_0 + 2 \bar{n}_2 |A|^2]^2}_{\text{Se hace este cuadrado y se tiran los términos } |A|^4} = 1 + \underbrace{\chi^{(1)}}_{n_0^2} + 3 \chi^{(3)} |A|^2 \quad (10.12)$$

Se hace este cuadrado y se tiran los términos  $|A|^4$

queda

$$\boxed{\bar{n}_2 = \frac{3 \chi^{(3)}}{4 n_0}} \quad (10.13)$$

↓  
dependencia con  $|A|^2$

↓  
índice de refracción no lineal  
"autoinducido"  
Hay un solo haz

Si queremos expresarlo como la dependencia con  $I$  (intensidad) que es más usual, tenemos:

(10.14)

$$n = n_0 + n_2 I$$

(sin linea arriba)

Como la intensidad es:

$$I = 2 n_0 \epsilon_0 c |E(\omega)|^2 \quad \xrightarrow{\text{sto promediado en el tiempo}}$$

queda

$$I = 2 n_0 \epsilon_0 c |A|^2 \quad (10.15)$$

Mirando (10.11) y poniendo el índice superficial de  $I$  como en (10.14)

queda:

(10.16)

$$n_2 = \frac{3}{4 n_0^2 \epsilon_0 c} \chi^{(3)}$$

autoinducido

→ este es de la dependencia con  $I$ , más usual

Pero si nos fijamos en lo que ya discutimos por ejemplo en (10.6), sabemos que podemos tener un segundo haz, digamos  $\omega'$ , que también pueden darnos

$$P(\omega) = 6 \epsilon_0 \chi^{(3)} |A'|^2 A$$

Se puede hacer el mismo análisis sólo que ahora

⇒ se define el índice de "acoplamiento cruzado"  $n_2^{(\text{cross})}$

que es 2 veces mayor que (10.16)

$$\xrightarrow{\omega'} \boxed{\chi^{(3)}} \xrightarrow{\omega}$$

$$n_2^{(\text{cross})} = \frac{3}{2 n_0^2 \epsilon_0 c} \chi^{(3)} \quad (10.17)$$

Volviendo a (10.16), se puede poner numéricamente como:

$$n_2 \left( \frac{m^2}{W} \right) = \frac{283}{m_0^2} \chi^{(3)} \left( \frac{m^2}{V^2} \right) \quad (10.18)$$

(Como muchas tablas dan los valores en esu, hay que aplicar la conversión, apéndice)

$$\text{de Boyd } n_2 \left( \frac{cm^2}{W} \right) = 0.0395 \chi^{(3)} (\text{esu})$$

Para tener una idea de orden de magnitud, hagamos la cuenta de cuanto incide el índice no lineal en disulfuro de carbono líquido.

$$m_2 = 3 \cdot 10^{-14} \frac{\text{cm}^2}{\text{W}} \Rightarrow \text{un haz de luz de } \frac{1 \text{ MW}}{\text{cm}^2} \text{ produce un cambio de } 3 \cdot 10^{-8} \text{ en el índice de refracción}$$

Por ejemplo para vidrio (fused silica) es 2 órdenes de magnitud menor

Ahora vamos a empapar con algunos efectos de  $\chi^{(3)}$  de relevancia práctica que ocurren por la dependencia de  $n$  en I

### Absorción no lineal

Supongamos que tenemos un solo haz de entrada a  $\omega$  → polarizado en x → tenemos una  $P^{(3)}(\omega)$  del tipo de la ec. (10.8). Como siempre, si planteamos la ecuación de onda  $\nabla^2 E - \frac{c}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2}$  con  $P^{(3)}(\omega)$  como fuente → vamos a obtener

$$\frac{dA}{dz} = i \frac{3\omega}{2nc} \chi^{(3)} |A|^2 A \quad (10.19)$$

$$= i \cancel{k} A \quad \text{donde } \boxed{k = \frac{3\omega}{2nc} \chi^{(3)} |A|^2} \quad (10.20)$$

esto nos dice que la onda sufre un corrimiento de fase dependiente de intensidad a medida que se propaga en el material

Vamos a proponer para (10.19) la solución

$$(10.21) \quad A(z) = u(z) e^{i\phi(z)}$$

donde  $u$  y  $\phi$   
son funciones reales

$\Rightarrow$  Sustituyendo en (10.19) queda

$$\frac{du}{dz} + i \mu \frac{d\phi}{dz} = i \frac{3\omega}{2\pi c} \chi^{(3)} u^3 \quad (10.22)$$

Si ahora pedimos que el material absorba, o sea tenga  $\chi^{(3)}$  compleja

$$\chi^{(3)} = \chi_{\text{Real}}^{(3)} + i \chi_{\text{Im}}^{(3)}$$

$\Rightarrow$  reemplazando en (10.22)

$$\frac{du}{dz} + i \mu \frac{d\phi}{dz} = - \frac{3\omega}{2\pi c} \chi_{\text{Im}}^{(3)} u^3 + i \frac{3\omega}{2\pi c} \chi_{\text{Real}}^{(3)} u^3$$

que dividiendo parte real e imaginaria queda:

$$\frac{du}{dz} = - \frac{3\omega}{2\pi c} \chi_{\text{Im}}^{(3)} u^3 \quad \left. \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \right\} \quad (10.23)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = - \frac{3\omega}{2\pi c} \chi_{\text{Real}}^{(3)} u^2$$

Estas ecuaciones me dicen como varían el módulo y la fase de la amplitud compleja del campo a  $\omega$ , con un único campo de entrada y material con absorción

Como  $I = 2\pi_0 \epsilon_0 c |A|^2$  (de (10.15))  $\Rightarrow \frac{dI}{dz} = 4\pi \epsilon_0 c \mu \frac{du}{dz}$

$\Rightarrow$  Sustituyendo (10.24) en (10.23 a) queda:

$$(10.25) \quad \boxed{\frac{dI}{dz} = -\beta I^2} \quad \text{donde } \beta = \frac{3\omega}{2\pi c^2} \chi_{\text{Im}}^{(3)}$$

Es el coeficiente de absorción de 2 fotones o TPA  
(two-photon absorption)

Si la absorción lineal también está presente  $\Rightarrow$

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I - \beta I^2 \quad (10.26)$$

$\downarrow$  Coeficiente TPA  
Coef de absorción  
lineal

Notar entonces que la absorción de 2 fotones es un proceso de 3er orden.

El producto  $\beta$  es macroscópico, pero también puede haber interés en conocer el Coeficiente TPA molecular. Para eso se define la sección eficaz  $\Gamma_2$

$$(10.27) \quad \Gamma_2 = \frac{\tau w \beta}{N} \quad \text{donde } N \text{ es la densidad de moléculas}$$

Breve mención a las simetrías: Aquí consideramos un  $\chi^{(3)}$  es escalar. Esto

corresponde a un material centroindefectivo o isótropo.

4 elementos del tensor  $\chi_{ijkl}$  independientes  
 3 elementos del tensor  $\chi_{ijkl}$  independientes  
 (ver tablas de simetría)  
 mencionadas en pag 10.4

Como el haz está polarizado en  $X \rightarrow$  haremos sobrevivir

Sólo el término que contiene a  $\chi_{xxxx}$  y es equivalente a considerarlo escalar

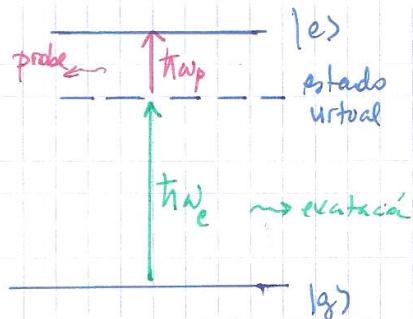
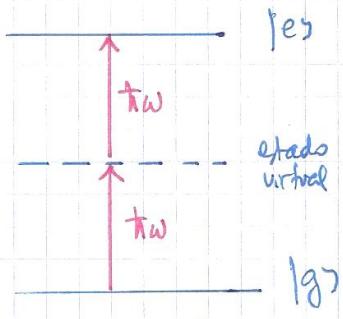


Diagrama de energía para TPA con 1 o 2 haces

En el caso de tener 2 campos "pump-probe" hay que resolver las ecuaciones acopladas

Uno podría seguir considerando órdenes superiores de  $\chi^{(3)}$  y resolver la absorción multifotónica. Por ejemplo 3PA  $\rightarrow$  proceso de  $\chi^{(5)}$

para 1 haz

$$\left\{ \frac{dI}{dt} = -\alpha I - \gamma I^3 \right.$$

$\downarrow$   
coeficiente de absorción  
de 3 fotones (3PA)

Análogamente para la absorción de  $n+1$  fotones

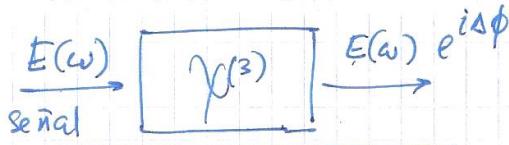
$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I + \gamma^{(n+1)} I^{n+1} \quad (10.27)$$

En general la absorción multifotónica no-resonante se hace muy pequeña para  $n \geq 3$ . Sin embargo puede ser significante para Semiconductores especialmente de banda angosta.

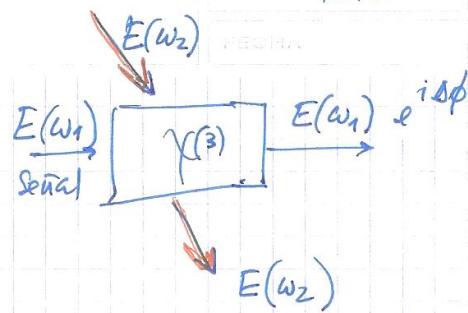
La absorción de orden  $n$  puede ser intensificada varios órdenes de magnitud con la presencia de resonancias intermedias (estados reales). Pero esto implica vidas medias finitas, polarizaciones intermedias, tasas de decaimiento, etc que se deben considerar.

### Modulación de la fase del campo eléctrico por efecto Kerr ( $n\alpha I$ )

Vimos para el caso de 1 haz de entrada de la ec. (10.23b), que la fase también se modula cuando la luz atraviesa un medio con  $n$  dependiente de  $I$ . También vimos que cuando inciden 2 haces el índice de refracción no lineal está dado por (10.17). Dependiendo de la configuración experimental podemos dividir en 2 el efecto de modulación de fase



Auto modulación de fase  
SPM



Modulación de fase cruzada  
XPM

Ach en general se elige el bombeo en  $\omega_2$  (fuerte) en una zona de absorción y el  $\omega_1$  (pulsar, sonda, proba) débil en zona de transparencia

- Auto modulación de fase : SPM

Si partimos de la ec. (10.19) y planteamos  $A = u e^{i\phi}$  tenemos

$$\frac{du}{dz} + i u \frac{d\phi}{dz} = i \frac{3w}{2nc} \chi^{(3)} u^3$$

Si asumimos que el material no tiene pérdidas,  $\chi^{(3)}$  real  $\Rightarrow$  podemos dividir la ecuación en parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= 0 \\ \frac{d\phi}{dz} &= \frac{3w}{2nc} \chi^{(3)} u^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \text{(10.28)}$$

En este caso venimos de (a) que  $u = \text{cte}$ , lo cual es lógico ya que consideramos un material sin pérdidas

De la ecuación (10.28b) tenemos un corrimiento de fase cuando se atraviesa  $\Delta z$

$$\Delta\phi = \frac{3w}{2nc} \chi^{(3)} u^2 \Delta z \quad (10.29)$$

Mientras que en un medio lineal  $\Delta\phi^{\text{lineal}} = k_0 \cdot n_0 \Delta z = \frac{\omega}{c} n_0 \Delta z$

$\Rightarrow$  el corrimiento de fase total es:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\omega}{c} \left[ n_0 + \frac{3}{2n} \chi^{(3)} \mu^2 \right] \Delta z} \quad (10.30)$$

• Modulación cruzada: XPM

Cuando inciden 2 haces  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se produce una modulación de fase cruzada.

Supongamos  $\chi^{(3)}$  real (y siempre propagación en  $z$ , polarización en  $x$ ,  $\chi^{(2)}$  escalar)

$$\Rightarrow P^{(3)}(\omega_1) = 3 \epsilon \chi^{(3)} \left( |A_1|^2 + 2 |A_2|^2 \right) A_1 e^{ik_1 z} \quad (10.31)$$

↗ proviene de  
 $\omega_1, -\omega_1, \omega_1$ 
 ↓ proviene de  
 $\omega_1, \omega_2, -\omega_2$

$\Rightarrow$  las ecuaciones acopladas en función de  $u$  y  $\phi$  quedan:

$$(10.32) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dz} + i \mu_1 \frac{d\phi_1}{dz} = i \frac{3 \omega_1}{2n c} \chi^{(3)} (\mu_1 + 2 \mu_2) u_1 \\ \frac{du_2}{dz} + i \mu_2 \frac{d\phi_2}{dz} = i \frac{3 \omega_2}{2n c} \chi^{(3)} (\mu_2 + 2 \mu_1) u_2 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se desacoplan si consideramos un medio sin pérdidas  $\Rightarrow$   
 $\mu_1$  y  $\mu_2$  son constantes

En este caso la fase no lineal es:

$$(10.33) \quad \boxed{\Delta\phi(\omega_1) = \frac{\omega_1}{c} \left[ \frac{3}{48n^2c} \chi^{(3)} (I_1 + 2I_2) \right] \cdot \Delta z}$$

↗ esta es la auto-modulación  
 ↓ Este es la cruzada  
 ec. (10.17)

La ecuación (10.33) muestra los términos de automodulación y modulación cruzada.

$$\boxed{n = n_0 + n_2 I(w_1) + n_2^{\text{cross}} I(w_2)} \quad (10.34)$$

↓ ecuación (10.16)      ↓ este es  $2 \cdot n_2$  (a veces lo ponen como  $\frac{1}{2} I_2 n_2^{\text{cross}}$ )

En (10.34) si  $I(w_2) \gg I(w_1)$ , es decir que entramos con un bombeo fuerte que modula el índice de refracción, y con una señal débil a  $w_1$ . A veces a este método se le llama "pump-probe" (bombeo-prueba).

El efecto Kerr óptico también se puede usar para inducir birrefringencia entrando con un haz de bombeo polarizado, de manera de inducir un cambio en el índice de refracción en una dirección de polarización y no en la otra.

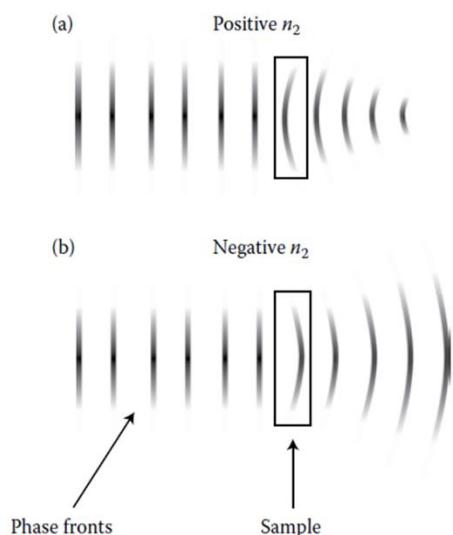
**Table 5.1** Physical mechanisms and parameters of several typical optical Kerr effects [7]

Physical mechanism	$n_2(\text{cm}^2/\text{W})$	$\chi^{(3)}(\text{esu})$	$\tau(\text{s})$
Electronic polarization	$10^{-16}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
Electrostriction	$10^{-14}$	$10^{-12}$	$10^{-9}$
Molecular orientation ( $\text{CS}_2$ )	$10^{-13}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$
Saturation atomic absorption	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$
Biexciton ( $\text{CuCl}$ )	$10^{-10}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
Semiconductor doped-glass ( $\text{CdSe}$ )	$10^{-10}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$
In-valence band transition ( $\text{HgCdTe}$ )	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-12}$
Two-photon ( $\text{InSb}$ )	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$
Thermal effect ( $\text{Si}$ )	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$
Thermal effect (dye)	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$
Bound exciton ( $\text{CdS}$ )	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-8}$
Free exciton ( $\text{GaAs}$ )	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-9}$
Free exciton ( $\text{GaAs}/\text{AlGaAs MQW}$ )	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-8}$
Molecular orientation (nematic liquid crystal)	$10^{-3}$	$10^{-1}$	1

Aquí se muestran otros efectos debidos al efecto Kerr y los ordenes de magnitud.

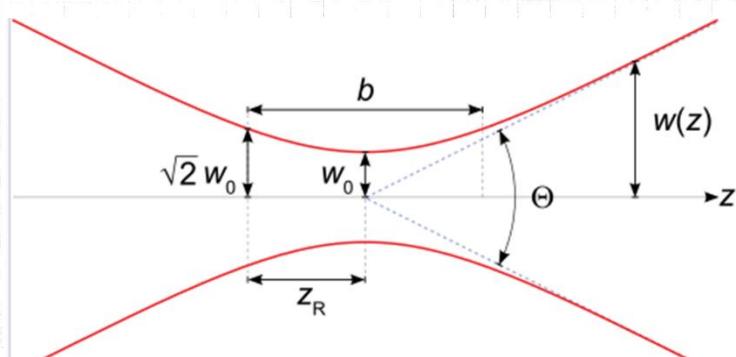
Autofoco:

Cuando un laser con distribución de intensidades del tipo gausiano se propaga en un medio no lineal, la intensidad en el centro > que en los bordes  $\Rightarrow$  el efecto Kerr óptico produce una distribución espacial de  $n$  a lo largo del radio del haz. En este caso el medio no lineal produce un efecto similar al de una lente y el tamaño del haz cambia continuamente: converge o diverge dependiendo del signo de  $n_2$ .



Consideremos un haz gauiano y despreciamos la difracción (si tenemos difracción se pueden compensar y el haz propagar con un diámetro constante: *self-trapping effect*)

Recordemos como era la propagación de un haz gauiano



donde  $z_R$  es el  
parámetro confocal

$$z_R = \frac{\pi w_0^2 n}{2}$$

cintura del haz

10.16

fase de haz

La ecuación que describe la propagación del haz es:

$$(10.35) \quad A(r, z) = A_0 \frac{w_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2(z)}\right) \exp\left(i k z + ik \frac{r^2}{2 R(z)} - i \xi(z)\right)$$

Cintura  $\frac{w_0}{W(z)}$   
perímetro del haz

Término de curvatura

Si tenemos un material de espesor  $L \Rightarrow$  la fase va a ser según (10.30)

$$\phi = \left(n_0 + n_2 I\right) \frac{w}{c} L \quad (10.36)$$

$$\text{el haz a } z=0 \Leftrightarrow A(r, z=0) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \quad (10.37)$$

cintura del haz

← haz en la entrada

$$\Rightarrow I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \quad (10.38)$$

$\Rightarrow$  agregando el término de fase como  $e^{i\phi}$  queda

$$(10.39) \quad A(r, z) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp\left(i \left(n_0 + n_2 I_0 e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}}\right) \frac{w}{c} z\right)$$

El camino óptico varía desde el centro a los bordes

La fase cuadrática que se introduce es similar a la fase que introduce en el frente de ondas una lente delgada . En este caso se

enfoca o desenfoca dependiendo del signo de  $n_2$

Se puede estimar la distancia focal de la lente usando la aproximación paraxial, o sea para haces cercanos al eje de propagación.

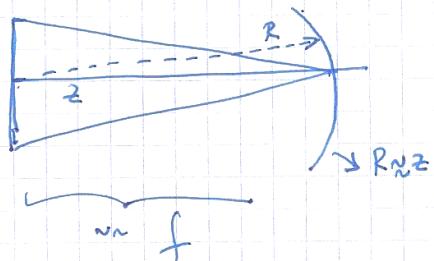
$$\exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \approx 1 - \frac{2r^2}{w_0^2} \quad (10.40)$$

En este momento (10.39) es:

$$(10.41) \quad A(r_1 z) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp\left(i(n_0 + n_2 I_0) \frac{w_0}{c} L\right) \exp\left(-\frac{i 2 n_2 w_0 I_0 L}{n_0^2 c} \frac{r^2}{w_0^2}\right)$$

Comparando (10.41) con la definición de haz gaussiano (10.35) se puede sacar el radio de curvatura inducido por la no linealidad.

$$(10.42) \quad R_{NL} = -\frac{n_0 w_0^2}{4 n_2 I_0 L} \quad \begin{matrix} \approx \text{distancia focal } f \\ \downarrow \\ \text{para intensidades } 10 \\ \text{muy altas} \end{matrix}$$



Si  $R < 0 \Rightarrow n_2 \rightarrow +$



Si  $R > 0 \Rightarrow n_2 \rightarrow -$



La inclusión de la difracción en el problema hará que aparezca una potencia a la cual el efecto de autofoco aparece (queda como ejercicio)

↓  
la vez que viene vamos a ver la técnica de z-scan que debido al autofoco permite caracterizar  $\chi^{(3)}$