

**Física del plasma**  
**2do cuatrimestre de 2012**  
**Guía de problemas nro 1**

**Problema 1)**

a) Determine la distribución de densidades electrónica e iónica y de potencial electrostático en un plasma en equilibrio (procediendo como se hizo para introducir la longitud de Debye). Suponga variaciones en sólo una coordenada cartesiana  $x$ , que en  $x = 0$  existe una pared a un potencial  $\phi_0$ , y que muy lejos de ésta el plasma es neutro y tiene potencial  $\phi = 0$  (el plasma ocupa la región  $x > 0$ ).

b) Considere ahora que, debido al movimiento térmico, en cada sección  $x = \text{cte}$ , pasa de derecha a izquierda un flujo de electrones (nro de part./m<sup>2</sup>s) de valor  $n_e \sqrt{T/(2\pi m_e)}$ , y uno de iones de valor  $n_i \sqrt{T/(2\pi m_i)}$ . En equilibrio, si forma parte de un objeto aislado, la pared en  $x = 0$  no puede acumular carga neta, por lo que la corriente eléctrica que llega a ella debe ser nula. Con esta consideración, usando además lo obtenido en a), determine el potencial  $\phi_0$  que ha alcanzado la pared en el equilibrio.

**NOTA:** Este tratamiento es muy aproximado, pero el resultado se compara muy bien con el valor del potencial (respecto del plasma) que alcanza un objeto aislado inmerso en un plasma (denominado potencial flotante).

**Problema 2)**

Para confinar un plasma de presión  $p = nT$  se requiere un campo magnético de intensidad  $B$  dada por

$$p = p_0 \left( \frac{B}{B_0} \right)^2,$$

donde  $p_0 \approx 4 \text{ atm} \approx 4 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ , y  $B_0 = 1 \text{ T}$ . Usando la condición de autosostenimiento de un plasma en un reactor de fusión:  $nT\tau_E > 3 \times 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ keVs}$ , determine los tiempos mínimos de confinamiento (o de pérdida de energía) necesarios en función de  $B$ , y en particular, cuánto vale para  $B \approx 1 \text{ T}$ , que es un valor típico, y para  $B \approx 10 \text{ T}$ , que es un valor considerado límite con la tecnología actual.

**Problema 3)**

En la figura se muestran en zona grisada los cinturones de radiación de Van Allen. Estos cinturones son espejos magnéticos naturales en los que son atrapadas las partículas (electrones y protones) generadas por rayos cósmicos o provenientes de eyecciones solares. Considerando el campo magnético de la tierra como dipolar, con valor  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$  en el polo (sobre la superficie de la tierra, de radio  $R_T$ ),

a) Calcule la posición de los puntos de retorno del movimiento de espejo magnético de los protones de energía  $E_0$  que en el ecuador magnético están a una distancia  $r$  del centro de la tierra. Suponga que sobre el ecuador magnético es  $W_{\parallel} = W_{\perp} = E_0/2$ . Estime además el período de este movimiento, y particularice para  $E_0 = 1 \text{ MeV}$  y  $r = 4R_T$ . (Compare con lo mostrado en la figura)

b) Calcule el tiempo que le lleva a los protones considerados en a) dar una vuelta a la tierra debido a la deriva de curvatura y gradiente (tome valores sobre el ecuador magnético solamente).

c) Considerando que en  $r = 4R_T$  se tienen protones de  $1 \text{ MeV}$  y electrones de  $100 \text{ keV}$ , ambos con densidades de  $10^7 \text{ m}^{-3}$ , calcule la corriente de deriva de curvatura y gradiente sobre el ecuador magnético (la denominada corriente de anillo). Estime el campo magnético generado por esta corriente cerca de la superficie terrestre.

d) Argumente porqué la conservación del invariante  $J_2$  asegura que en su viaje de deriva alrededor de la tierra las partículas vuelven a estar sobre la misma línea de campo luego de dar una vuelta completa, a pesar de que las líneas están deformadas por el viento solar y no existe por lo tanto simetría de revolución alrededor del eje geomagnético.

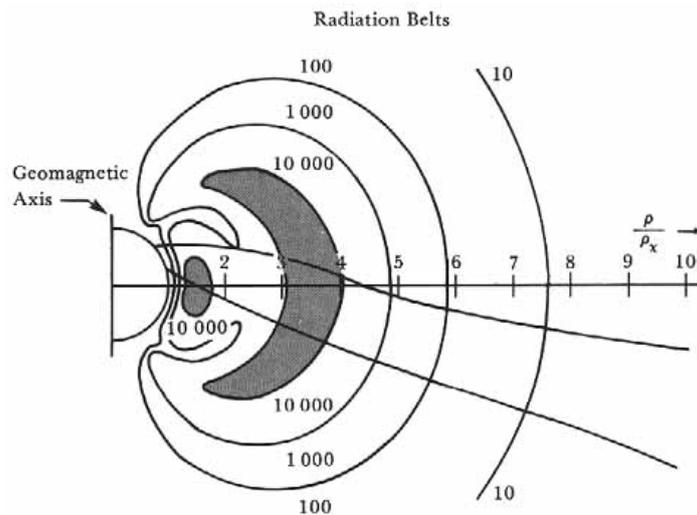
**AYUDA:** En coordenadas esféricas el campo de un dipolo se escribe ( $\theta$  se mide desde el polo norte magnético)

$$\mathbf{B} = \frac{C \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{C \sin \theta}{2r^3} \mathbf{e}_\theta$$

con  $C$  una constante. Las líneas de campo se escriben en cada plano  $\varphi = cte$

$$r = r_0 \sin^2 \theta,$$

donde  $r_0$  es la distancia al origen en el ecuador magnético ( $\theta = \pi/2$ ), que es también el radio de curvatura de la línea en ese punto.



#### Problema 4)

Considere el confinamiento de un plasma por un campo puramente toroidal. Sea  $R$  el radio mayor del toro,  $a$  el menor, y  $B$  un valor característico del campo magnético.

a) Muestre que debido a la deriva de curvatura y gradiente esta configuración no puede confinar partículas individuales, y estime el tiempo característico de pérdida de partículas como  $\tau \approx a/V_D$  (considere  $W_{\parallel} \approx W_{\perp} \approx T$ ,  $T$  es la temperatura).

b) Uno puede argumentar que la deriva considerada en a) deja de producirse cuando la acumulación resultante de cargas en la superficie del plasma genera un campo eléctrico que se opone a ella. Estime entonces el campo eléctrico que se establece en el tiempo característico  $\tau$  por separación de las cargas y acumulación en la superficie, y determine el tiempo característico de pérdida de plasma por la deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  resultante. (Suponga un plasma de hidrógeno de densidad  $n$ )

c) Usando la condición de autosostenimiento del plasma en un reactor de fusión muestre que con valores típicos de  $B \approx 1 \text{ T}$  y  $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$  los tiempos obtenidos están muy lejos de ser suficientes en un reactor de dimensiones razonables.

**Física del plasma**  
**2do cuatrimestre de 2012**  
**Guía de problemas nro 2**

**Problema 1)**

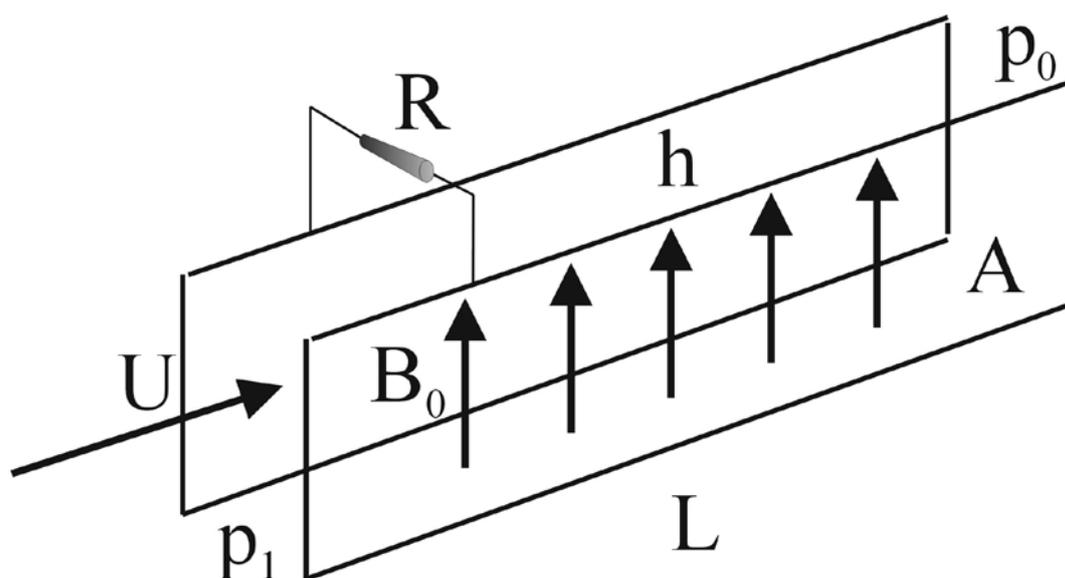
En la figura se muestra el esquema de un generador MHD. En el conducto ingresa plasma con velocidad  $U$  por el extremo con presión  $p_1$ , y egresa por el otro extremo donde la presión es  $p_0$ . Esta diferencia de presión mantiene el plasma circulando por todo el conducto con la misma velocidad. Existe además un campo magnético uniforme  $B_0$  perpendicular a la dirección de la velocidad. Las paredes laterales indicadas (de área  $A$  cada una) son conductoras y están aisladas entre sí, separadas por una distancia  $h$ .

a) Usando las ecuaciones de la MHD no ideal (el plasma tiene resistividad constante  $\eta$ ) determine la densidad de corriente que se establece en condiciones estacionarias en el plasma al conectar eléctricamente las paredes laterales a través de la carga resistiva  $R$  (desprecie el campo magnético generado por esta corriente y los términos de presión electrónica en la ley de Ohm generalizada, y suponga además presión isotrópica).

b) Suponiendo que la presión a la salida se mantiene constante, ¿cuánto debe valer la presión a la entrada  $p_1$  para mantener el plasma circulando a la velocidad  $U$  cuando se conecta la carga  $R$ ? (Note que sin carga no se requiere diferencia de presiones; esto es porque no se incluyeron efectos viscosos, que son importantes cerca de las paredes).

c) Para valores dados de la velocidad y otros parámetros del sistema halle la potencia entregada por el generador a una carga  $R$  genérica y, en particular, el valor máximo de esta potencia. (Note que la potencia máxima escala con el volumen del sistema, mientras que los efectos de pérdida, como rozamiento viscoso en las paredes y transferencia de calor, son efectos de superficie, lo que hace a los generadores MHD ventajosos en la producción de grandes potencias).

d) Muestre que el término de Hall en la ley de Ohm da lugar a un campo eléctrico a lo largo del conducto, y que si entonces se permite la circulación de corriente en esta dirección (por ejemplo poniendo un par de conductores, a lo largo del conducto, conectados a través de una carga resistiva), ésta genera una fem que se opone a la original (degradando el rendimiento del generador).



### Problema 2)

En un espejo magnético el equilibrio posible de plasma tiene en general una distribución de presión anisótropa.

a) Usando la ecuación de movimiento de Parker demuestre que a lo largo de las líneas de campo magnético se debe cumplir

$$\frac{dp_{\parallel}}{dl} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{dB}{dl} = 0,$$

donde  $l$  es la longitud a lo largo de la línea y  $B$  la intensidad del campo magnético, para un plasma en equilibrio (velocidad de fluido nula).

b) Usando el modelo CGL deduzca la ecuación que relaciona la densidad de masa  $\rho$  del plasma con la intensidad del campo magnético (Considere que  $p_{\parallel} = p_{\parallel 0}$ ,  $p_{\perp} = p_{\perp 0}$  y  $\rho = \rho_0$  cuando el campo toma su mínimo valor  $B_0$ ).

c) Resuelva analíticamente la ecuación obtenida en b) para el caso  $p_{\parallel 0} \ll p_{\perp 0}$  y obtenga la distribución de densidad de masa y presiones del plasma en función de la intensidad del campo magnético.

### Problema 3)

Considere una descarga en la que se genera un plasma de densidad uniforme  $n_0$  dentro de un contenedor cilíndrico de radio  $a$  y longitud mucho mayor que  $a$ . El plasma es débilmente ionizado por lo que sólo importan las colisiones con los neutros, y se tiene además que la longitud de Debye es mucho menor que  $a$ . En estas condiciones una buena descripción está dada por la aproximación de difusión ambipolar. Las partículas del plasma difunden hacia las paredes y allí se recombinan por lo que el estado estacionario es mantenido sólo mientras existe la descarga. Se pretende estudiar cómo decae el plasma al apagar la descarga. Suponiendo entonces que sólo hay difusión radial,

a) Escriba la ecuación de evolución de la densidad del plasma y resuélvala por separación de variables considerando que en  $t = 0$  (cuando se apaga la descarga) la densidad es uniforme y vale  $n_0$ , y que en  $r = a$  la densidad es nula.

b) Notando que decae muy rápidamente la contribución de los términos de orden alto de la serie de funciones de Bessel obtenida en a), retenga sólo el orden más bajo y determine así el tiempo característico de decaimiento del plasma.

c) Describa cómo medir el coeficiente de difusión ambipolar de lo obtenido en b) (que es el método usado en la práctica).

### Problema 4)

Considere ahora que la descarga del problema anterior se mantiene en condiciones estacionarias, pero en un contenedor de radio mucho mayor que el radio de los electrodos de la descarga. La densidad del plasma es máxima sobre el eje y decae radialmente. Considerando además que existe un campo magnético uniforme en la dirección axial,

a) Resuelva en condiciones estacionarias la ecuación para la densidad por separación de variables suponiendo una longitud característica  $L$  para las variaciones en la dirección axial. Considere que no hay paredes cercanas en la dirección radial.

b) Determine de lo obtenido en a) el radio característico del plasma (región de densidad apreciable).

c) Calcule el campo eléctrico (componentes axial y radial) y las diferencias de potencial asociadas en la longitud  $L$  y en el radio característico del plasma.

### Problema 5)

Con el fin de modelar una lámina catódica utilice el modelo de dos fluidos en condiciones estacionarias, con temperaturas uniformes (distinta para cada especie) y en una dimensión espacial  $x$ , con su origen en el cátodo y que crece hacia el plasma. El problema es electrostático y el potencial vale  $-V_0$  ( $< 0$ ) en el cátodo ( $x = 0$ ) y cero en el plasma ( $x \rightarrow \infty$ ).

a) Despreciando la inercia de los electrones, la presión iónica y las colisiones electrón-ión determine las densidades de cada especie en términos del potencial y de los valores de las magnitudes en el plasma ( $x \rightarrow \infty$ ).

b) Reemplazando lo obtenido en a) en la ecuación de Poisson se tiene una ecuación no lineal para el potencial  $\phi$ . Obtenga una primera integral de esta ecuación (conviene para esto multiplicarla primero por  $d\phi/dx$ ). Estudiando la ecuación obtenida en el entorno de  $\phi = 0$ , muestre que la velocidad de los iones en el plasma debe superar un valor mínimo (correspondiente a la velocidad de Bohm:  $v_{\text{Bohm}}$ ).

c) La hipótesis de Bohm es que existe una pre-lámina en el plasma que acelera los iones hasta la velocidad mínima  $v_{\text{Bohm}}$ . Use esta hipótesis en la ecuación obtenida en el punto anterior y adimensionalícela apropiadamente (la coordenada espacial con la longitud de Debye, y el potencial con la temperatura y carga electrónicas) para tener una ecuación que pueda integrarse numéricamente, y resuélvala para distintos valores del potencial del cátodo adimensionalizado.

### Problema 6)

Con lo estudiado en el problema 5) puede calcularse el potencial (negativo respecto del plasma) que adquiere un pequeño objeto metálico aislado inmerso en un plasma (potencial flotante).

a) Para un modelo de plasma de dos fluidos, en las mismas condiciones del problema 5), determine la expresión de la densidad de corriente hacia la pared del objeto a potencial  $-V_0$  ( $< 0$ ), ubicada en  $x = 0$ , con la condición que los iones tienen la velocidad de Bohm en el plasma, y que los electrones llegan al objeto por el flujo libre cinético de valor  $n_{e0}v_{Te}/4$ , donde  $n_{e0}$  es la densidad de electrones en la ubicación de la pared ( $x = 0$ ), y  $v_{Te}$  la velocidad térmica:  $v_{Te} = [8T_e/(\pi m_e)]^{1/2}$ .

b) Con la condición que el objeto se carga hasta que su potencial es tal que la corriente colectada es cero, determine dicho potencial respecto del plasma.

### Problema 7)

Una lámina catódica de alto voltaje se forma cuando un electrodo se polariza a potenciales negativos muy intensos respecto del plasma ( $eV_0/T_e \gg 1$ ), de manera que la lámina está prácticamente libre de electrones.

a) Despreciando la densidad de electrones en la ecuación para el potencial obtenida en el problema 5), intégreala analíticamente para obtener  $\phi(x)$ , con la suposición que tanto  $\phi$  como  $d\phi/dx$  son muy pequeños en el plasma, a una distancia  $s$  del cátodo, considerada el ancho de la lámina.

b) Siendo que la corriente hacia el cátodo es debida a sólo los iones, verifique que se cumple la ley de Child:  $j \sim V_0^{3/2}/s^2$  (deducida originalmente para válvulas electrónicas, en las que hay un solo portador de carga, y  $s$  corresponde a la distancia entre electrodos).

c) Determine el ancho  $s$  de la lámina, usando que los iones en el plasma tienen la velocidad de Bohm.

d) Considere porqué las láminas anódicas no pueden ser de alto voltaje, y sólo pueden existir con  $eV_0/T_e \sim 1$ .

**Problema**

El término de colisiones de Fokker-Planck para los electrones de un plasma puede simplificarse mucho con la aproximación de Lorentz, que considera que los electrones sólo interactúan con los iones, los que a su vez se encuentran en reposo y tienen masa infinita. Esto es un buen modelo para los electrones de relativamente alta energía, que son dispersados y frenados en forma similar por iones y electrones, lo que es bien representado por la interacción con sólo los iones quietos. Con estas consideraciones:

a) Elabore el término de colisiones para electrones en la aproximación de Lorentz para probar que puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{col} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{8\pi\epsilon_0^2 m_e^2} \left[ -\frac{2\mathbf{v}}{v^3} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{v} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right) : \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{v}} \right].$$

b) Muestre que el término de colisiones obtenido en a) se anula para cualquier función de distribución isótropa en el espacio de velocidades; esto es, para cualquier  $f_e(v)$  función de sólo el módulo de la velocidad.

c) Se busca ahora resolver la ecuación cinética para un caso estacionario, sin campos electromagnéticos, y suponiendo que se está cerca del equilibrio termodinámico, que es perturbado por sólo un gradiente suave de temperatura electrónica en la dirección  $x$ . Se espera entonces una ligera anisotropía en las velocidades en la dirección  $x$ , por lo que se propone como solución

$$f_e = f_{MB}(v) [1 + \alpha(v)v_x],$$

donde  $\alpha(v)$  es una función "pequeña" de sólo el módulo de la velocidad, y  $f_{MB}(v)$  es la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_{MB}(v) = \frac{n_e}{[2\pi T_e(x)/m_e]^{3/2}} \exp\left[-\frac{m_e v^2}{2T_e(x)}\right].$$

Proponiendo entonces que  $\alpha(v)$  y  $\partial T_e / \partial x$  son cantidades de primer orden, linealice la ecuación cinética y obtenga la expresión explícita de  $\alpha(v)$ . Note que la evaluación del término de colisiones se simplifica grandemente sabiendo que este término se anula para cualquier función isótropa, por lo que sólo contribuyen los términos en los que se efectúa alguna derivada respecto de la  $v_x$  explícita en la expresión de  $f_e$  propuesta.

d) Utilice la solución obtenida para evaluar el flujo de calor transportado por los electrones en la dirección  $x$ :  $q_x = 1/2 \int m_e v^2 v_x f_e d^3 v$  (La evaluación se simplifica mucho usando coordenadas esféricas en el espacio de velocidades, y midiendo el ángulo  $\theta$  respecto de la dirección  $x$ ).

Finalmente, escribiendo  $q_x = -\kappa_e \partial T_e / \partial x$ , determine la conductividad térmica electrónica  $\kappa_e$  (Considere cuasineutralidad,  $n_e = Zn_i$ , en esta expresión).

Note que dado que al flujo de calor contribuyen preferencialmente los electrones más energéticos, la aproximación de Lorentz es correcta en la evaluación hecha.

**Física del plasma**  
**2do cuatrimestre de 2012**  
**Guía de problemas nro 4**

**Problema 1)**

Considere oscilaciones puramente electrostáticas ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ) en un plasma sin campo magnético.

a) Obtenga la relación de dispersión general para estas ondas, incluyendo el efecto de las colisiones, a partir de las ecuaciones básicas linealizadas para las amplitudes de Fourier. (Note que tanto el campo eléctrico como las velocidades tienen componentes sólo en la dirección de  $\mathbf{k}$ , por lo que la deducción se simplifica mucho trabajando con sólo esta componente de las ecuaciones.)

b) Estudie el caso particular de ondas iónico-acústicas, y suponga que la frecuencia de colisiones  $\nu_{ei}$  es del mismo orden que la frecuencia  $\omega$  de las oscilaciones. Suponiendo entonces que  $\omega = kc_s + i\gamma$ , donde  $c_s$  es la velocidad de las ondas iónico-acústicas y  $\gamma$  una parte imaginaria pequeña, deduzca la expresión de  $\gamma$  en términos de  $\nu_{ei}$  y de los otros parámetros del problema. Estime además para qué longitudes de onda se cumple lo supuesto:  $\nu_{ei} \approx kc_s$ . (Note que  $\gamma < 0$ , por lo que la oscilación se amortigua.)

**Problema 2)**

Linealice las ecuaciones de la MHD ideal alrededor de un estado base homogéneo con campo magnético constante y uniforme y corriente y velocidad nulas. De las ecuaciones correspondientes para las amplitudes de Fourier obtenga la relación de dispersión de ondas de Alfvén que se propagan a lo largo del campo magnético ( $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$ ). (Suponga que la velocidad de fase es grande comparada con la del sonido). Muestre que la velocidad perturbada del fluido es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

**Problema 3)**

Una onda linealmente polarizada que se propaga a lo largo de las líneas de campo magnético puede considerarse como la superposición de dos ondas circularmente polarizadas con rotaciones izquierda y derecha. Como las velocidades de fase de estos dos modos son diferentes, el eje de polarización de la onda gira a medida que se propaga (rotación Faraday). Determine el ángulo girado por unidad de distancia recorrida en función de los parámetros del plasma y de la intensidad del campo magnético, en el límite de frecuencias altas ( $\omega$  cercana a  $kc$ ).

**Problema 4)**

Haga un diagrama cualitativo (pero correcto) del índice de refracción  $n = kc/\omega$  en función de  $\omega$  para las ondas que se propagan a lo largo del campo magnético, identificando claramente los cortes y resonancias. Ídem para propagación perpendicular al campo magnético.

**Problema 5)**

Teniendo en cuenta que en la ionósfera las densidades de partículas cargadas tienen un máximo a cierta altura, muestre cualitativamente que una onda electromagnética emitida desde la superficie en forma oblicua se refleja donde  $\omega = \omega_{pe}$ , y que una onda iónico-acústica en la ionósfera superior se aleja de la superficie y es absorbida donde  $\omega = \omega_{pi}$ .

**Física del plasma**  
**2do cuatrimestre de 2012**  
**Guía de problemas nro 5**

**Problema 1)**

Determine las distribuciones de presión y de campo magnético en un  $\theta$ -pinch con una corriente total  $I_0$  que circula:

- a) en una capa muy delgada en la superficie del plasma, y
- b) distribuida con una densidad de corriente  $j_\theta(r) = 3I_0 r^2 / (R_0^3 L)$ .

Suponga que el plasma ocupa un cilindro recto de base circular con radio  $R_0$  y longitud  $L$ .

Repita lo anterior en un  $z$ -pinch para los casos de densidad de corriente uniforme y de corriente en sólo una capa delgada superficial.

**Problema 2)**

Considere nuevamente un plasma que ocupa un cilindro recto de base circular. Obtenga la distribución de campo magnético para un equilibrio libre de fuerzas tipo Beltrami ( $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ ), en el que  $\lambda$  es una constante y  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$ . Muestre que  $B_z$  cerca de la superficie puede cambiar de sentido respecto de su valor en el eje del cilindro, y que ambas componentes del campo tienen intensidad comparable. Ambas son características de un pinch de campo invertido (reverse field pinch), que se observa que adopta equilibrios cercanos al considerado (note la diferencia con un equilibrio tipo tokamak).

**Problema 3)**

Demuestre que la condición de estabilidad ante intercambio para un plasma de muy bajo  $\beta$  confinado en un campo dipolar es

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln R} < 4\gamma,$$

donde  $p_0(R)$  es la presión en cada superficie de equilibrio, y  $R$  es el radio de la superficie en el ecuador magnético.