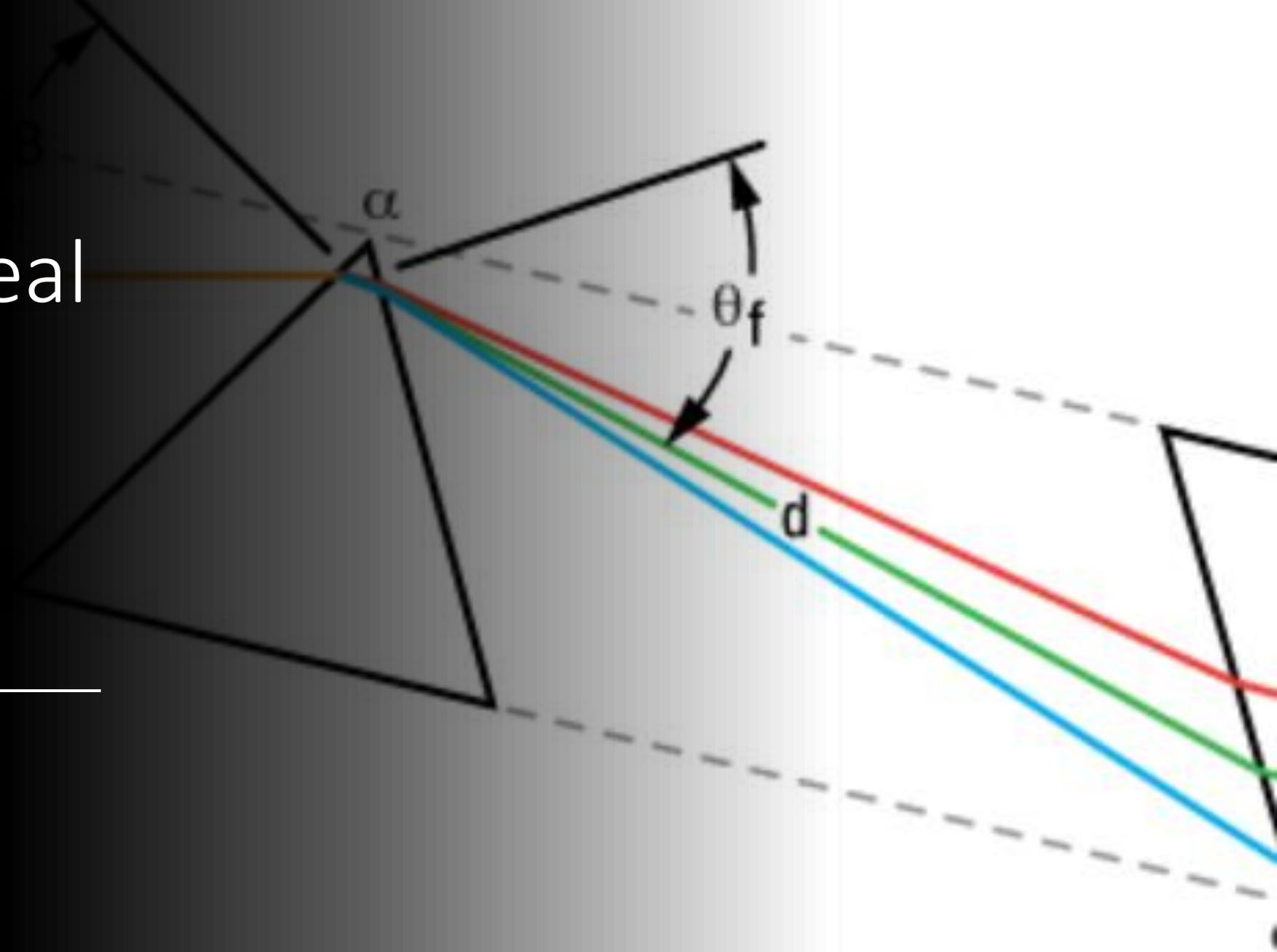
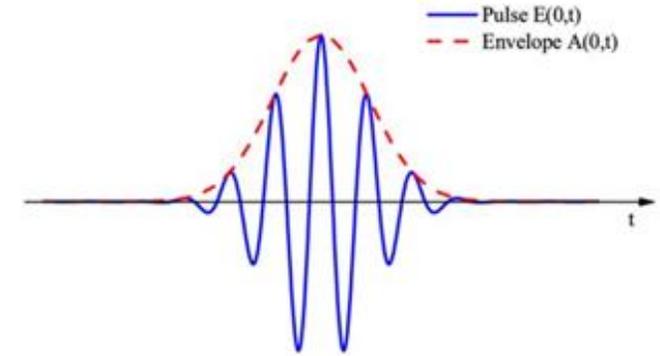
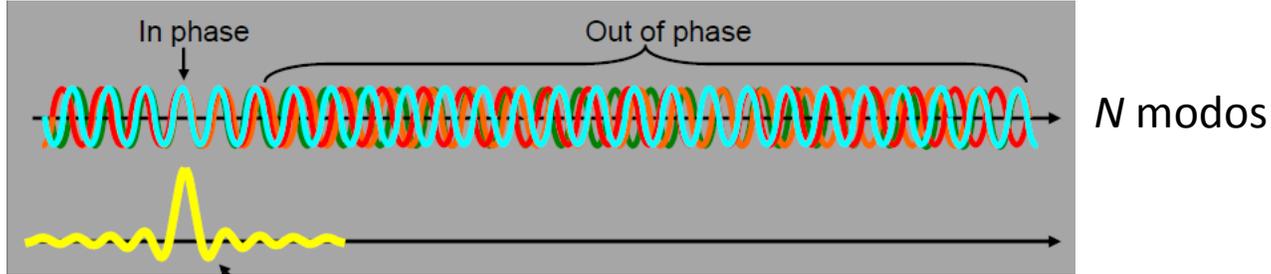


Óptica no lineal
y ultra-rápida

Clase 14



Dispersión de la velocidad de grupo



Escribimos el pulso como producto de una envolvente y una portadora

$$E(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} + c. c. \quad (14.1)$$

donde ω_0 es una “frecuencia promedio”, y la forma de la envolvente $A(t)$ depende de la “diferencia del frecuencia”, ancho espectral. El espectro es la transformada de Fourier de (14.1)

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{-i\omega t} dt \quad (14.2)$$

Las amplitudes complejas $A(t)$ y $A(\omega)$ las podemos escribir como

$$(14.3) \quad \begin{aligned} A(t) &= |A(t)| e^{i\theta(t)} \\ A(\omega) &= |A(\omega)| e^{i\Phi(\omega)} \end{aligned}$$

donde decimos que:

Si $\theta = cte \Rightarrow$ el pulso está libre de modulación de fase

Si $\Phi = cte \Rightarrow$ el pulso está limitado por ancho de banda

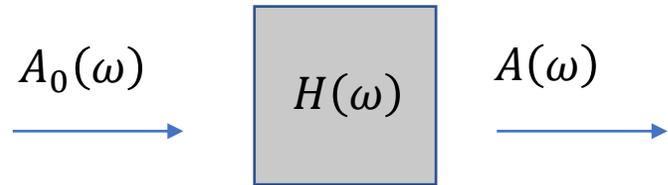
Dispersión de la velocidad de grupo

$$(14.3) \quad A(t) = |A(t)| e^{i\theta(t)}$$

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\Phi(\omega)}$$

Si hay una variación no trivial de la fase $\theta(t)$ o $\Phi(\omega)$ decimos que el pulso está “chirpeado” (la palabra viene de “chirp”, un sonido corto, intenso y con barrido en frecuencia, especialmente en pájaros. Chirrido?)

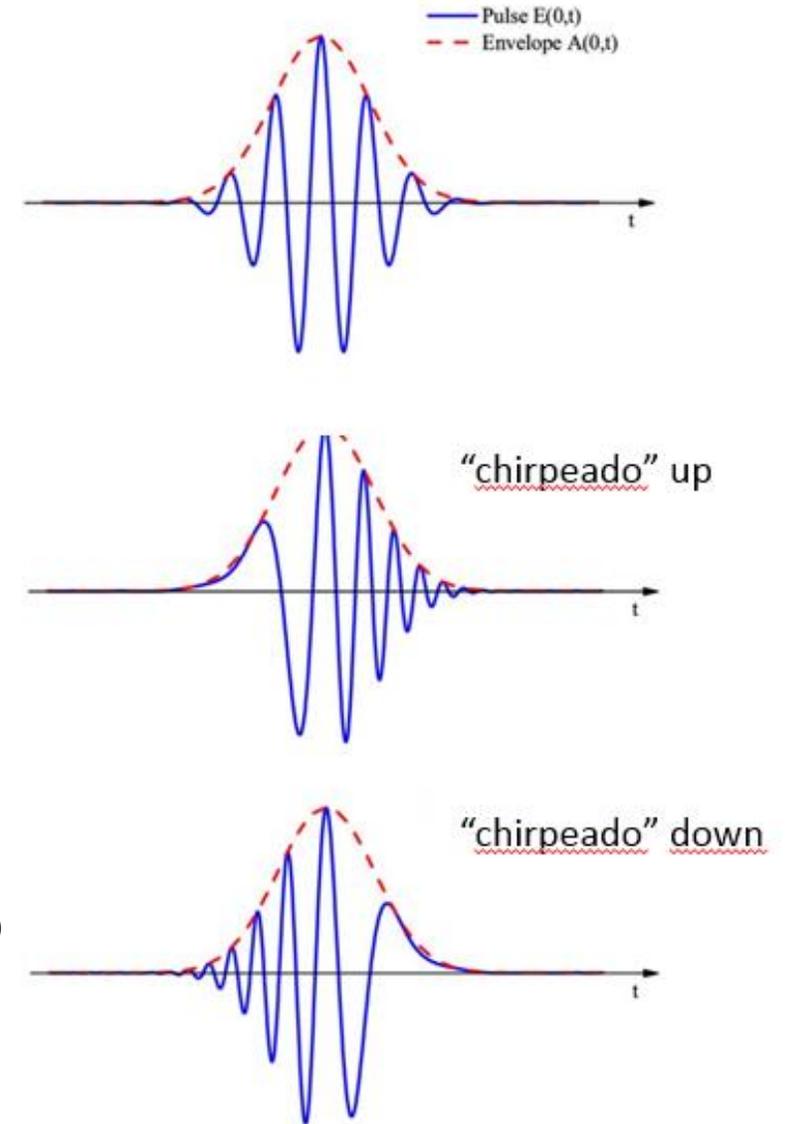
El efecto de un elemento óptico pasivo, como una ventana, una lente, un filtro, etc sobre el pulso que incide en él, se puede pensar como una función transferencia en el espacio de las frecuencias $H(\omega)$



$$(14.4) \quad A(\omega) = H(\omega)A_0(\omega) = B(\omega)e^{i\Phi_H(\omega)}A_0(\omega) = B(\omega)e^{i\Phi_H(\omega)}|A_0(\omega)| e^{i\Phi_0(\omega)}$$

Se pueden sumar las fases espectrales $\Phi = \Phi_H + \Phi_0$ (14.5)

(suma que no se puede hacer con las fases temporales)



Dispersión de la velocidad de grupo

Si el pulso se propaga una distancia L en el material dispersivo de índice de refracción $n(\omega)$, entonces (si $\Phi_0=0$)

$$\Phi(\omega) = k(\omega)L = \frac{\omega}{c}n(\omega)L \quad (14.6)$$

dependiendo de la forma funcional de $\Phi(\omega)$, se producen diferentes tipos de distorsión de fase, y consecuentemente distorsión del pulso. Si se conoce el tipo de distorsión que produce el sistema, se puede realizar algún tipo de compensación que recupere las características del pulso original

Si escribimos (14.6) como una expansión de Taylor alrededor de la frecuencia de la portadora ω_0

$$\Phi(\omega) = k(\omega)L = k(\omega_0)L + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0)L + \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2L + \dots \quad (14.7) \quad \text{donde } k^n(\omega) \text{ es la derivada n-ésima respecto de } \omega$$

$k(\omega_0) = \frac{\omega_0}{v_p(\omega_0)}$
↓
velocidad de fase

$k'(\omega_0) = \frac{1}{v_g(\omega_0)}$
↓
velocidad de grupo

$k''(\omega_0) = \frac{1}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Big|_{\omega_0}$
↓
dispersión de la velocidad de grupo **GVD**

no distorsiona el pulso

distorsiona el pulso

(14.8)

Dispersión del retardo de grupo

Retardo de grupo

Para entender el papel de cada uno de los términos de (14.7), es más fácil ponerlo en términos del retardo de grupo τ_g y hacer Taylor

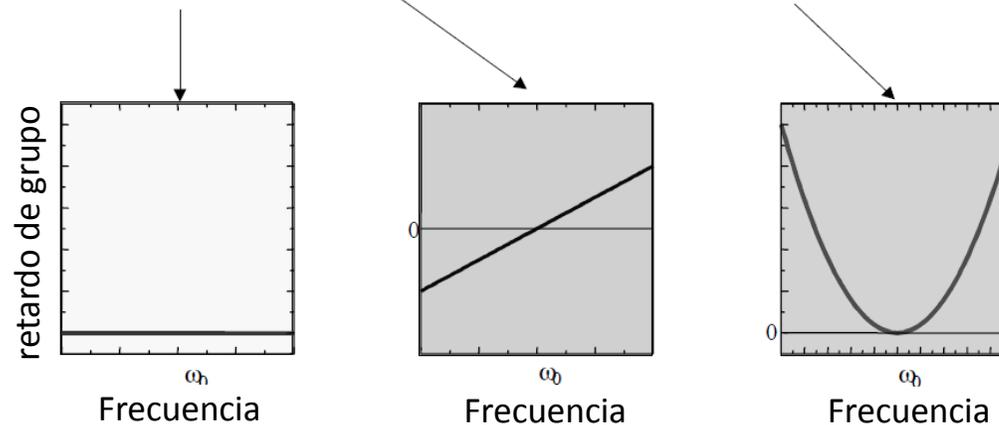
$$\tau_g(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = \frac{d\Phi}{d\omega}(\omega_0) + \frac{d^2\Phi}{d\omega^2}(\omega_0) \times (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^3\Phi(\omega)}{d\omega^3}(\omega_0) \times (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^4\Phi(\omega)}{d\omega^4}(\omega_0) \times (\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (14.9)$$

El primer término de (14.9) viene del segundo término de (14.7) y así siguiendo. Por ejemplo, el segundo término hace que el pulso tenga un barrido lineal con la frecuencia del retardo de grupo y que depende de la segunda derivada de la fase con la frecuencia (**GDD**)

$$\text{GDD} = \text{GVD} L$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{d\Phi}{d\omega}(\omega_0) + \frac{d^2\Phi}{d\omega^2}(\omega_0) \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^3\Phi}{d\omega^3}(\omega_0) \cdot (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (14.10)$$

Cada componente espectral del pulso como se atrasa o adelanta respecto de otra o de la portadora

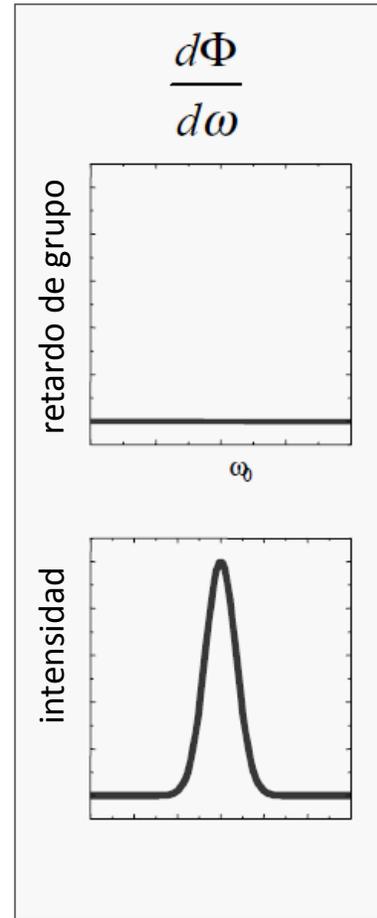


Dispersión del retardo de grupo

Cuál es el efecto sobre el pulso?

Para el caso de segundo orden si $\frac{d^2\Phi}{d\omega^2}(\omega_0) > 0$ las frecuencias menores se adelantas respecto de las mayores, es decir que el rojo se va para el frente del pulso y el azul para la cola. Para este caso la simetría del pulso se conserva

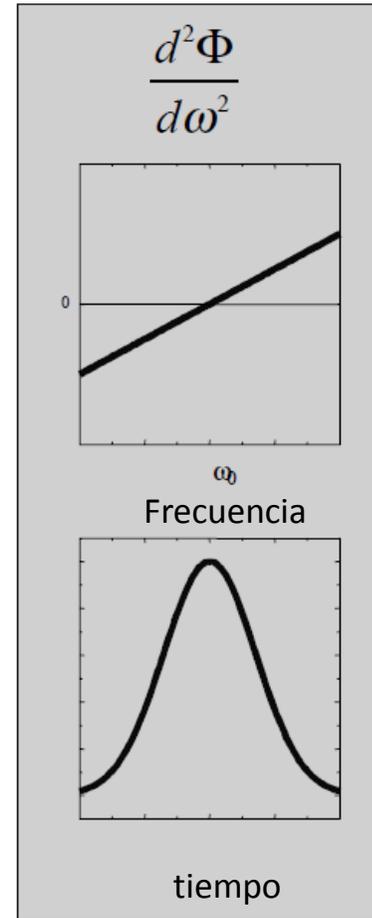
unidades de tiempo (fs)



no distorsiona el pulso

GDD

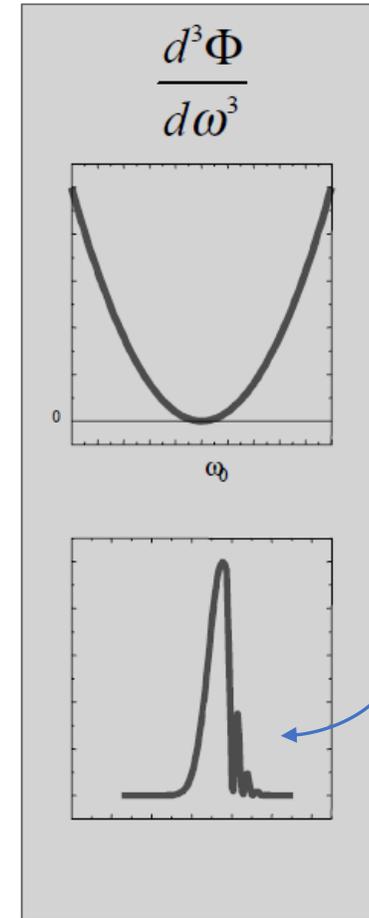
unidades de tiempo² (fs²)



distorsionan el pulso

TOD (third order disp.)

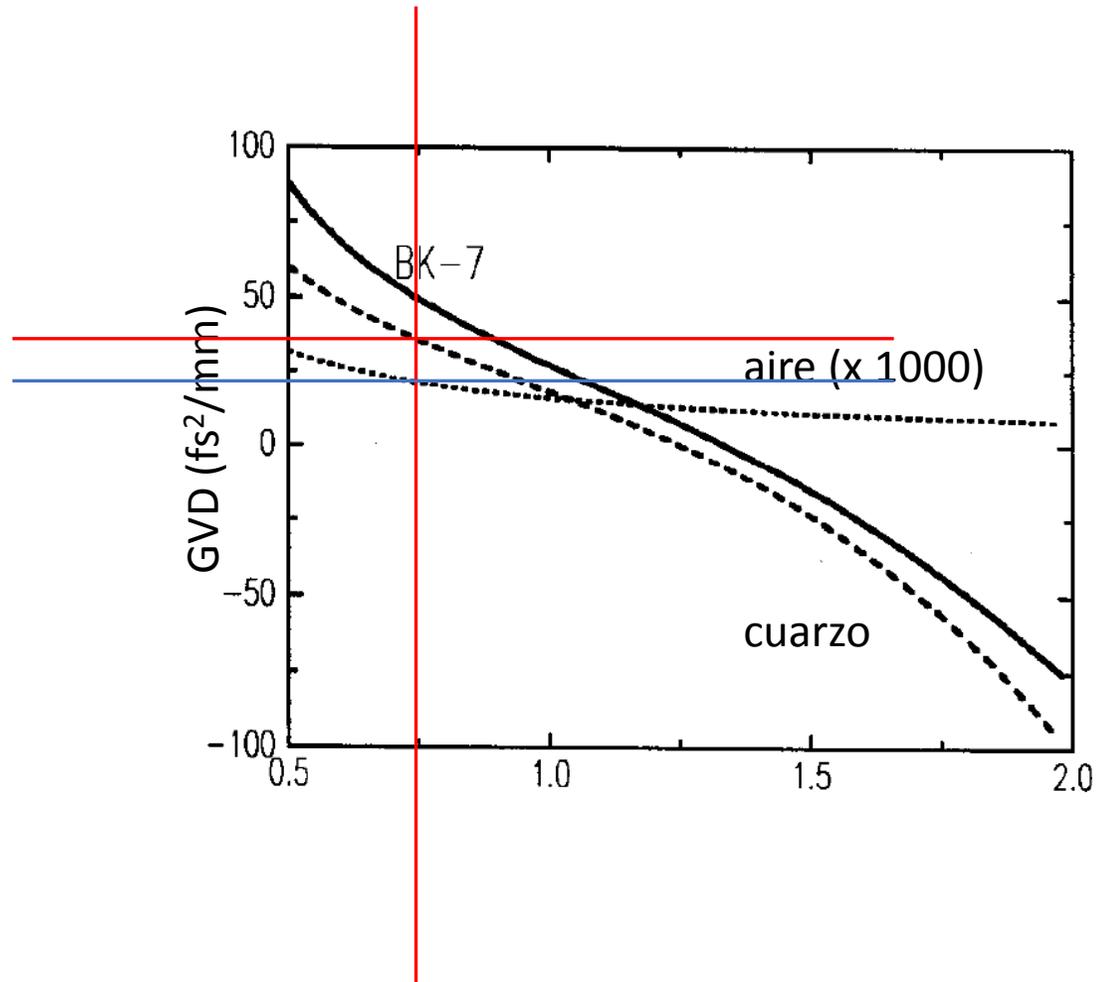
unidades de tiempo³ (fs³)



TOD Tanto las frec mayores como las menores se atrasan \Rightarrow se produce un batido en la cola del pulso

Dispersión del retardo de grupo

Ejemplo de parámetros materiales para vidrio, cuarzo y aire



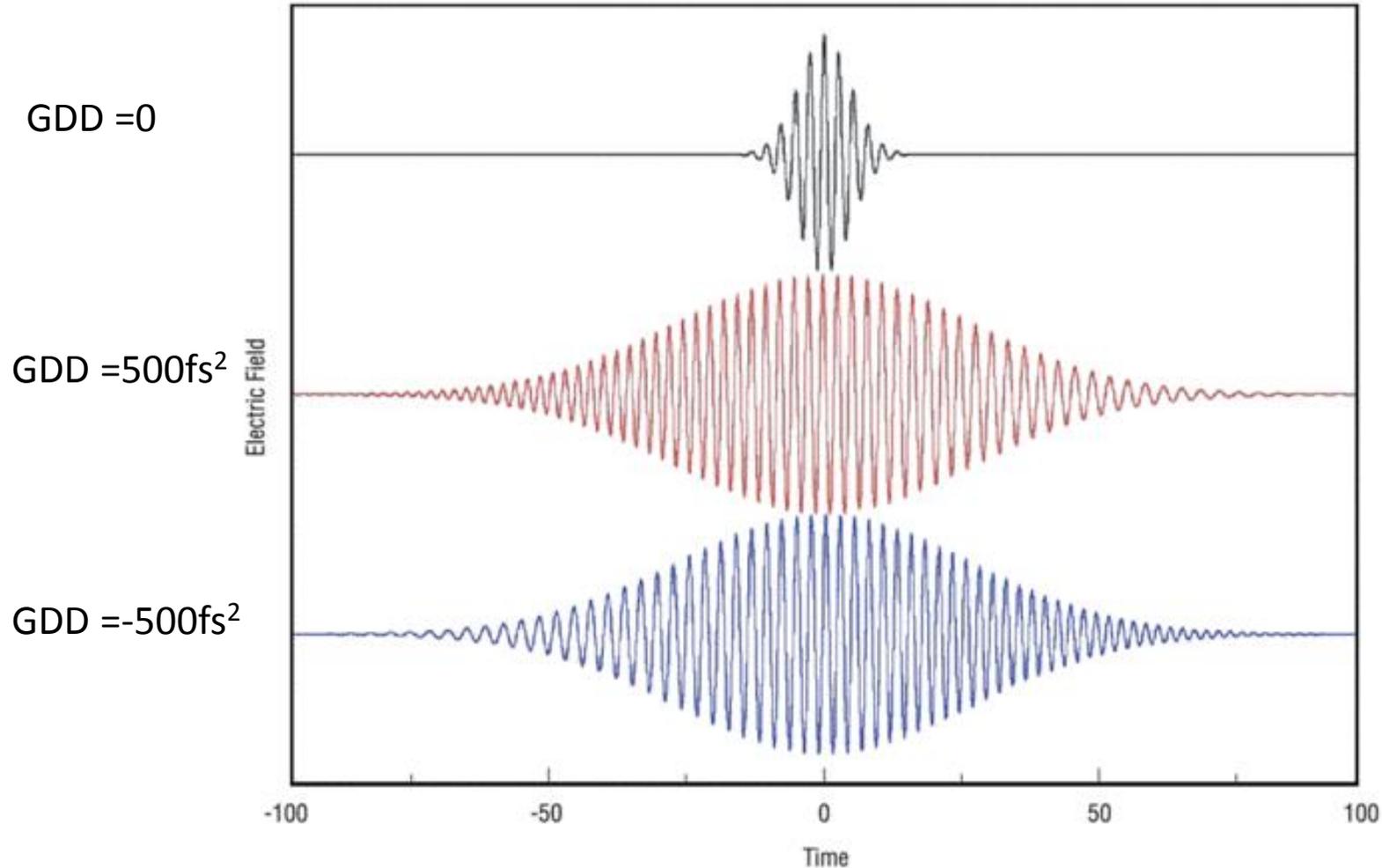
A 750nm

para BK7 $\sim 33 \text{ fs}^2/\text{mm}$
para aire $\sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ fs}^2/\text{mm}$

1mm de BK7 equivale a
1.6m de aire!

Dispersión del retardo de grupo

Pulso de 100nm de ancho de banda, a 800nm longitud de onda



<http://halas.rice.edu/conversions>

unidades

limitado por transformada
 $\Delta\nu \cdot T_p = 0.44$ (gaussiano)
 $T_p = 9$ fs

$\nu[850nm] - \nu[750nm]$, en THz

~ 10 mm de vidrio BK7



Dispersión del retardo de grupo

Material	λ (nm)	$n(\lambda)$	$dn/d\lambda$ (μm^{-2})	$d^2n/d\lambda^2$ (μm^{-2})	$d^3n/d\lambda^3$ (μm^{-2})	GVD (fs^2/mm)	TOD (fs^3/mm)
Fused Silica	400	1.4701	-0.1091	0.8609	-9.5997	97.43	30.2
	450	1.4656	-0.0758	0.5115	-4.9839	82.43	27.24
	500	1.4623	-0.0554	0.323	-2.8089	71.4	25.53
	550	1.4599	-0.0422	0.2135	-1.686	62.82	24.62
	600	1.458	-0.0333	0.1462	-1.0639	55.85	24.28
	650	1.4565	-0.0272	0.1029	-0.6993	49.98	24.42
	700	1.4553	-0.0228	0.074	-0.4755	44.87	24.99
	750	1.4542	-0.0196	0.054	-0.3328	40.3	25.99
	800	1.4533	-0.0173	0.0399	-0.2388	36.11	27.44
	850	1.4525	-0.0156	0.0296	-0.1751	32.18	29.36

Material	λ (nm)	$n(\lambda)$	$dn/d\lambda$ (μm^{-2})	$d^2n/d\lambda^2$ (μm^{-2})	$d^3n/d\lambda^3$ (μm^{-2})	GVD (fs^2/mm)	TOD (fs^3/mm)
N-BK7	400	1.5308	-0.1332	1.0768	-12.3136	121.87	40.71
	450	1.5253	-0.0917	0.6329	-6.2713	101.98	35.53
	500	1.5214	-0.0665	0.397	-3.4914	87.77	32.52
	550	1.5185	-0.0503	0.2615	-2.0782	76.94	30.78
	600	1.5163	-0.0395	0.1788	-1.3036	68.29	29.89
	650	1.5145	-0.0319	0.1258	-0.853	61.11	29.64
	700	1.5131	-0.0266	0.0906	-0.5781	54.95	29.93
	750	1.5118	-0.0227	0.0664	-0.4035	49.51	30.73
	800	1.5108	-0.0198	0.0492	-0.2889	44.59	32.03
	850	1.5098	-0.0177	0.0369	-0.2114	40.03	33.86

Material	λ (nm)	$n(\lambda)$	$dn/d\lambda$ (μm^{-2})	$d^2n/d\lambda^2$ (μm^{-2})	$d^3n/d\lambda^3$ (μm^{-2})	GVD (fs^2/mm)	TOD (fs^3/mm)
N-SF10	400	1.7783	-0.5472	6.0995	-102.657	690.32	546.73
	450	1.7569	-0.3345	2.9304	-37.7789	472.22	315.81
	500	1.7432	-0.2245	1.6362	-17.3375	361.69	220.47
	550	1.7337	-0.1603	1.0027	-9.1104	295.01	171.92
	600	1.7267	-0.1196	0.6548	-5.2463	250.13	143.87
	650	1.7215	-0.0925	0.448	-3.2284	217.58	126.33
	700	1.7174	-0.0736	0.3176	-2.0898	192.65	114.87
	750	1.714	-0.06	0.2316	-1.408	172.75	107.26
	800	1.7113	-0.05	0.1726	-0.9802	156.31	102.31
	850	1.709	-0.0424	0.1311	-0.7012	142.35	99.32

material	λ [nm]	$n(\lambda)$	$\frac{dn}{d\lambda} \cdot 10^{-2} \left[\frac{1}{\mu\text{m}} \right]$	$\frac{d^2n}{d\lambda^2} \cdot 10^{-1} \left[\frac{1}{\mu\text{m}^2} \right]$	$\frac{d^3n}{d\lambda^3} \left[\frac{1}{\mu\text{m}^3} \right]$	$T_g \left[\frac{\text{fs}}{\text{mm}} \right]$	$GVD \left[\frac{\text{fs}^2}{\text{mm}} \right]$	$TOD \left[\frac{\text{fs}^3}{\text{mm}} \right]$
Sapphire	400	1,7866	-17,20	13,55	-15,05	6189	153,62	47,03
	500	1,7743	-8,72	5,10	-4,42	6064	112,98	39,98
	600	1,7676	-5,23	2,32	-1,68	6001	88,65	37,97
	800	1,7602	-2,68	0,64	-0,38	5943	58,00	42,19
	1000	1,7557	-1,92	0,20	-0,12	5921	35,33	57,22
	1200	1,7522	-1,70	0,04	-0,05	5913	13,40	87,30
Quartz	300	1,4878	-30,04	34,31	-54,66	5263	164,06	46,49
	400	1,4701	-11,70	9,20	-10,17	5060	104,31	31,49
	500	1,4623	-5,93	3,48	-3,00	4977	77,04	26,88
	600	1,4580	-3,55	1,59	-1,14	4934	60,66	25,59
	800	1,4533	-1,80	0,44	-0,26	4896	40,00	28,43
	1000	1,4504	-1,27	0,14	-0,08	4880	24,71	38,73
	1200	1,4481	-1,12	0,03	-0,03	4875	9,76	60,05

Propagación de pulsos gaussianos

Para el caso en el que el pulso tiene un perfil gaussiano (que es una buena aproximación para cualquier pulso corto) es posible encontrar la expresión analítica del perfil del pulso de salida, teniendo en cuenta el efecto de dispersión de segundo orden. Consideremos un pulso dado por

$$(14.11) \quad E(t) = E_0 \exp(-(t/\tau_{HW})^2) e^{i\omega_0 t} + c. c. = E_0 \exp\left(-2 \ln 2 (t/T_p)^2\right) e^{i\omega_0 t} + c. c.$$

Se transforma Fourier el pulso (14.11) y se suma la fase cuadrática

$$(14.12) \quad \Phi(\omega)_c = \frac{d^2\Phi(\omega_0)}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2$$

τ_{HW} es el semiancho de pulso del campo
 T_p es el ancho a mitad de altura de intensidad, τ_{FWHM}

Y se antitransforma, quedando

$$E_{\text{out}}(t) = \frac{E_0}{\left(1 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}\right)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{t^2}{4b\left(1 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}\right)}\right) \exp[i(\omega_0 t + \Phi_{\text{out}}(t))] + c. c. \quad (14.13)$$

$$\text{con } \Phi'' = \frac{d^2\Phi(\omega_0)}{d\omega^2}; \quad b = \frac{T_p^2}{8 \ln 2}; \quad \Phi_{\text{out}}(t) = \Phi'' \frac{t^2}{2\Phi''^2 + 8b^2} + \frac{1}{2} \text{arctg}\left(-\frac{\Phi''}{2b}\right) \quad (14.14)$$

Propagación de pulsos gaussianos

Para el caso en el que el pulso tiene un perfil gaussiano (que es una buena aproximación para cualquier pulso corto) es posible encontrar la expresión analítica del perfil del pulso de salida, teniendo en cuenta el efecto de dispersión de segundo orden. Consideremos un pulso dado por

$$(14.11) \quad E(t) = E_0 \exp(-(t/\tau_{HW})^2) e^{i\omega_0 t} + c. c. = E_0 \exp\left(-2 \ln 2 (t/T_p)^2\right) e^{i\omega_0 t} + c. c.$$

Se transforma Fourier el pulso (14.11) y se suma la fase cuadrática

$$(14.12) \quad \Phi(\omega)_c = \frac{d^2\Phi(\omega_0)}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2$$

τ_{HW} es el semiancho de pulso del campo
 T_p es el ancho a mitad de altura de intensidad, τ_{FWHM}

Y se antitransforma, quedando

$$E_{\text{out}}(t) = \frac{E_0}{\left(1 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}\right)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{t^2}{4b\left(1 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}\right)}\right) \exp[i(\omega_0 t + \Phi_{\text{out}}(t))] + c. c. \quad (14.13)$$

$$\text{con } \Phi'' = \frac{d^2\Phi(\omega_0)}{d\omega^2}; \quad b = \frac{T_p^2}{8 \ln 2}; \quad \Phi_{\text{out}}(t) = \Phi'' \frac{t^2}{2\Phi''^2 + 8b^2} + \frac{1}{2} \text{arctg}\left(-\frac{\Phi''}{2b}\right) \quad (14.14)$$

Se pueden relacionar los anchos de pulso antes y después de la dispersión

Duración del pulso de salida

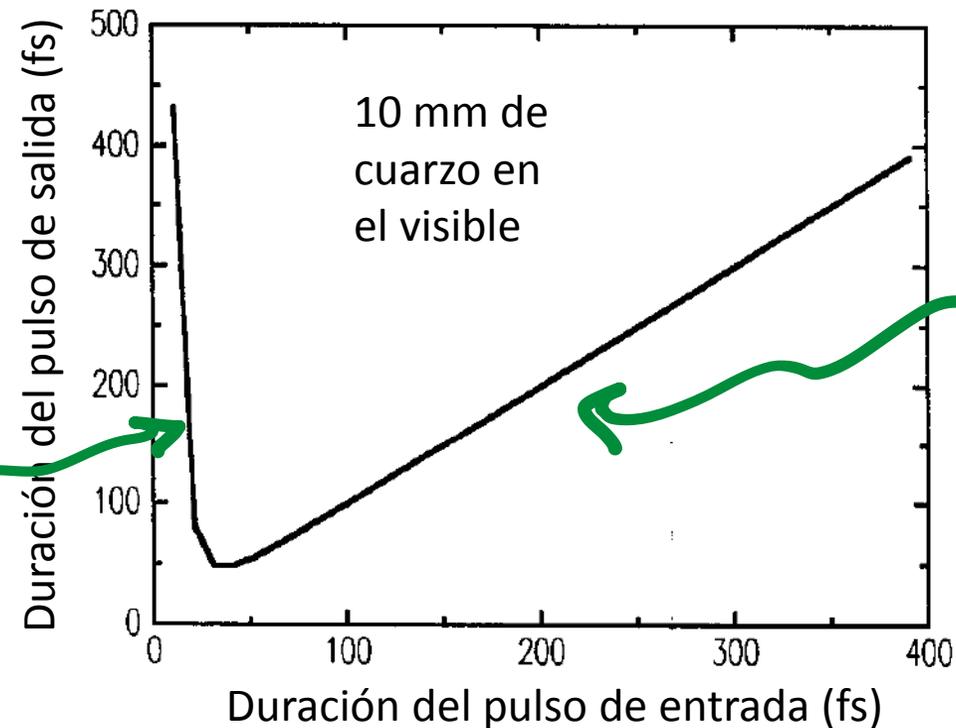
Y queda que

(14.15)

$$T_{out} = T_P \cdot \sqrt{1 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}} = T_P \cdot \sqrt{1 + \frac{16 (\ln 2)^2 \Phi''^2}{T_P^4}}$$

con

$$b = \frac{T_p^2}{8 \ln 2}$$
$$\Phi'' = \frac{d^2 \Phi(\omega_0)}{d\omega^2} \equiv \Phi_2$$



Pulsos cortos:
Ensanchamiento notable del pulso de salida, y cada vez más pronunciado cuanto más corto es el pulso de entrada

Pulsos “largos”:
los pulsos de entrada y de salida tienen la misma duración

Barrido en frecuencia o *chirp*

Mirando la ecuación (14.13) vemos que hay además una fase dependiente del tiempo $\exp[i(\omega_0 t + \Phi_{\text{out}}(t))]$ dada por la ecuación (14.14).

$$\Phi_{\text{out}}(t) = \Phi'' \frac{t^2}{2\Phi''^2 + 8b^2} + \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{\Phi''}{2b}\right) \quad b = \frac{T_p^2}{8 \ln 2}$$

Que produce un barrido en frecuencia o chirp que podemos calcular como

$$\omega(t) = \frac{d(\omega_0 t + \Phi_{\text{out}}(t))}{dt} = \omega_0 + \frac{2\Phi''}{2\Phi''^2 + 8b^2} \cdot t \quad (14.16)$$

La frecuencia del pulso de salida aumenta linealmente con el tiempo, y si $\Phi'' > 0$, tiene un barrido lineal positivo.

⇒ un pulso gaussiano que atraviesa un material con dispersión también tiene un término de *chirp*

Es importante conocer los efectos de la dispersión en pulsos *chirpeados* ya que es posible construir situaciones donde la dispersión debido a la propagación compense el *chirp* del pulso, reduciendo su duración.

Propagación de pulsos con *chirp*

Supongamos ahora que tenemos un pulso gaussiano con barrido lineal en frecuencia (*chirp* lineal) entrando en un material. Podemos escribir ese pulso como

$$E(t) = E_0 \exp\left(-2 \ln 2 (t/T_p)^2\right) \exp\left[i\left(\omega_0 t + \frac{\delta_\omega}{2T_p} t^2\right)\right] + c. c. \quad (14.17)$$

donde δ_ω es el coeficiente de *chirp* o de barrido en frecuencia.

Transformando Fourier (14.17) y agregando una fase cuadrática $\Phi(\omega)_c$ como (14.12) y volviendo a antitransformar se obtiene una expresión para el campo de donde se puede extraer el ancho de pulso de salida como hicimos en (14.13)

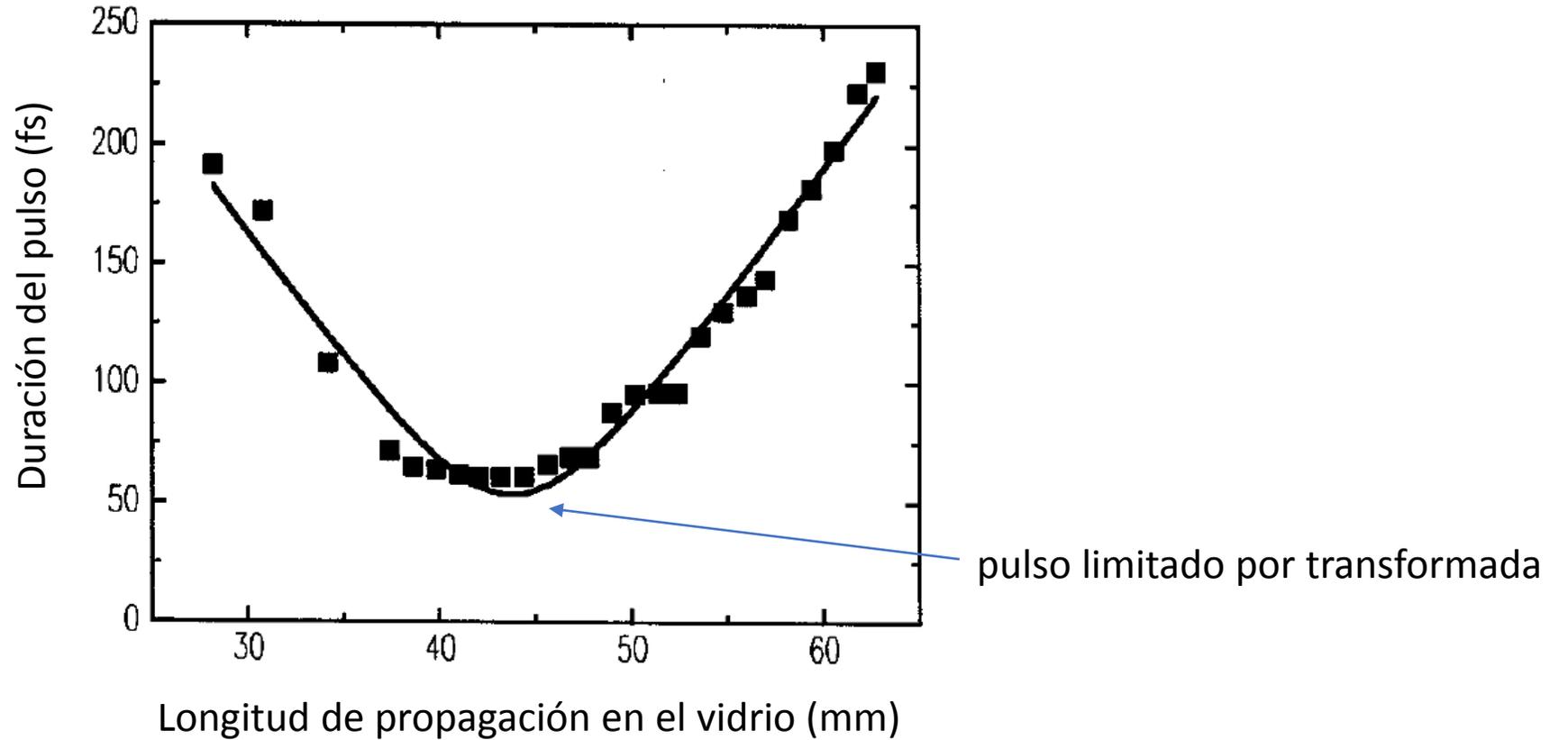
$$(14.18) \quad T_{out} = T_p \cdot \sqrt{\left(1 - \Phi'' \frac{\delta_\omega}{T_p}\right)^2 + \frac{\Phi''^2}{4b^2}}$$
$$b = \frac{T_p^2}{8 \ln 2}$$
$$\Phi'' = \frac{d^2 \Phi(\omega_0)}{d\omega^2} \equiv \Phi_2$$

Que es una expresión generalizada de (14.15) para pulsos gaussianos inicialmente con *chirp* (que se propagan por un material con dispersión cuadrática). Si $\delta_\omega=0$ se recupera (14.15)

Dependiendo en como sean Φ'' y δ_ω el pulso puede salir mas corto o más largo que a la entrada. Si $GDD>0$ y $\delta_\omega>0$, el pulso se ensancha, pero si $GDD>0$ y $\delta_\omega <0$ el pulso se acorta hasta un valor mínimo y luego se ensancha.

Propagación de pulsos con *chirp*

Ejemplo

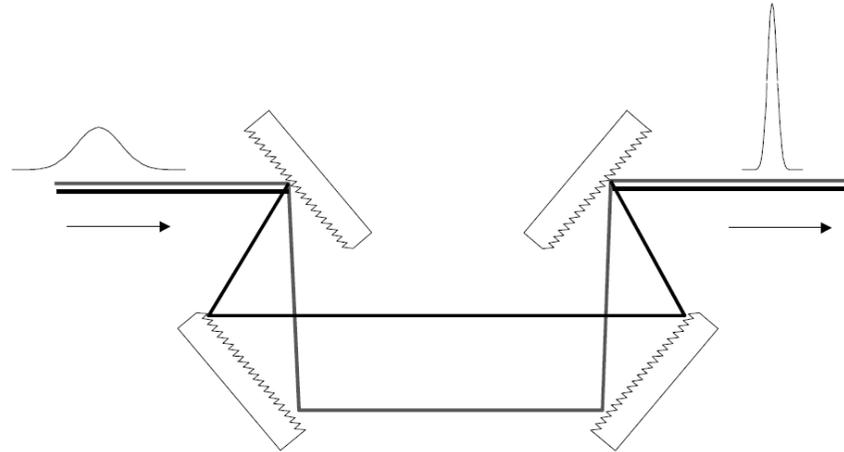


Pulso con *chirp* negativo propagándose por un material de vidrio SF10

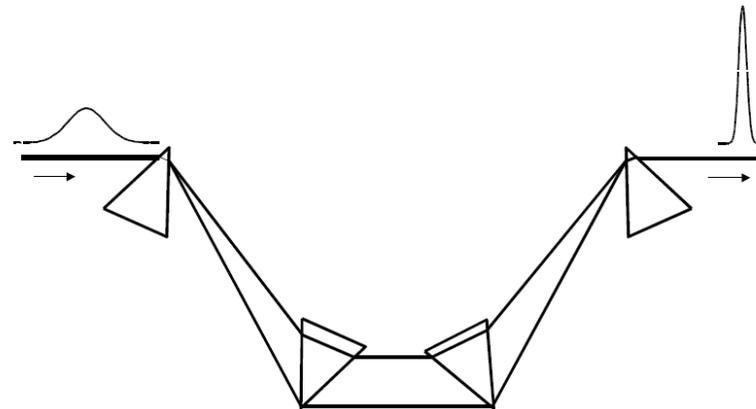
Compensación del *chirp*. Compresores de pulsos

En la región visible, la compensación de dispersión debida a medios materiales, requiere sistemas con dispersión de retardo de grupo negativo, $GDD < 0$. Como la mayoría de los medios materiales producen $GDD > 0$ es necesario recurrir al uso de la dispersión geométrica. Los sistemas más importantes para este propósito son:

✓ 4 redes de difracción



✓ 4 prismas



Compresores de pulsos

La dispersión angular da siempre un GDD negativo (ya sea con prismas o con redes)

Vamos a considerar la GDD solo debida a la dispersión angular $\theta(\omega)$ y no aquella debida al material del prisma

Tomando la proyección de $\vec{k}(\omega)$ sobre el "eje óptico" (la dirección de aquel rayo que no se desvía), una dada frecuencia ω ve una fase $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \vec{k}(\omega) \cdot \vec{r}_{oa} = k(\omega)z \cos[\theta(\omega)] = \frac{\omega}{c} z \cos[\theta(\omega)] \quad (14.19)$$

⇒

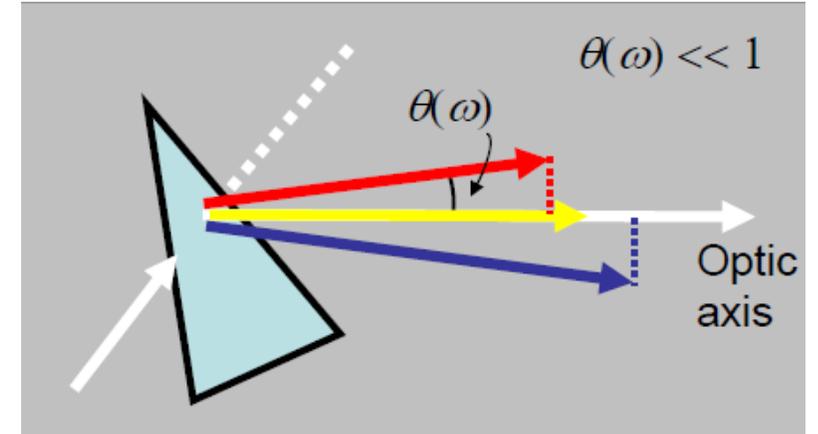
$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{z}{c} \cos \theta - \frac{\omega}{c} z \sin \theta \frac{d\theta}{d\omega} \quad (14.20)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = -\frac{z}{c} \sin \theta - \frac{z}{c} \sin \theta \frac{d\theta}{d\omega} - \omega \frac{z}{c} \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\omega} \right)^2 - \omega \frac{z}{c} \sin \theta \frac{d^2\theta}{d\omega^2} \quad (14.21)$$

si $\theta \ll 1$

$$\Rightarrow GDD = \left. \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \approx -\omega_0 \frac{z}{c} \left(\left. \frac{d\theta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right)^2 \quad (14.22)$$

GDD debido a dispersión angular es siempre NEGATIVA



Compresor de prismas

R. L. Fork, O. E. Martinez, and J. P. Gordon, "Negative dispersion using pairs of prisms", *Opt. Lett.* **9**, 150-152 (1984).

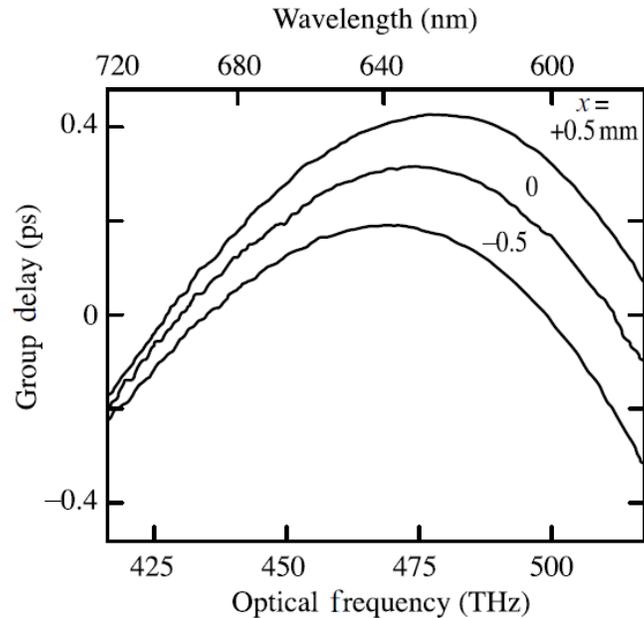
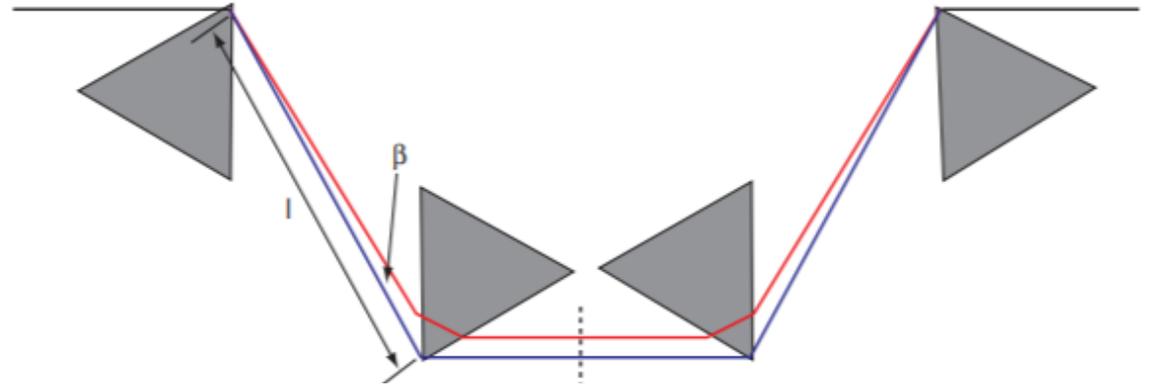


Figure 4.10 Group delay vs. frequency data for an SF-glass prism pair. The prism insertion into the beam is characterized by a relative translation (x) perpendicular to the prism base, with larger x corresponding to more glass in the beam. From [97].



$$GDD_{PRISM} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[4l \left\{ \left[\frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \left(2n - \frac{1}{n^3} \right) \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \right] \sin \beta - 2 \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \cos \beta \right\} + 4 \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right) (2D_{1/e^2}) \right]$$

Para β pequeño:

negativo

positivo

$$GDD_{PRISM} \approx \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[-4l \left\{ 2 \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \right\} + 4 \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right) (2D_{1/e^2}) \right]$$

Donde D_{1/e^2} es el diámetro del haz en $1/e^2$

$$\frac{dn}{d\lambda} \quad \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$$

Salen de las ec de Sellmeier