

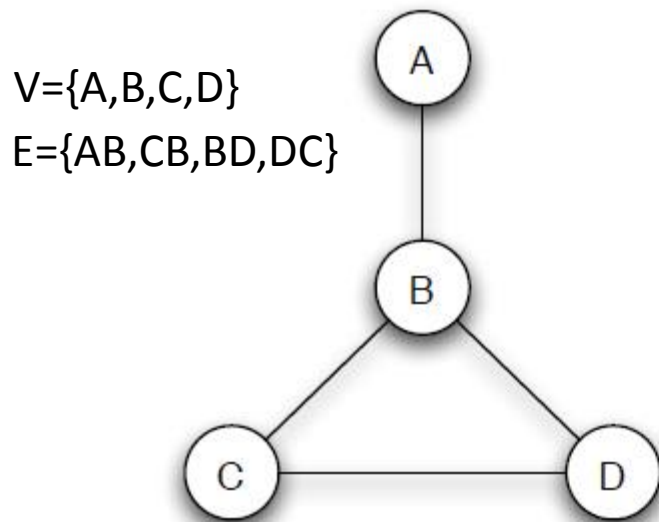
Análisis de Redes (Sociales)

Camino y Conectividad

Conceptos Básicos

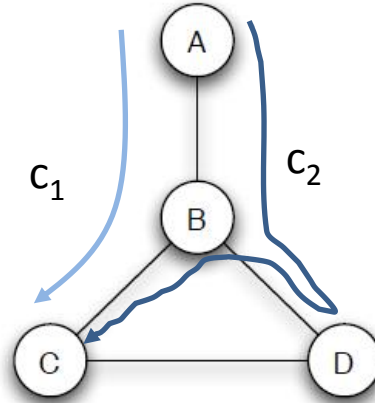
- Un grafo (G) es un conjunto de vértices ($V=\{v_i\}$) conectados mediante enlaces ($E=\{e_j\}$). $G=G(V,E)$

Grafo de 4 nodos y 4 enlaces



relaciones simétricas

Caminos y ciclos

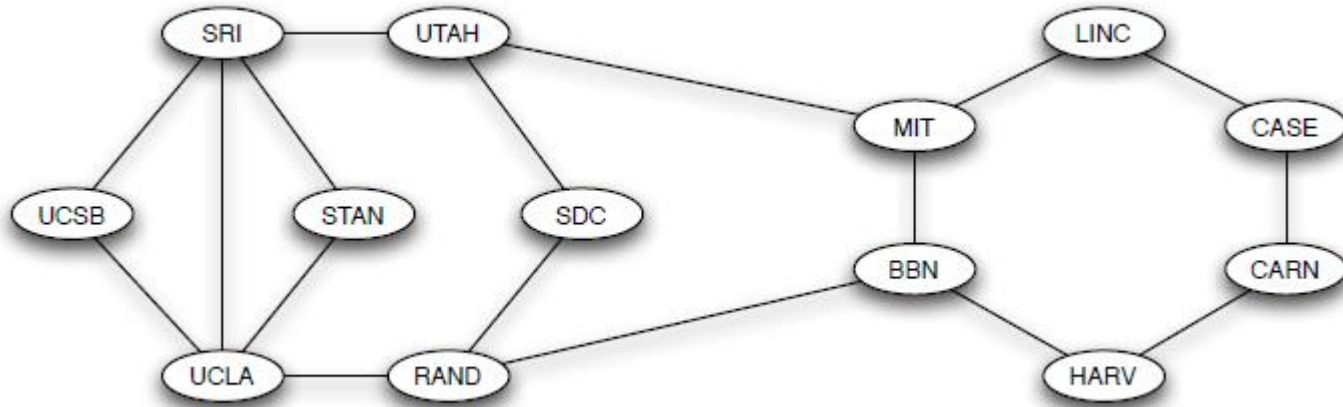


camino: secuencia de vértices tales que vértices consecutivos están conectados
 $c1=\{A,B,C\}$, $c2=\{A,B,D,B,C\}$

camino simple: es un camino que no repite vértices
 $c1$ es simple, $c2$ no lo es

ciclo: camino de más de dos vértices que no repite elementos, salvo el primero y último
 $c3=\{B,C,D,B\}$ es un ciclo.

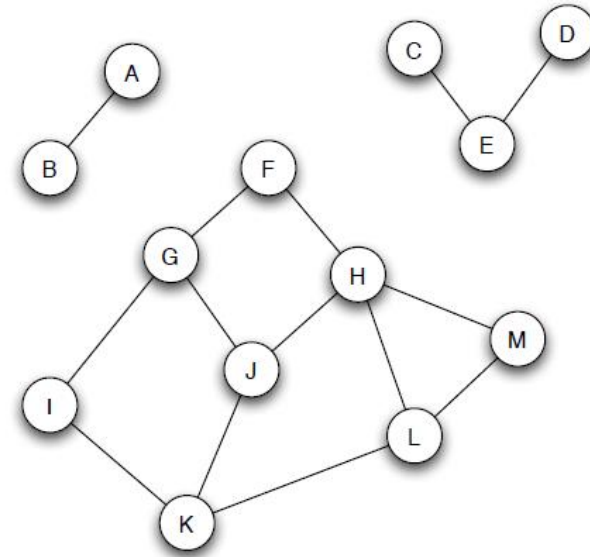
Ciclos



- Arpanet (Internet 1970) - Red de comunicaciones que vinculaba 13 universidades
- **Por diseño** cada enlace pertenecía a un ciclo (robustez vía redundancia)
- Nota: En redes sociales suelen aparecer ciclos todo el tiempo: conoces a tal, que conoce a tal?

Conectividad: componentes de un grafo

No siempre es posible establecer un camino entre cualquier par de nodos



grafo conexo: Un grafo G es conexo si existe un camino entre cualquier par de vértices del mismo.

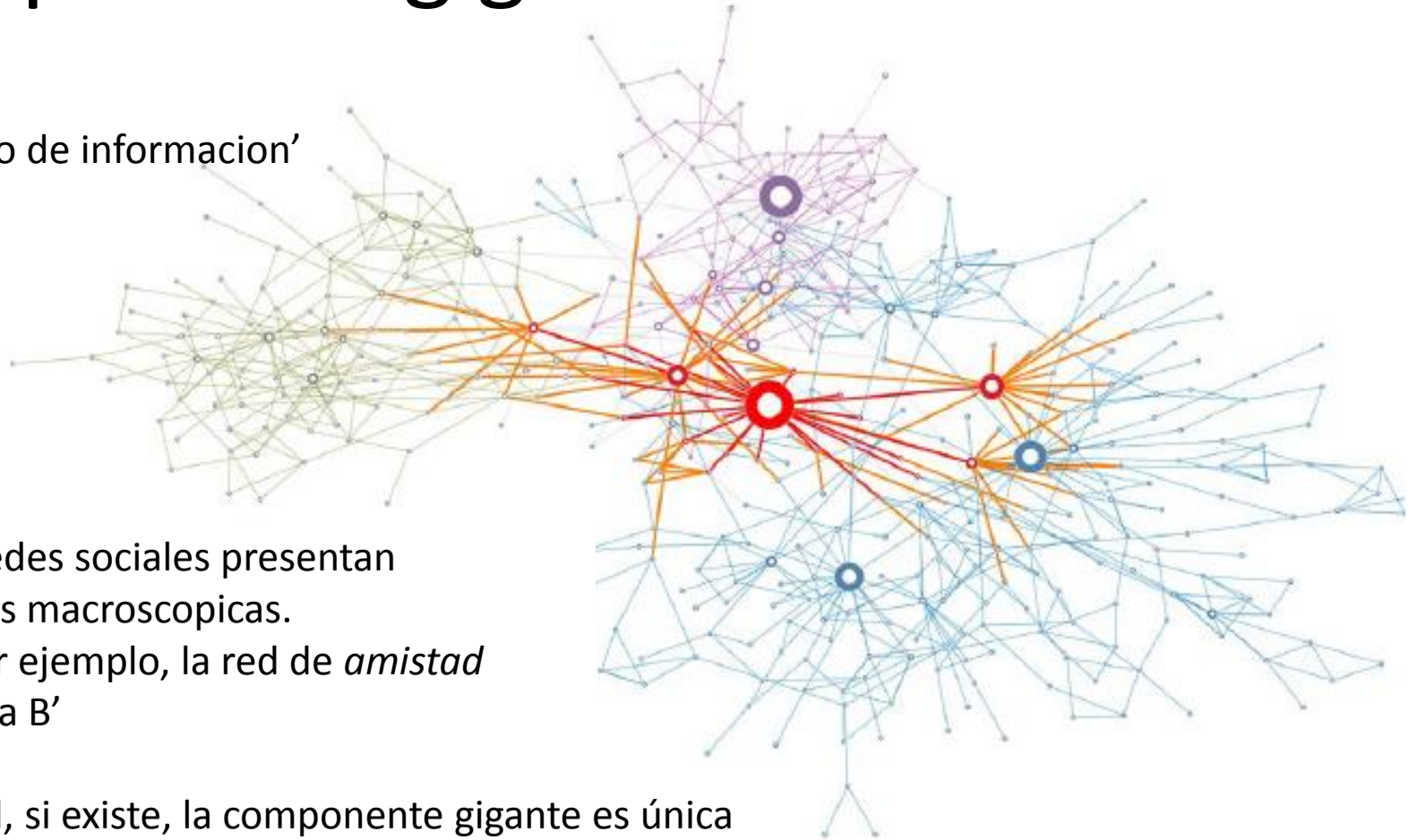
componente: subconjunto de vértices de un grafo que:

- I. definen un (sub)grafo conexo
- II. no están incluidos en ningún otra estructura conexa

componente gigante: componente más grande de un grafo

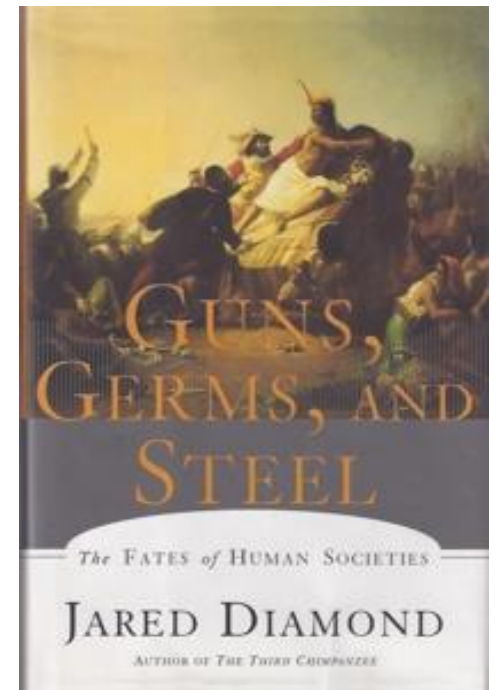
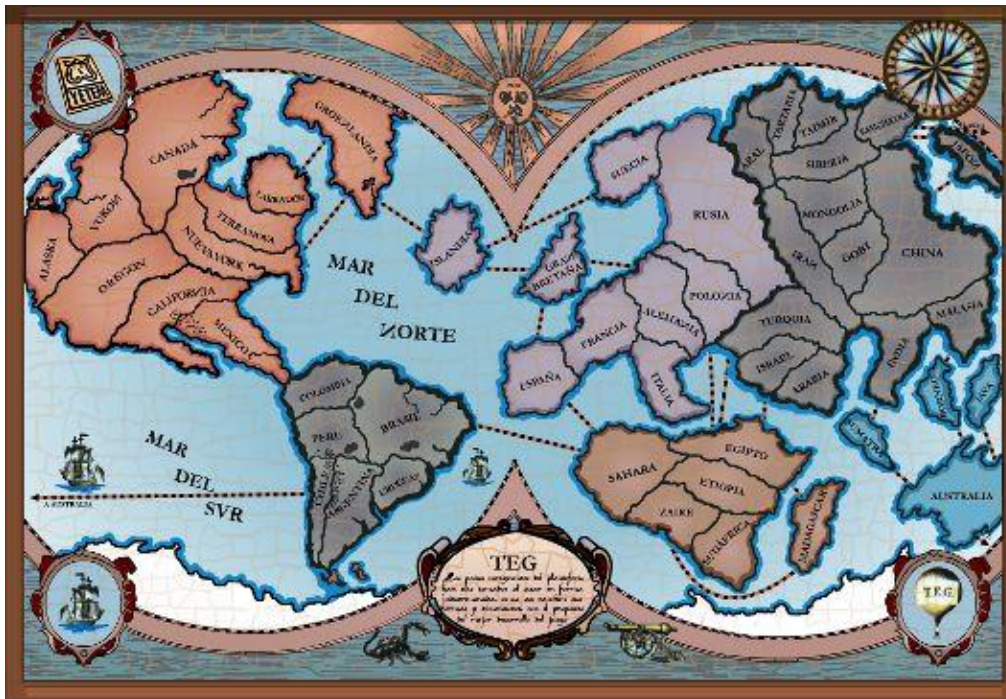
Componente gigante

Red de 'flujo de informacion'



- Muchas redes sociales presentan estructuras macroscópicas.
- Pensar por ejemplo, la red de *amistad* 'A conoce a B'
- En general, si existe, la componente gigante es única
- Si hubiera más de una, la existencia de al menos un enlace entre objetos de componentes distintas tiende a aparecer con probabilidad ~ 1 (bastaría que alguien de la CG1 'se haga amigo' de alguien de la CG2).

Componente gigante



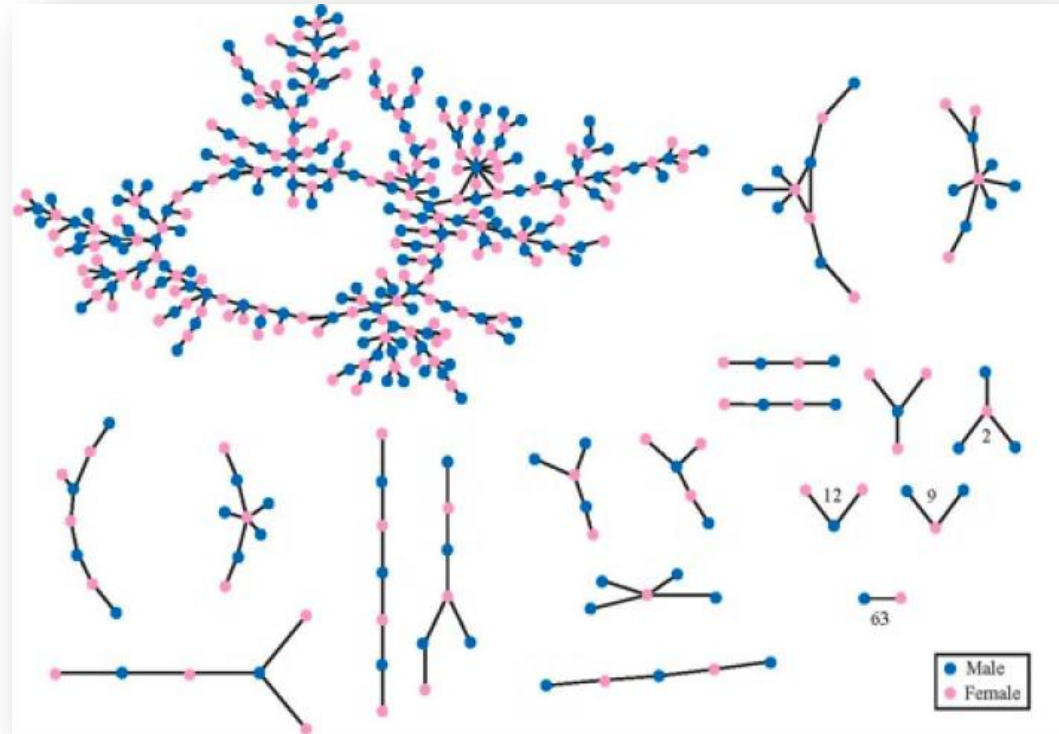
- El 'merging' de dos componentes gigantes puede tener consecuencias nefastas.
- Pensar el choque de culturas/tecnologías/sistemas_inmunitarios que hasta 1500 evolucionaron de forma casi aislada Europa-América

La red del amorrr

Estructura de amor adolescente



- En entrevistas individuales se pidió a jóvenes de una escuela secundaria identificar hasta 3 personas con las que hayan mantenido relaciones románticas y/o no-románticas (sexuales) en los últimos 18 meses

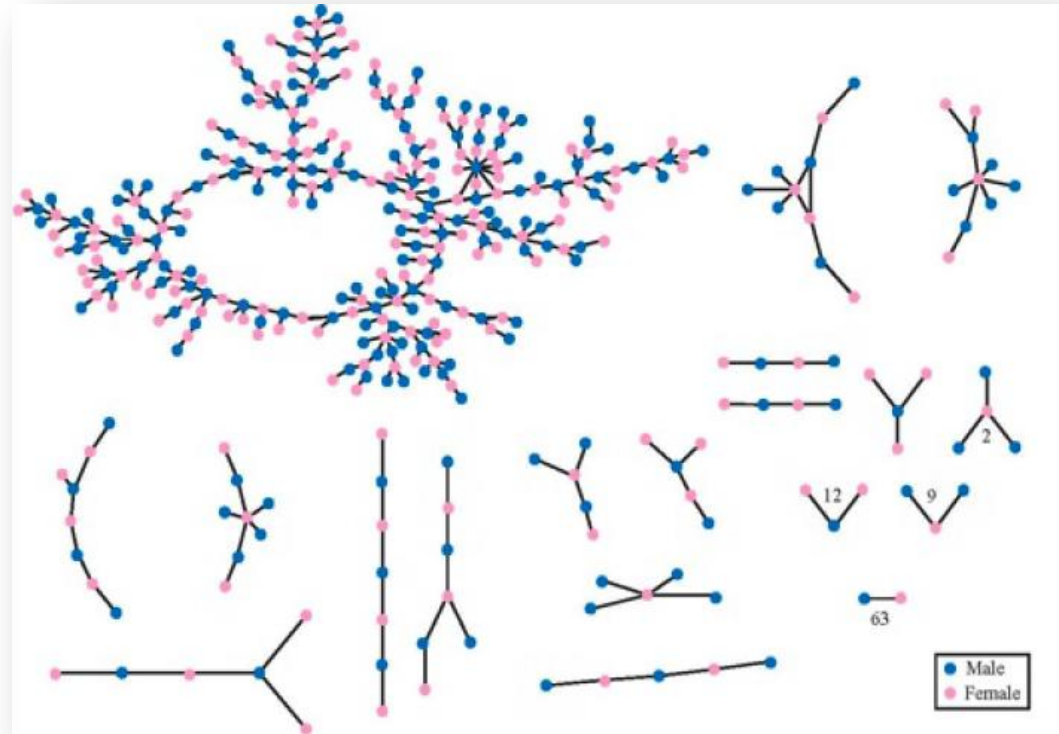


La red del amorrr

Estructura de amor adolescente



- La red es *practicamente* **bipartita** (nodos azules se enlazan con rosas)
- La **distribución de grado** de los nodos similar a la de una red aleatoria (media bien definida)
- Existe una **componente gigante** (52% de chic@s)
- Muy pocas componentes de tamanos medios

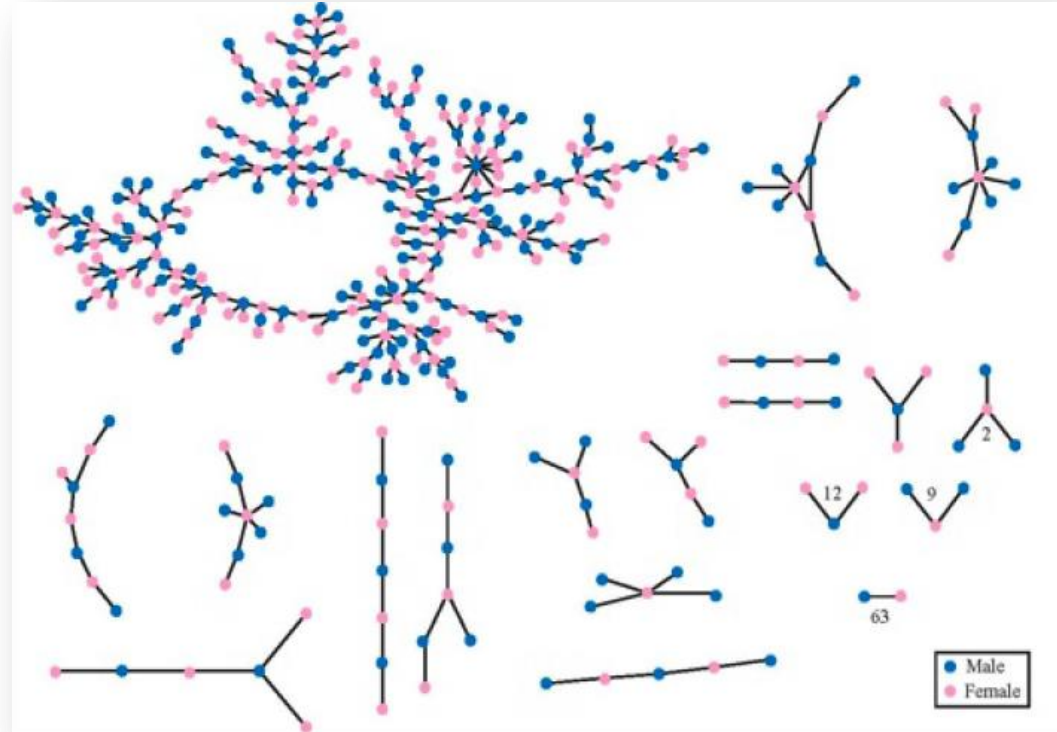


La red del amorrr

Estructura de amor adolescente

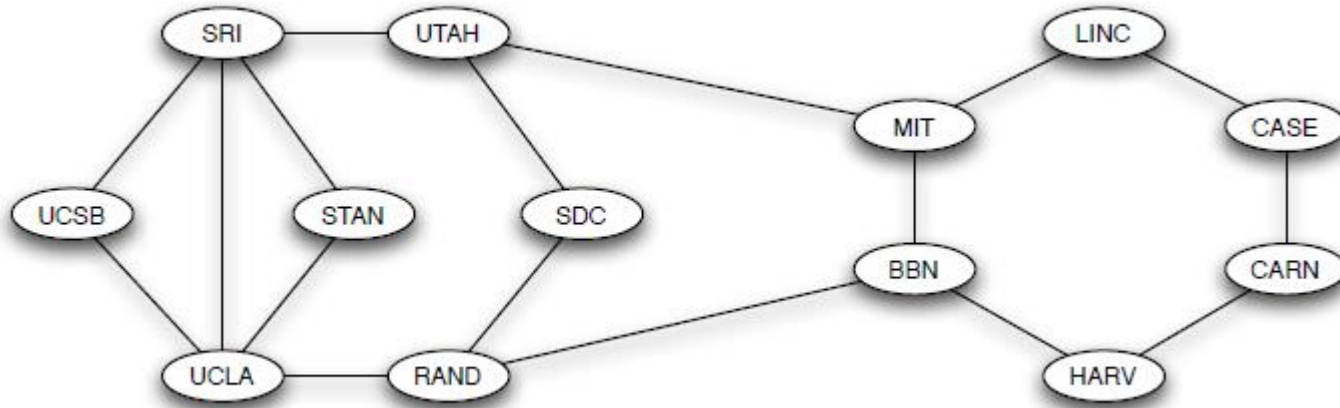


- Ausencia de **ciclos** (solo hay un gde en CG), numerosas ramas cortas, estructuras tipo arbol: a medida que avanzo encuentro nodos nuevos
- Estructuras relevante para analizar riesgos de enfermedades de transmisión sexual



"...These structures reflect relationships that may be long over, and they link individuals together in chains far too long to be the subject of even the most intense gossip and scrutiny. Nevertheless, they are real: like social facts, they are invisible yet consequential macrostructures that arise as the product of individual agency."

Longitud y Distancia



longitud de un camino C : número de pasos que contiene desde su comienzo hasta su final.

distancia entre un par de vértices de un grafo: longitud del camino más corto que los une.

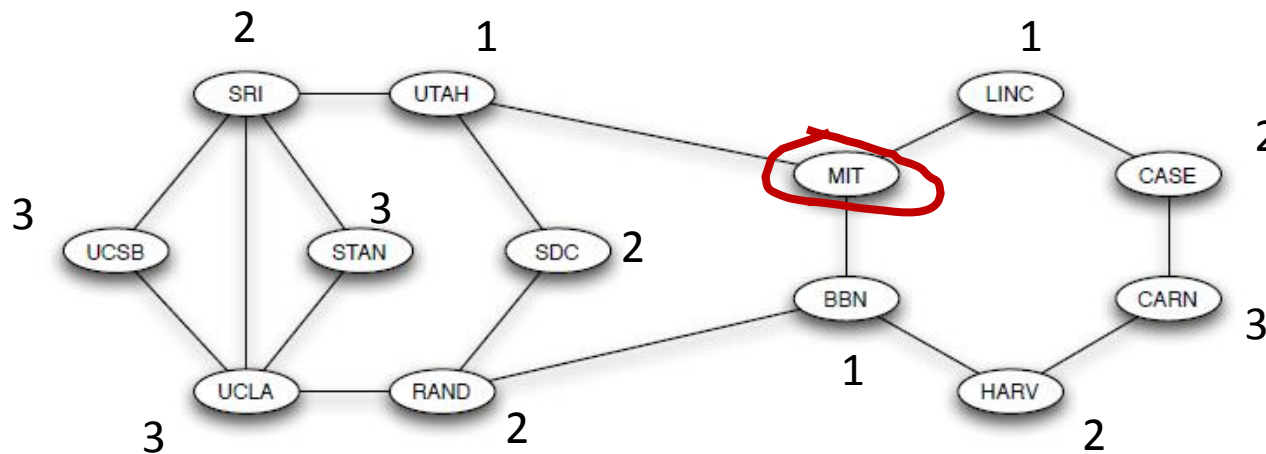
$$d(\text{UCLA}, \text{UTAH})=2$$

$$d(\text{CARN}, \text{UCSB}) =5$$

Que tan lejos?

- Búsqueda en anchura (Breadth-first search)

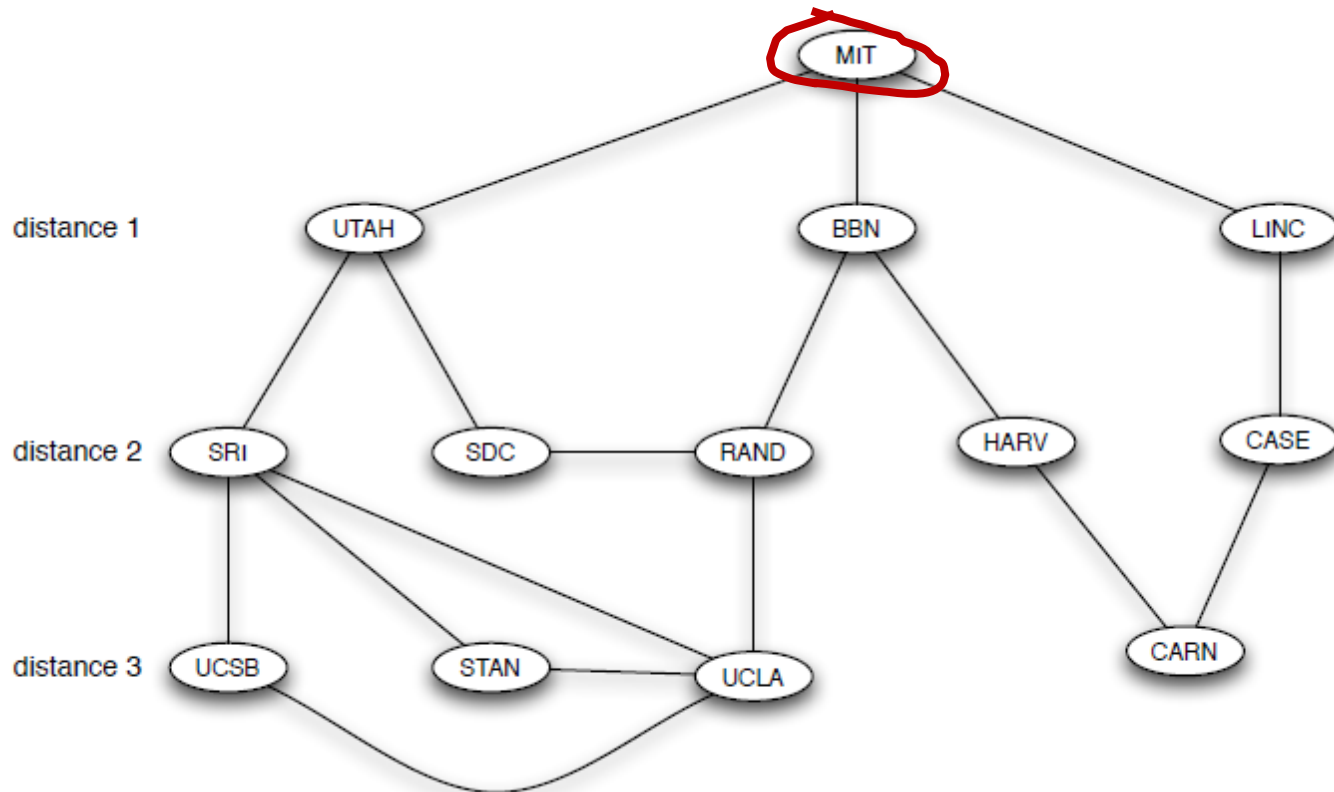
Manera eficiente y sistemática de estimar distancias a un nodo



- I. A vecinos directos de MIT, $N(MIT)$, le corresponde $d=1$
- II. A vecinos directos de vecinos directos de MIT, $N(N(MIT))$ aun no etiquetados le corresponde $d=2$
- III. $d(MIT, N(N(N(MIT)))) = 3$
- IV. etc..

BFS

- Búsqueda en anchura (Breadth-first search)



Mundo Pequeño

- Redes sociales (A conoce a B)
 - presentan una **componente gigante** (existen caminos)
 - suelen existir caminos inesperadamente cortos (!)



$$d \left(\begin{array}{c} \text{[Boy with blue face paint]} \\ \text{[Old man with white beard]} \end{array} \right) = 3$$

Mundo Pequeño



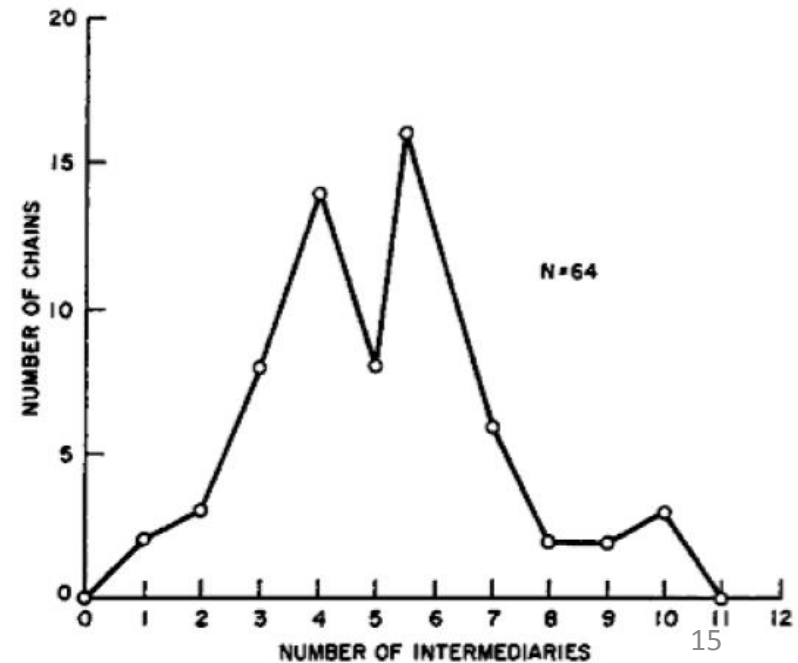
Hipótesis: estamos conectados **globalmente** por medio de **cadena corta** de conocidos

Experimento:

- I. Selección aleatoria de 296 personas de la costa oeste.
 - II. Tarea: hacer llegar una carta a una dada persona (corredor de bolsa de dirección conocida en Boston)
 - III. Sólo podían entregar la carta a alguien que conocieran, y encomendarle II y III
- ✓ 64/296 cadenas llegaron a destino
 - ✓ Mediana de intermediarios: 6

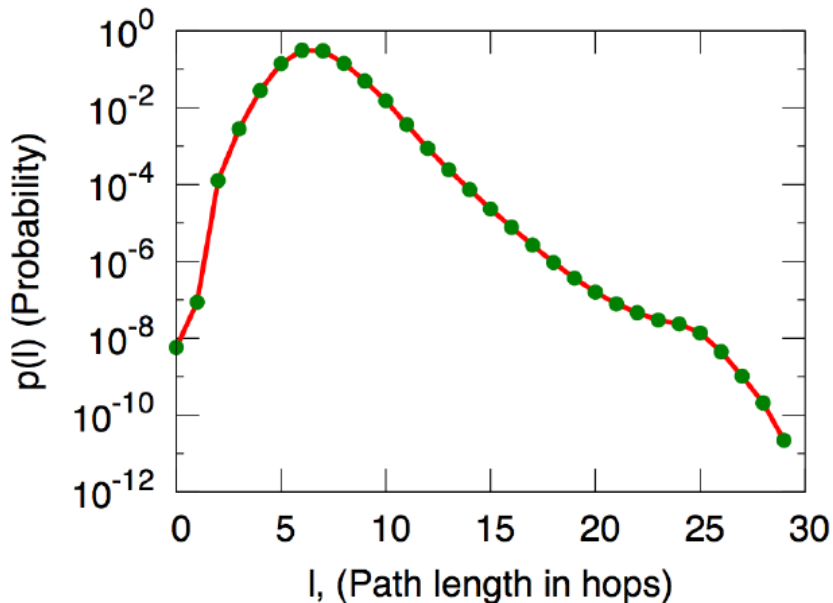
Notas:

- Conclusión sobre prop de la red usando estimación via *trazadores*
- No se desprende del estudio que entre cualquier par de puntos de la red hay 6 grados de separación
- 6 es mucho o poco? Invitarías a un grado-6 a tu cumpleaños?



Milgram reloaded

- Analisis de 240.000.000 de cuentas de Microsoft Instant Messenger activas, durante un mes.
- Enlaces entre usuarios que intercambian mensajes



- ✓ Sampling: BFS para 1000 usuarios
- ✓ Estimación un poco más global, aunque aún sesgada (personas tecnoalfabetizadas)
- ✓ Existencia de componente gigante que engloba a la mayor parte de la red
- ✓ $\langle d \rangle \sim 6.6$ (!)



THE ORACLE OF BACON

- Welcome
- Credits
- How it Works
- Contact Us
- Other stuff »

© 1999-2021 by Patrick Reynolds. All rights reserved.

Data from Wikipedia, used under CC BY-SA 3.0.

How the Oracle of Bacon Works

Every couple of weeks the Oracle [downloads every English-language article](#) from [Wikipedia](#). Using an open-source [script](#), we produce a [JSON file](#) with 128,000 films and 358,000 actors and actresses.

There is a database service running at all times that stores the database file in memory. It is [written in C](#) for maximum CPU and memory efficiency. The service handles three different types of requests:

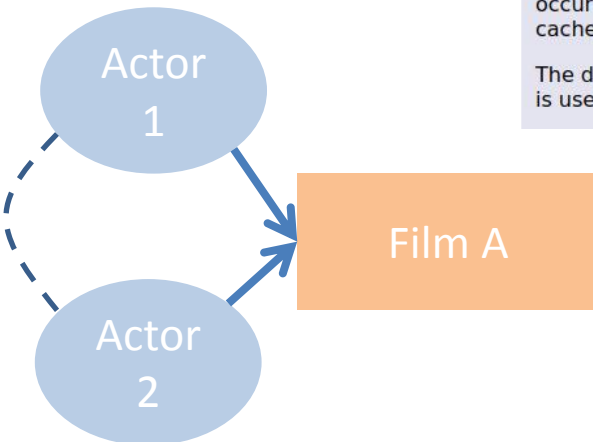
- [Find the link from Actor A to Actor B.](#)
- [How good a "center" is a given actor?](#)
- [Who are all the people with an Actor A number of N?](#)

There are several PHP pages -- one for each of the above types of queries -- that run on the Oracle of Bacon web server, which all connect to the database service using TCP.

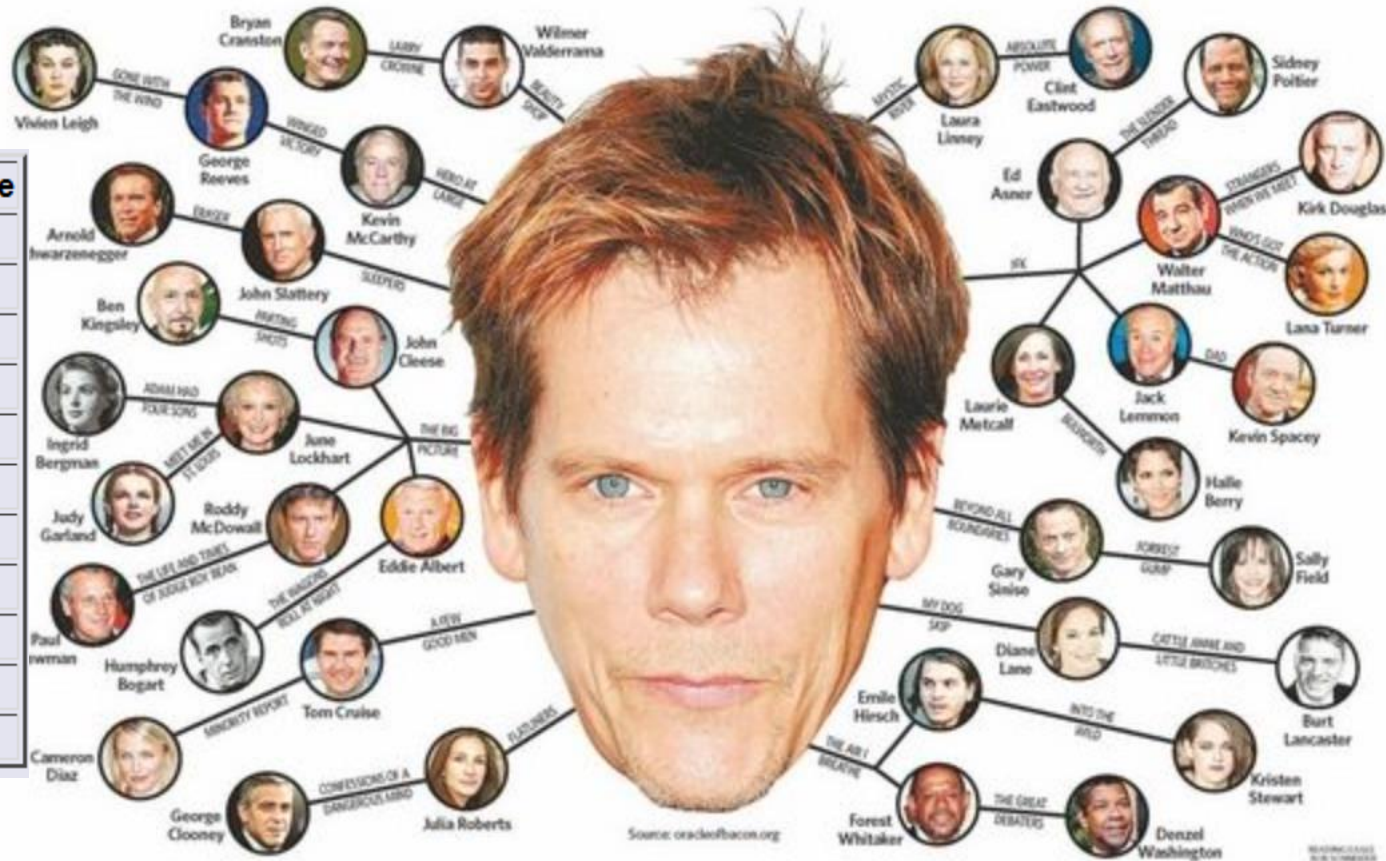
The database service uses a breadth-first search (BFS) to find the shortest path between pairs of actors. If you want to dig further into how shortest-path algorithms work, I recommend the textbook [by Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein](#) as an excellent place to start. Other algorithms textbooks are likely to cover the subject as well, if *Introduction to Algorithms* isn't available. You may also look at materials that I wrote to explain graph algorithms (including BFS) to Duke undergraduate CS students [here](#).

Whenever the Oracle answers a query, the results are cached so that future requests to link to the same actor will occur more quickly. About 95% of all queries can be served instantly from the result cache. The current contents of the cache (i.e., which actors can be linked quickly) can be found [here](#).

The database server runs on an [Amazon EC2](#) node with Ubuntu Linux. It consumes 500MB of RAM, about half of which is used for the [results cache](#).



Mundo Pequeño



Kevin Bacon Number	# of People
0	1
1	3150
2	373876
3	1340703
4	340756
5	28820
6	3383
7	451
8	52
9	8
10	1

<d>_{IMDB} 2.9

Mun

Susana Gimenez has a Bacon number of 4.

Find a different link

Susana Gimenez

was/in

Donde duermen dos... duermen tres

with

Juan Carlos Calabró

was/in

La Fiesta de todos

with

Ricardo Darín

was/in

Torrente 5: Operación Eurovegas

with

Alec Baldwin

was/in

She's Having a Baby

with

Kevin Bacon

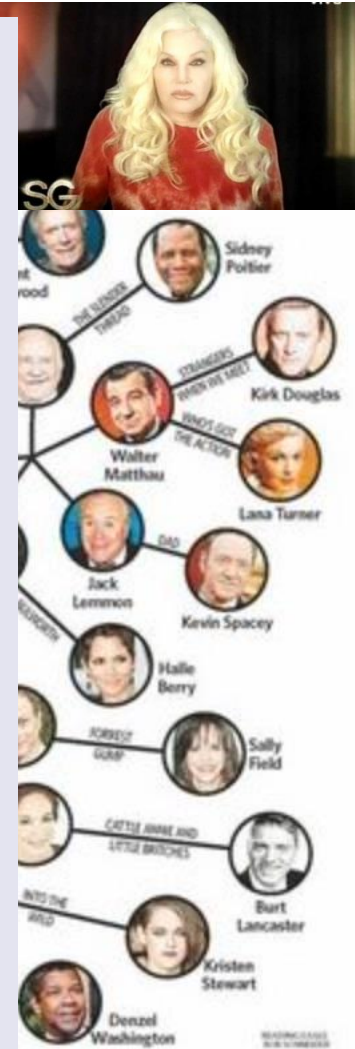
Kevin Bacon

to

Susana Gimenez

Find link

More options >>

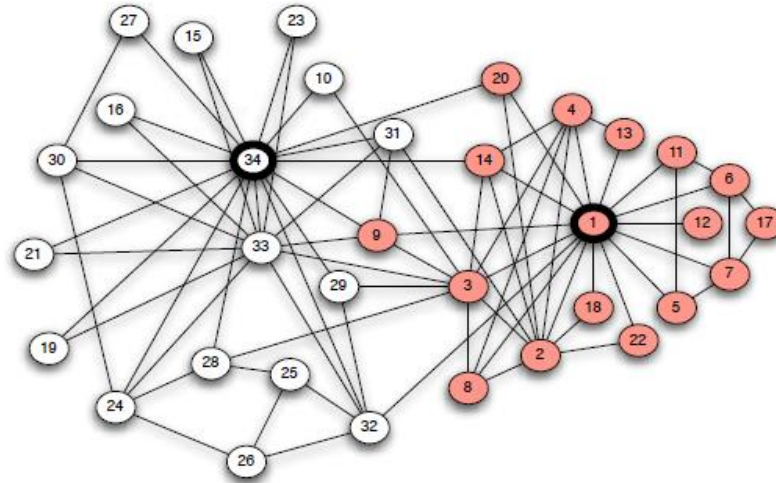


Camino y conectividad

Hasta ahora

- Grafo: $G(V,E)$
- camino, camino simple, ciclo
- componentes, grafo conexo, componente gigante
- longitud de camino, distancia entre nodos
- caminos *sorpresivamente* cortos en redes sociales:
mundo pequeño

Lazos fuertes / lazos débiles



La estructura de conectividad de las redes sociales es altamente no trivial.

- El entorno de un dado vértice es diferente al de otro.
- Puedo inferir ciertos tipo de *roles* a partir del cableado

Pero hay información adicional que aún no tuvimos en cuenta: Los vínculos interpersonales pueden ser de distinta intensidad. En un escenario simplificado: puede haber **enlaces fuertes y débiles**. $G(V,E,f:E \times \{w,s\})$

¿Cómo correlaciona/condiciona esta distinción a la estructura de la red?

Buscando Trabajo



Mark Granoveter (1974) “Getting a Job. A study of contacts and careers”

Entrevista a personas que recientemente cambiaron empleo: ¿cómo obtuvieron información de la oportunidad laboral?

Observación:

- Las personas reciben información sobre nuevos trabajos vía contactos personales
- Esos contactos eran **mayormente** calificados como “conocidos” (weak-ties) y no como “amistades” (strong-ties)

¿Por qué la recomendación de gente que debería conocer más y mejor nuestros intereses no funcionaba mejor??



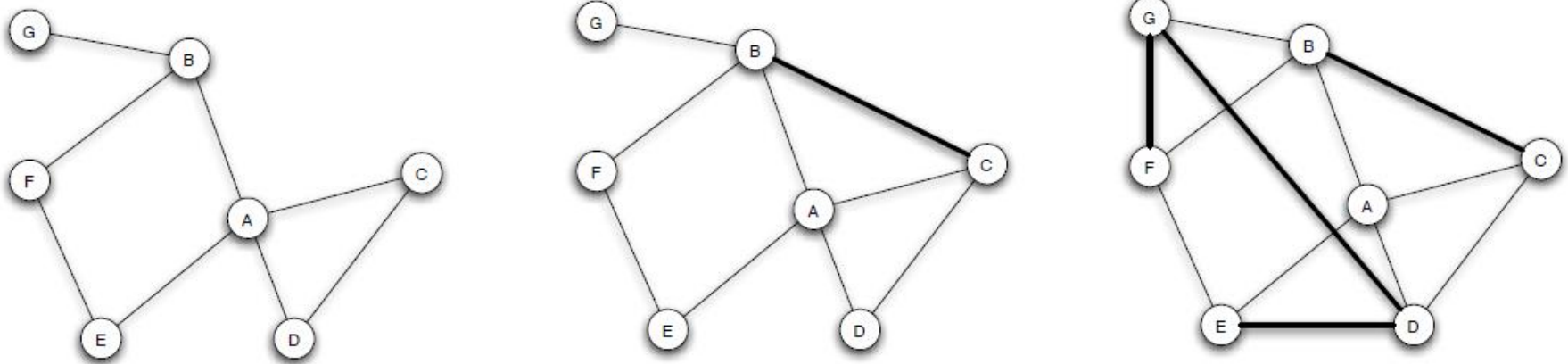
estructura de la red y vínculos locales *mejor (más efectivo)* que conocimiento intensivo de la persona

Redes sociales que evolucionan

- Cuales son los mecanismos por los que una red social podría conformarse?

Principio de clausura transitiva:

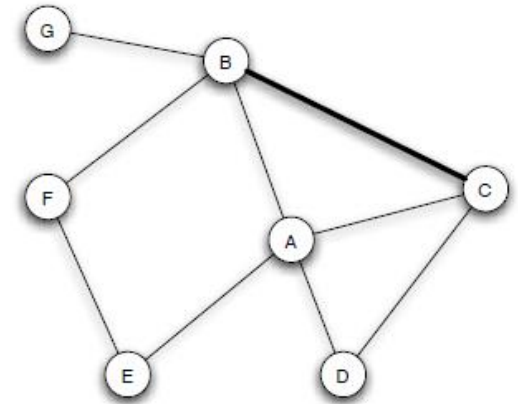
Si dos personas tienen una amistad en común, aumenta la probabilidad de que se vuelvan amigos entre sí



Clausura transitiva

Por qué funcionaría?

- 1) Si A y B son amigos y A y C son amigos se amplían las probabilidades de que B y C interactúen y se relacionen
- 2) El hecho de que B y C sean amigos de la misma persona, y ambos lo sepan, genera cierta confianza implícita
- 3) habla de cierta similaridad implícita en compartir la amistad de una misma persona.
- 4) Conveniencia de A de generar el lazo de amistad entre B y C (evitar stress)

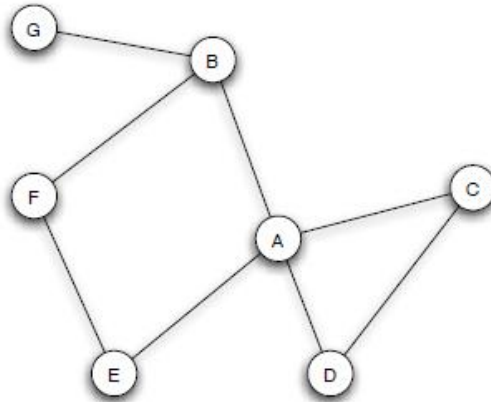


Son amigos, mis amigos?

Cuantificando la clausura transitiva:

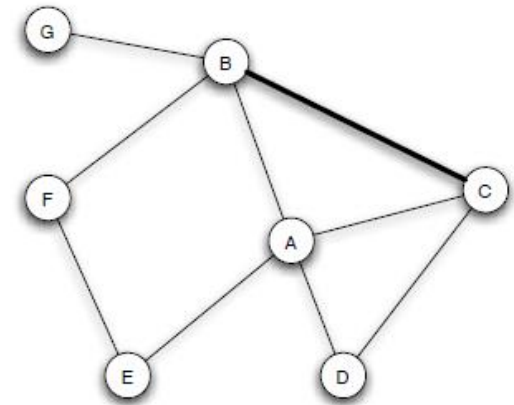
coeficiente de *clustering* de nodo A: fracción de vecinos de A, conectados entre sí

$$C(A) = \frac{\#triangulos\ con\ vertice\ en\ A}{\#triangulos\ posibles\ con\ vertice\ en\ A} = \frac{1}{6}$$



coeficiente de *clustering* de grafo G: $C(G) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C(v_i) \sim 0.31$

Clausura transitiva



Suicide and Friendships Among American Adolescents

| Peter S. Bearman, PhD, and James Moody, PhD

Although suicide rates for most subpopulations tend to be stable over time, the suicide rate among adolescents has risen dramatically in recent years. Suicide is now the third leading cause of death among adolescents and young adults aged 15 to 24 years.¹ Although only 1 in 200 suicide attempts results in death, more than one third of all suicide attempts result in injuries serious enough to require professional treatment. Four percent of American adolescents reported at least 1 attempted suicide in the past year, and 13% of adolescents had seriously considered suicide at least once in the past year.² The broader impact of suicide on adolescents is substan-

Objectives. We investigated male and female adolescent suicidal ideation and suicidal ideation and suicidal ideation and suicidal ideation with suicidality.

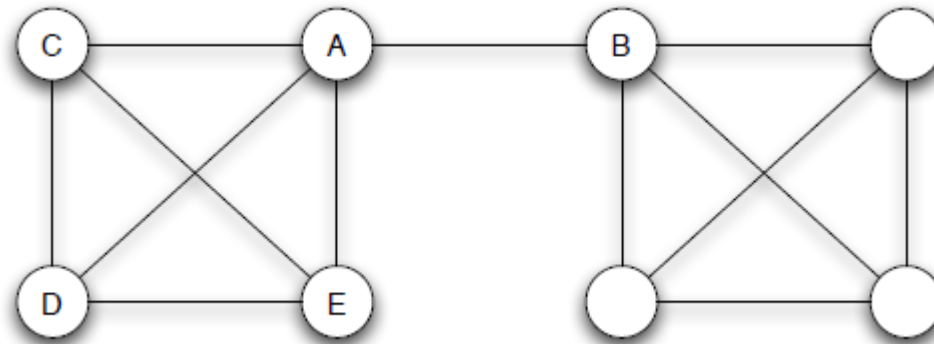
Methods. We analyzed friendship patterns in which male and female adolescents were connected to each other. Among adolescents, we found a stochastic, with few consistent friendship patterns in which male adolescents' suicidal ideation and suicidal ideation and suicidal ideation and suicidal ideation (2004;94:89–95)

Our findings revealed significant social network effects on suicidal ideation for adolescent females, after we controlled for previously identified correlates of suicidal ideation. Adolescent females who are isolated from the adolescent community or whose social relationships are intransitive and likely dissimilar¹⁸ are at greater risk for suicidal thoughts than are girls who are embedded in cohesive friendship groups. Health care providers can assess this risk for girls through simple screens that allow adolescents to describe the relational world in which they are embedded. Adolescent males are more impervious to social context than are adolescent females.

La fortaleza de los lázos débiles



De vuelta al trabajo...por qué las mejores recomendaciones vienen de *conocidos* y no de *amigos*?



A se vincula con cuatro personas: $N(A)=\{C,D,E,B\}$

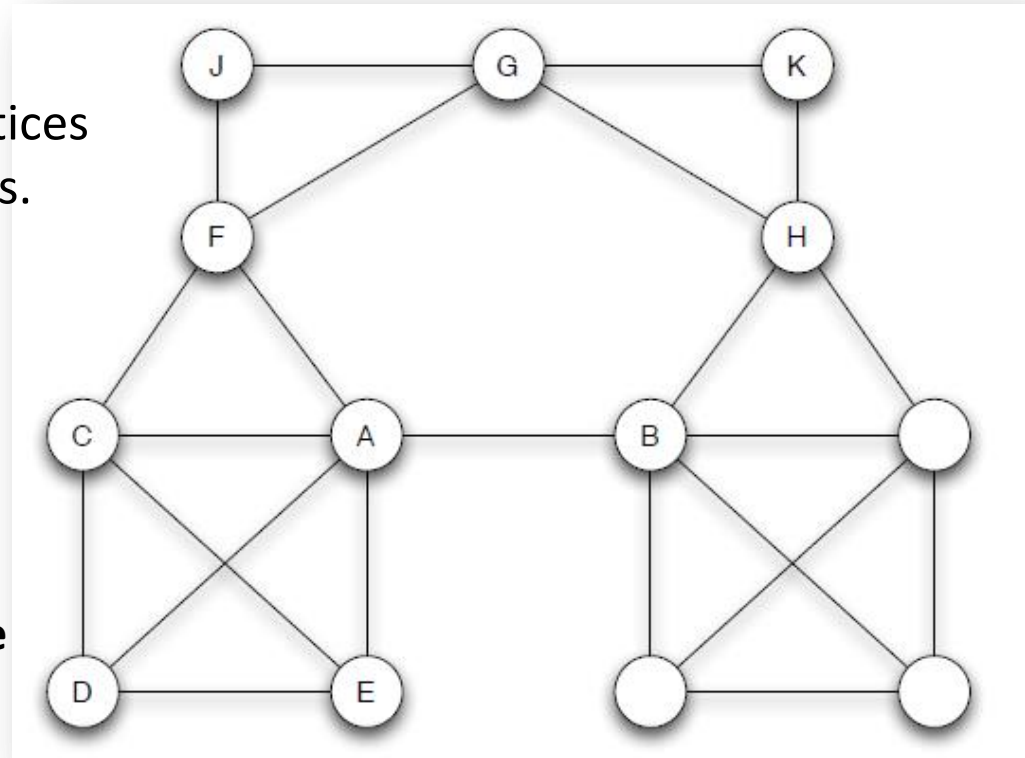
El enlace e_{AB} es *estructuralmente inusual*. Formalmente es un: **enlace puente**: enlace que si es removido provoca que sus vértices queden en componentes diferentes del grafo.

Tendiendo puentes

Los enlaces **punto** son raros de encontrar en la práctica en redes sociales reales

- **punto local**: enlace cuyos vértices no comparten primeros vecinos.
- **alcance** de un **punto local** : distancia a la que quedan sus vértices cuando el mismo es removido

Por definición el **alcance** de un **punto local** es estrictamente mayor que 2



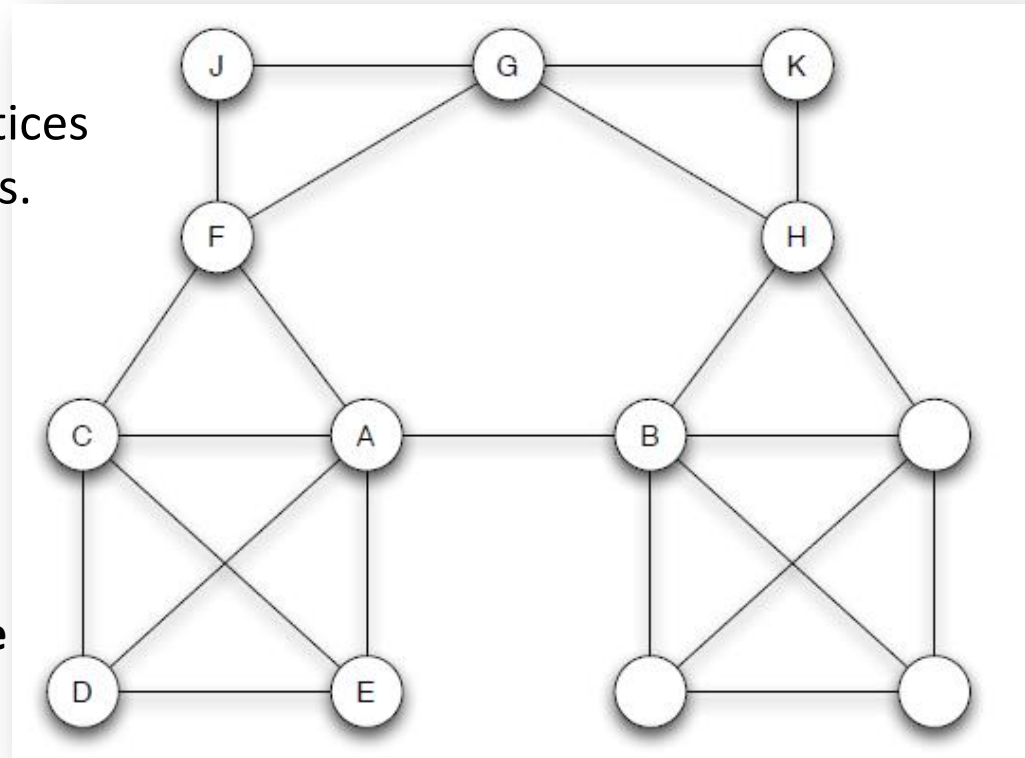
e_{AB} es un **punto local** de alcance 4

Tendiendo puentes

Los enlaces **punto** son raros de encontrar en la práctica en redes sociales reales

- **punto local**: enlace cuyos vértices no comparten primeros vecinos.
- **alcance** de un **punto local** : distancia a la que quedan sus vértices cuando el mismo es removido

Por definición el **alcance** de un **punto local** es estrictamente mayor que 2



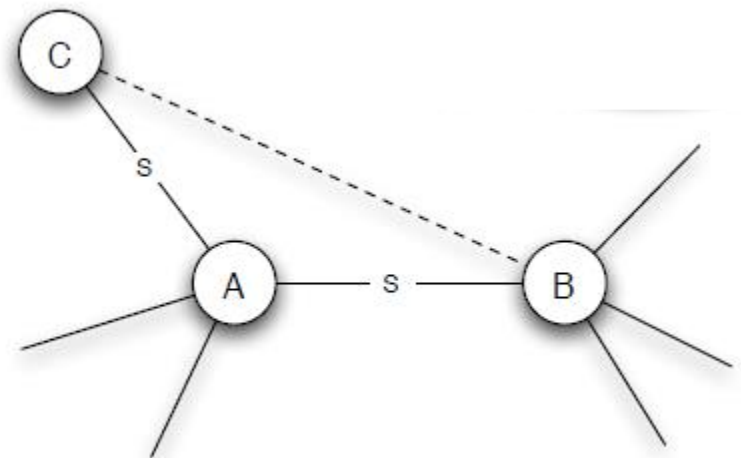
e_{AB} acerca el *mundo* de A, al *mundo* de B. Facilita el acceso de A a nueva información

Clausura Transitiva Fuerte (CTF)

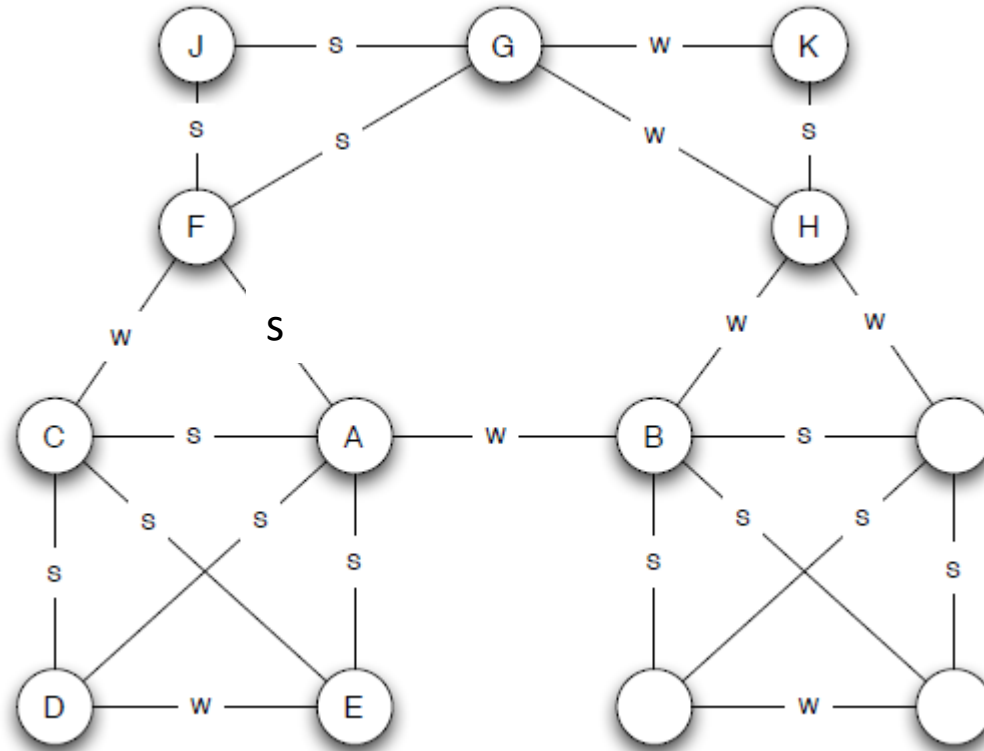
- I. Distinción de vínculos personales: **fuertes, débiles.**
- II. Noción estructural

El concepto **CTF** vincula las dos nociones:

- El nodo **A** viola la propiedad **CTF** si **A** presenta vínculos fuertes con dos de sus vecinos, pero no existe un enlace entre ellos
- El nodo **A** satisface **CTF** si no la viola.



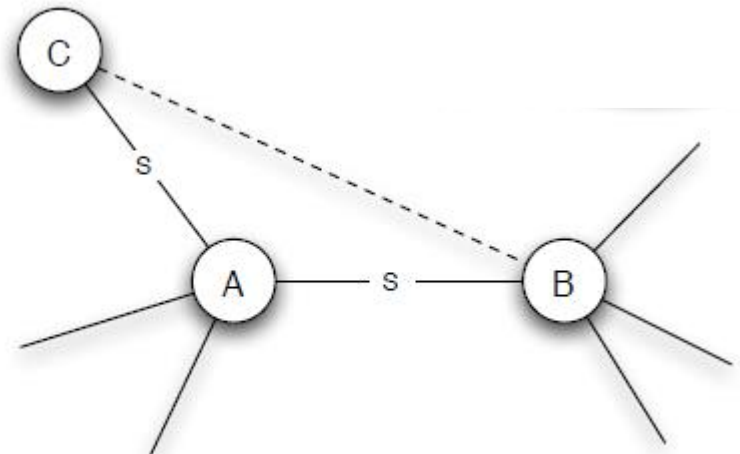
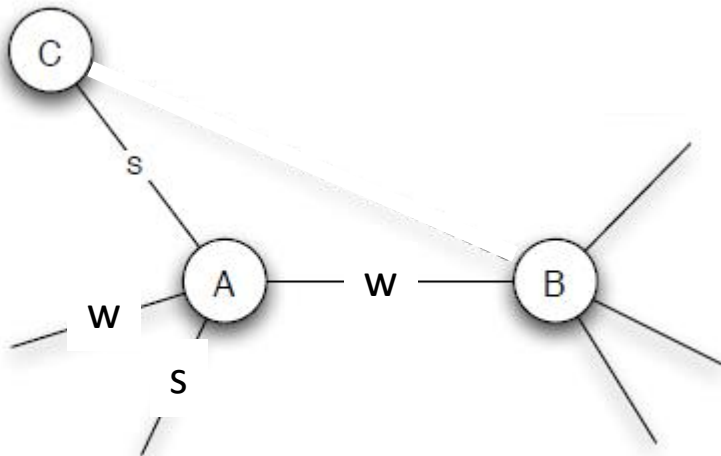
Clausura Transitiva **Fuerte** (CTF)



A viola CTF: e_{AF} , e_{AE} son fuertes, pero $e_{EF} \notin E$

CTF, puentes locales y lazos débiles

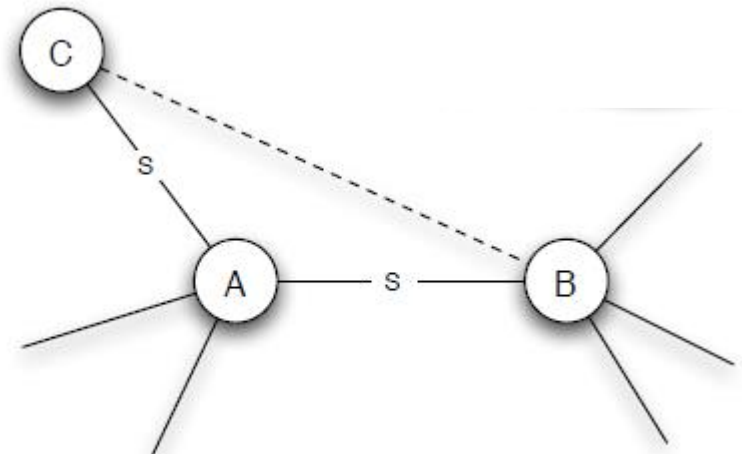
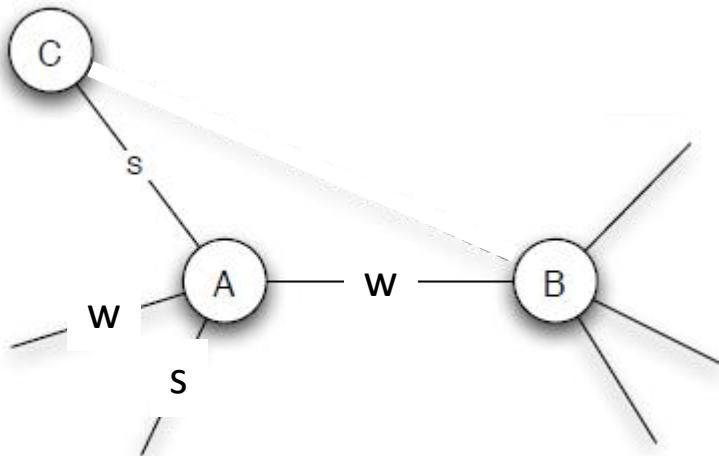
Si un nodo **A** satisface la propiedad de **CTF** y presenta al menos dos **enlaces fuertes**, entonces cualquier **puente local** en el que esté involucrado es necesariamente un enlace **débil**



e_{AB} no puede ser un enlace fuerte y un puente local

CTF, puentes locales y lazos débiles

En criollo: En concordancia con nuestra hipótesis de trabajo original (sobre como opera la **clausura transitiva**) un **puente local** tiene que ser **débil** porque si no lo fuera aparecerían eventualmente enlaces en la vecindad que harían que dicho **puente local** deje de serlo



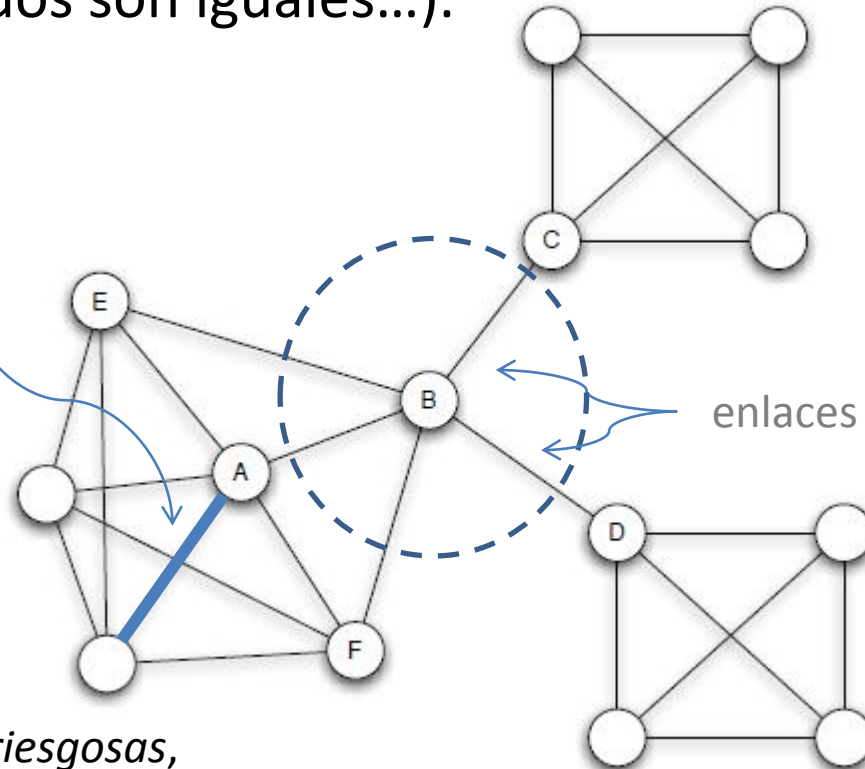
e_{AB} no puede ser un enlace fuerte y un puente local

Roles topológicos

- El acceso a **enlaces** que conectan grupos no suele estar uniformemente distribuido a lo largo de los **nodos** de la red (no todos los nodos son iguales...).

enlace de alto *embedding*
#vecinos comunes de
sus nodos extremos

enlaces de bajo *embedding*



Caracterización de nodos:

A se conecta con gente mediante enlaces de alto embedding (confiabilidad)

Las relaciones de **B** son más *riesgosas*, pero tienen ventajas respecto a flujo de info

Es válida la hipótesis de CT?

- Onnela (2007): análisis de comunicaciones de red móvil de $4.6 \cdot 10^6$ usuarios por 18 meses.

PNAS PNAS PNAS

Structure and tie communication n

J.-P. Onnela^{*,†}, J. Saramäki^{*}, J. Hyvärinen[‡]

^{*}Laboratory of Computational Engineering, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland; [†]Clarendon Laboratory, Oxford University, Oxford, UK; [‡]University of Notre Dame, South Bend, IN 46556; Boston, MA 02115; [§]John F. Kennedy School of Government, Harvard University, Cambridge, MA 02138; [¶]Theoretical Physics, Budapest University of Technology and Economics, H-1525 Budapest, Hungary

Edited by H. Eugene Stanley, Boston University, USA

Electronic databases, from phone to e-mail, provide detailed records of human communication. We use these records to map and explore the structure of communication networks. Here we examine the structure of millions of mobile phone users, allowing us to study the communication patterns of millions of mobile phone users, allowing us to simultaneously study the local and the global structure of a society-wide communication network. We observe a coupling between interaction strengths and the network's local structure, with the counterintuitive consequence that social networks are robust to the removal of the strong ties but fall apart after a phase transition if the weak ties are removed. We show that this coupling significantly slows the diffusion process, resulting in dynamic trapping of information in communities and find that, when it comes to information diffusion, weak and strong ties are both simultaneously ineffective.

communication network. We observe a coupling between interaction strengths and the network's local structure, with the counterintuitive consequence that social networks are robust to the removal of the strong ties but fall apart after a phase transition if the weak ties are removed. We show that this coupling significantly slows the diffusion process, resulting in dynamic trapping of information in communities and find that, when it comes to information diffusion, weak and strong ties are both simultaneously ineffective.

complex systems | complex networks | diffusion and spreading | phase transition | social systems

Here we examine the communication patterns of millions of mobile phone users, allowing us to simultaneously study the local and the global structure of a society-wide communication network. We observe a coupling between interaction strengths and the network's local structure, with the counterintuitive consequence that social networks are robust to the removal of the strong ties but fall apart after a phase transition if the weak ties are removed

nodes and $L \sim 10^6$ links, the vast majority (99.1%) of these nodes belonging to a single connected cluster [giant component (GC)]. Given the very large number of users and communication events in the database, we find that the statistical characteristics of the network and the GC are largely saturated, observing little difference between a two- or a three-month-long sample. Note that the MCG captures only a subset of all interactions between individuals, a detailed mapping of which would require face-to-face, e-mail, and land line communications as well. Yet, although mobile phone data capture just a slice of communication among people, research on media multiplexity suggests that the use of one medium for communication between two people implies

Es válida la hipótesis de CT?

- Onnela (2007): análisis de comunicaciones de red móvil de $4.6 \cdot 10^6$ usuarios por 18 meses.
- 2 nodos se conectan si intercambiaron una comunicación en ambos sentidos durante el período.
- El peso de un enlace dado por la recurrencia de las llamadas
- Estructura de la red: proxy de la red social subyacente
- **Componente gigante** del 84% de la masa de usuarios

Structure and tie strengths in mobile communication networks

J.-P. Onnela^{*†‡}, J. Saramäki^{*}, J. Hyvönen^{*}, G. Szabó^{§¶}, D. Lazer[¶], K. Kaski^{*}, J. Kertész^{*,**}, and A.-L. Barabási^{§¶}

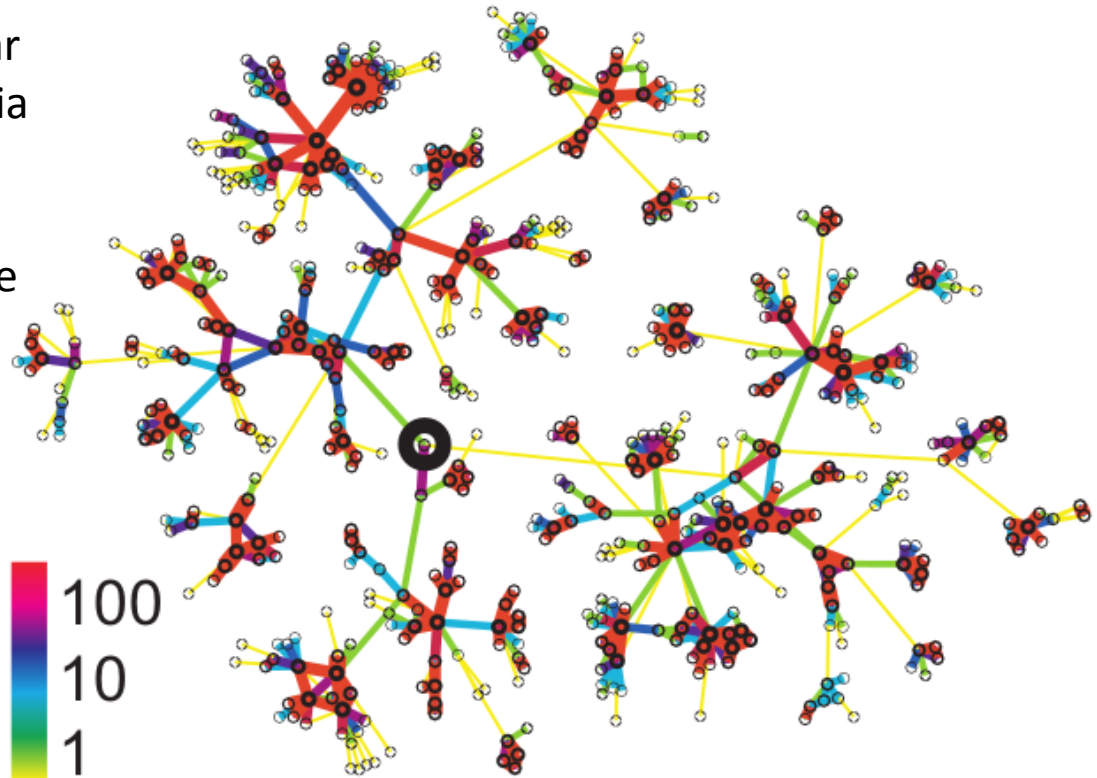
^{*}Laboratory of Computational Engineering, Helsinki University of Technology, P.O. Box 9203, FI-02015 TKK, Helsinki, Finland; [†]Physics Department, Clarendon Laboratory, Oxford University, Oxford OX1 3PU, United Kingdom; [‡]Department of Physics and Center for Complex Networks Research, University of Notre Dame, South Bend, IN 46556; [§]Center for Cancer Systems Biology, Dana-Farber Cancer Institute, Harvard University, Boston, MA 02115; [¶]John F. Kennedy School of Government, Harvard University, Cambridge, MA 02138; and ^{**}Department of

análisis de comunicaciones de red móvil de $4.6 \cdot 10^6$ usuarios por 18 meses

- Red *ego* de un usuario elegido al azar
- Se incluyen nodos hasta una distancia de 6 pasos.
- En colores se representa el *campo* de intensidades sobre enlaces

$$G = G(V, E, \underbrace{f_E: E \rightarrow \mathbb{R}})$$

Intensidad o peso de un enlace



Estructura conectividad \leftrightarrow Intensidad de enlace

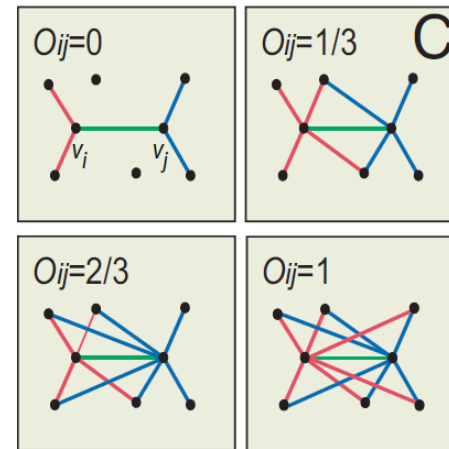
$$G = G(V, E, f_E: E \rightarrow \mathbb{R})$$

Intensidad de un enlace

Numero de llamadas
intercambiadas

$$f_E \leftrightarrow E$$

Overlap: medida continua de la
noción de **punto local**



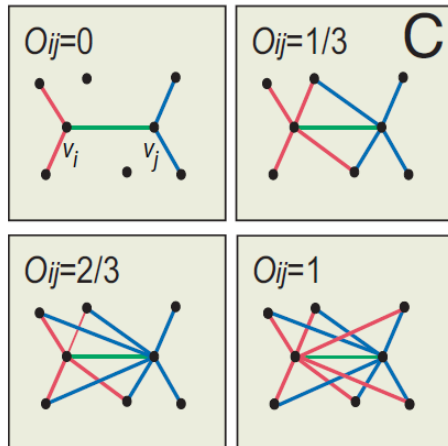
$$O_{ij} = \frac{N(i) \cap N(j)}{N(i) \setminus j \cup N(j) \setminus i}$$

Estructura conectividad <-> Intensidad de enlace

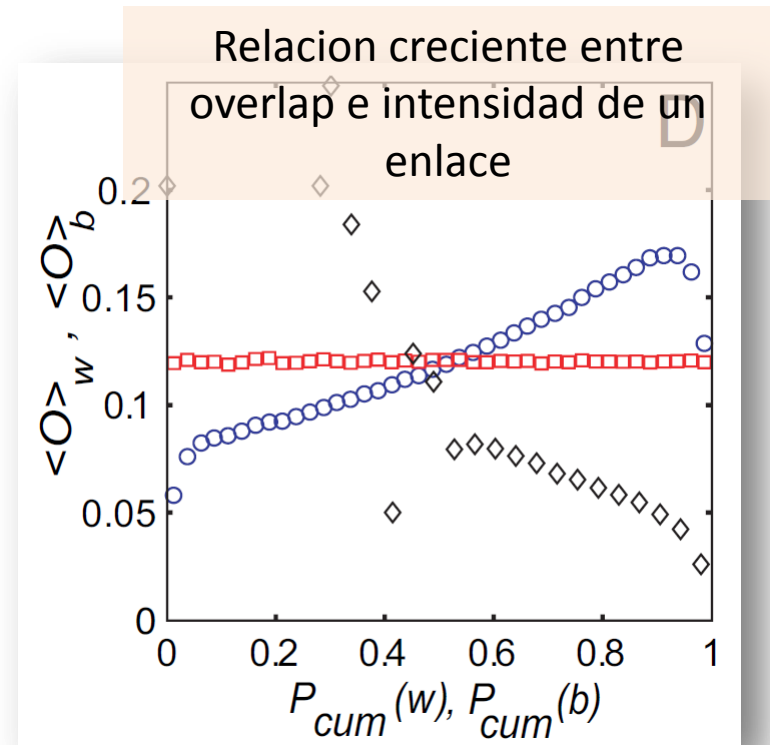
Intensidad de un enlace

Numero de llamadas intercambiadas

Overlap: medida continua de la noción de **punto local**

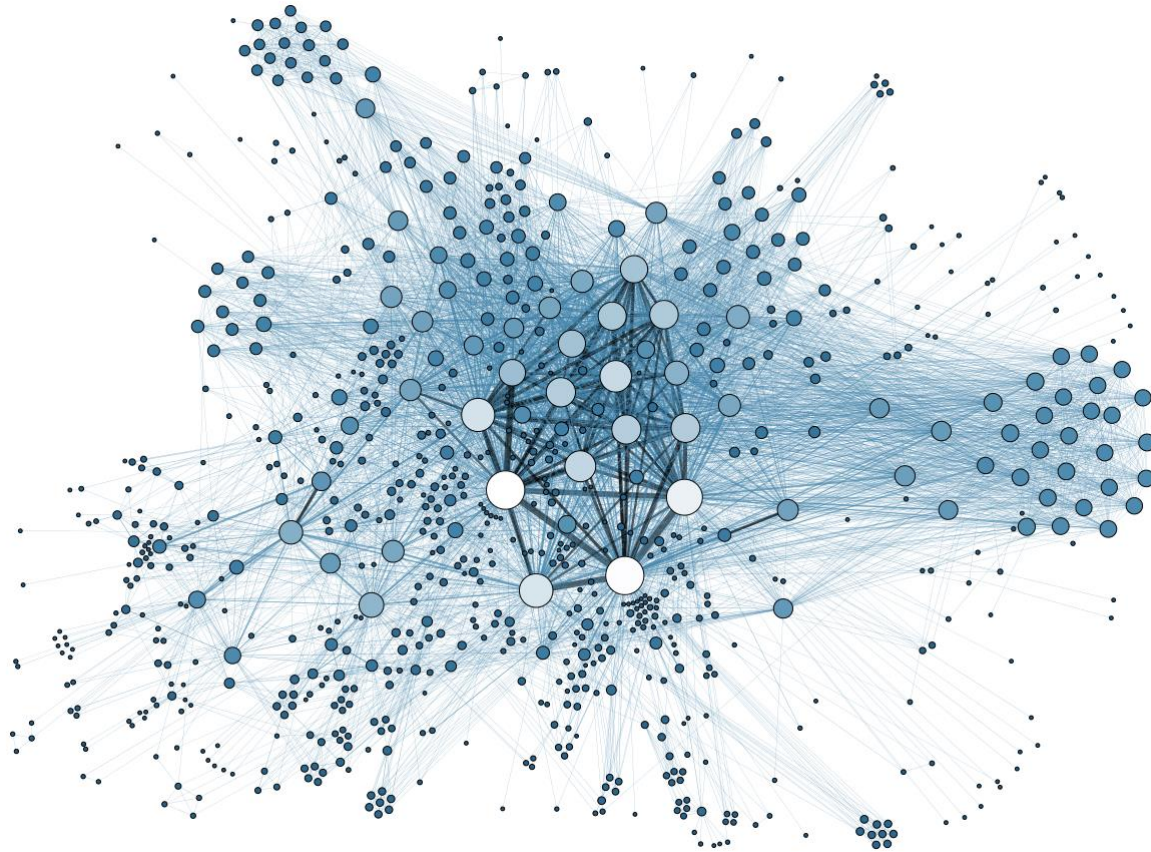


$$O_{ij} = \frac{N(i) \cap N(j)}{N(i) \setminus j \cup N(j) \setminus i}$$



- overlap en función de fracción de intensidad acumulada
- control random
- ◇ Overlap en función de betweenness

Desarmando la **componente gigante**

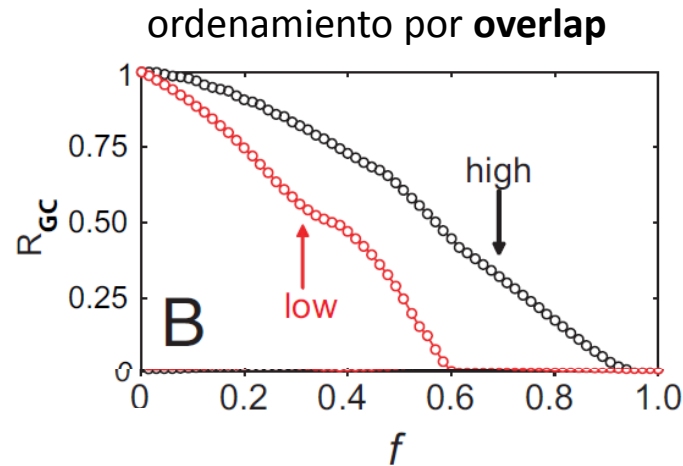
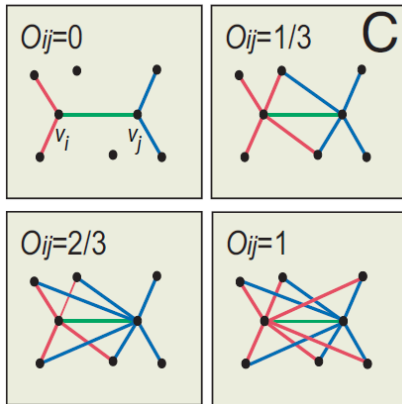


Análisis de estabilidad de la CG frente a remoción ordenada de enlaces

$$f_E \leftrightarrow E$$

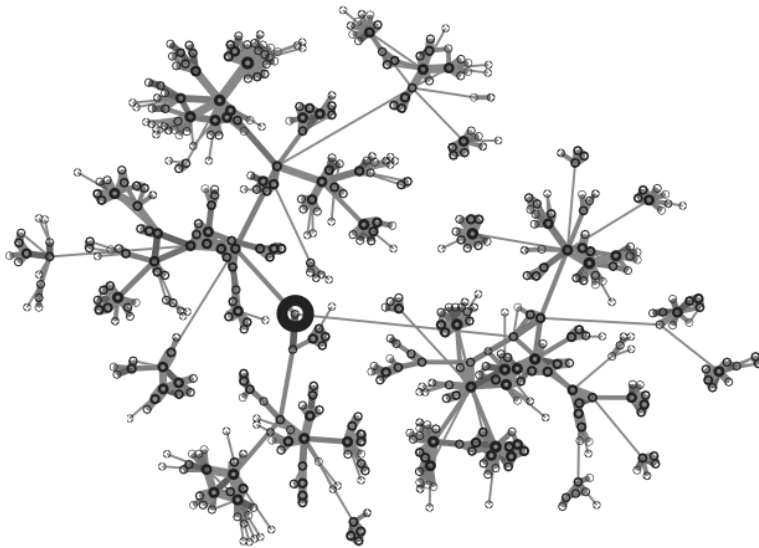
Redes Complejas

Desarmando la componente gigante



R_{GC} tamaño relativo de la CG
 f fracción de enlaces removidos

- **orden ascendente**
- **orden descendente**

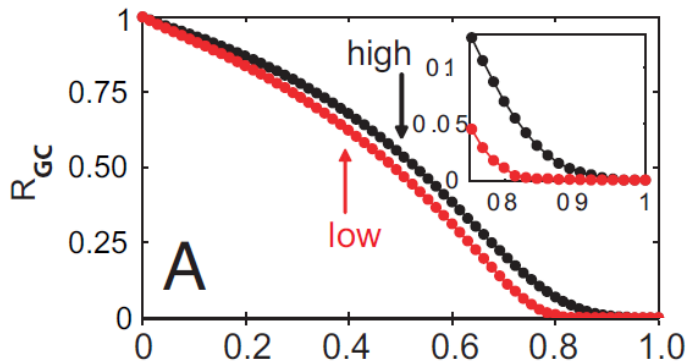


La **CG** se contrae:

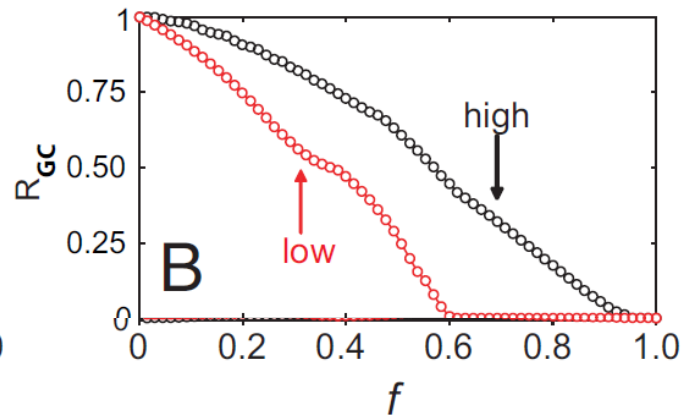
- de manera **gradual**, si se eliminan primero los **enlaces de mayor overlap**
- de manera **abrupta**, si se eliminan primero los **enlaces de menor overlap**

Desarmando la componente gigante

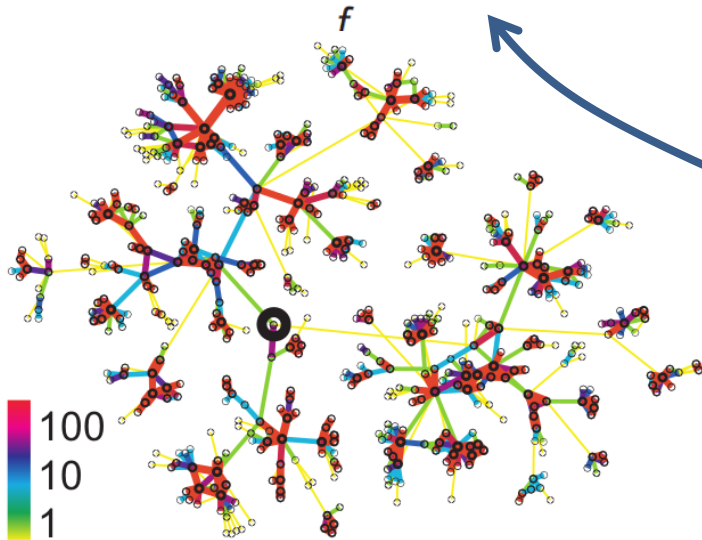
ordenamiento por **intensidad**



ordenamiento por **overlap**



R_{GC} tamaño relativo de la CG
 f fracción de enlaces removidos
 • orden ascendente
 • orden descendente

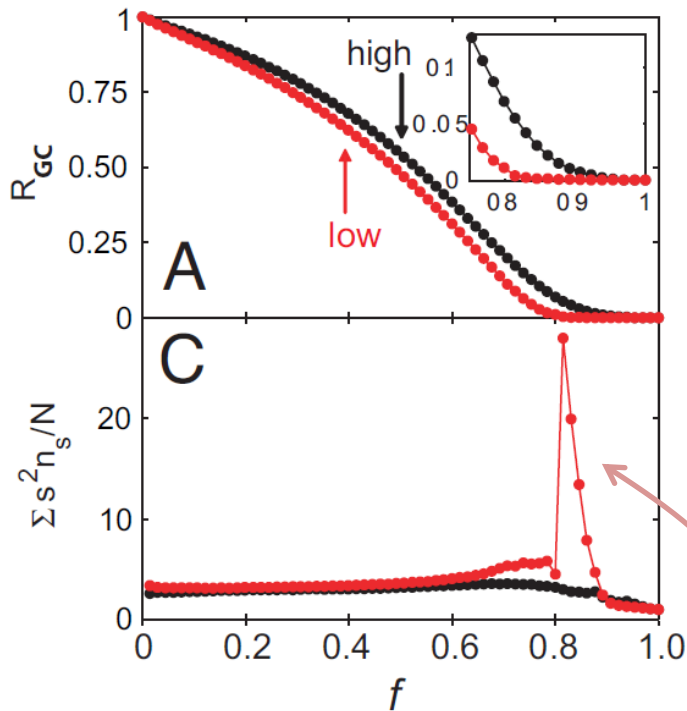


La **CG** se contrae:

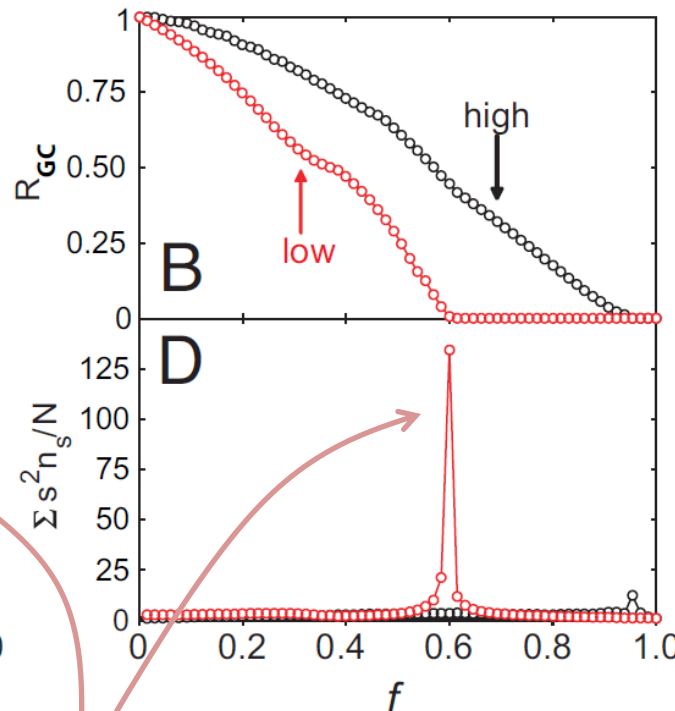
- de manera **gradual**, si se eliminan primero los **enlaces** más **intensos**
- de manera **abrupta**, si se eliminan primero los **enlaces** más **débiles**

Desarmando la componente gigante

ordenamiento por **intensidad**



ordenamiento por **overlap**



R_{GC} tamaño relativo de la CG
 f fracción de enlaces removidos
 • orden ascendente
 • orden descendente

Momento de orden 2 de la distribución de tamaños

$$\frac{1}{N} \sum s^2 n_s$$

Signatura de *criticalidad*
 Transición de fase de 2do orden

s : tamaños de componentes
 n_s : prob de ver una componente de tamaño s

Componentes: tamaños y probabilidades

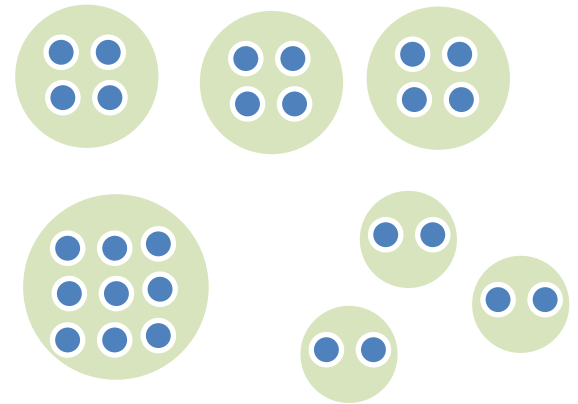
r_s : Numero de componentes de tamaño s

Prob de que 1 nodo pertenezca a una componente de tamaño s

$$p_s = \frac{r_s \cdot s}{N} \quad \left(p_2 = \frac{6}{27} \right)$$

Tamaño medio de un cluster eligiendo un nodo al azar

$$\bar{s} = \sum_s \frac{r_s \cdot s}{N} \cdot s = \frac{1}{N} \sum_s s^2 r_s$$



No me interesa caracterizar esta cantidad para una realizacion particular sino en un sentido estadistico ...

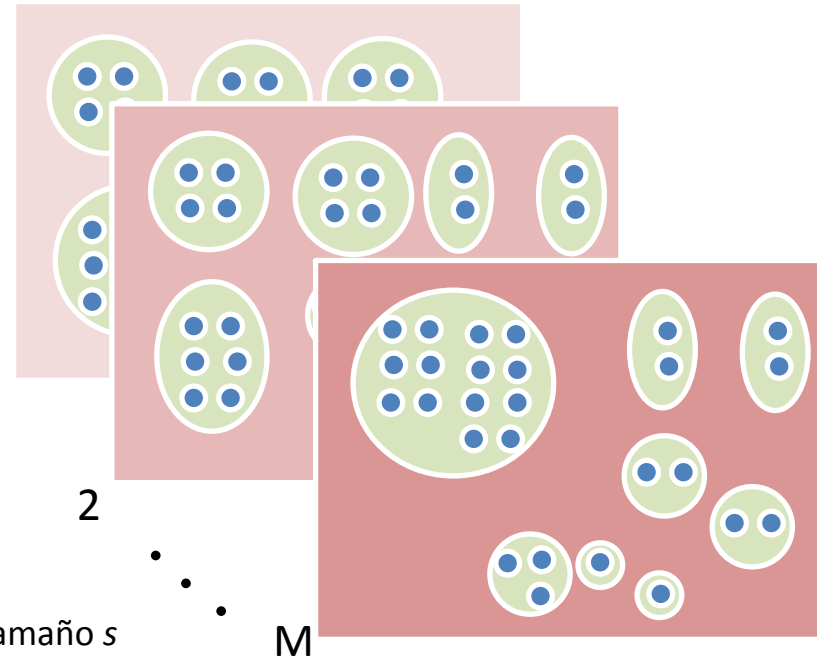
Componentes: tamaños y probabilidades

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum s^2 r_s$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{N} \sum_{s=1}^{s_{max}} s^2 r_s^i \right] = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{s=1}^{s_{max}} \sum_{i=1}^M s^2 r_s^i$$

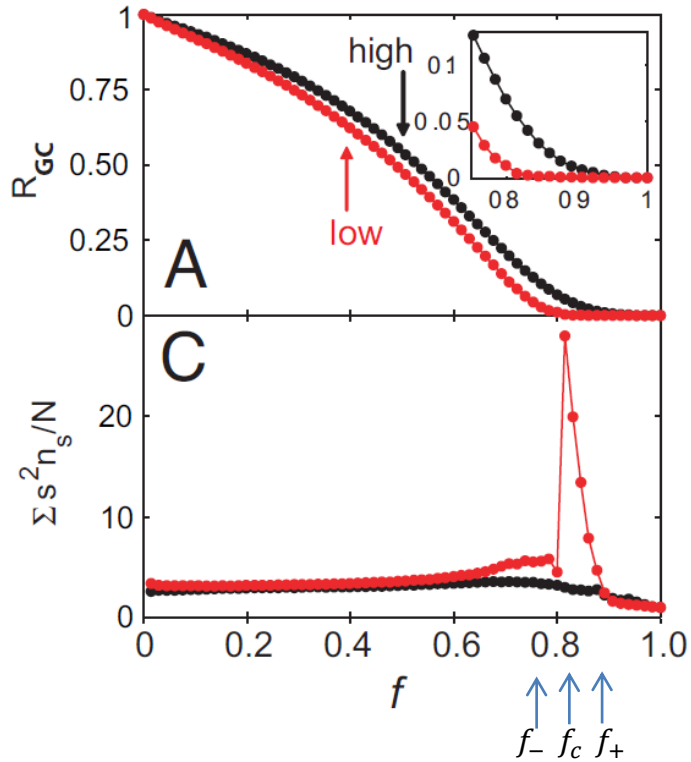
$$= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{s_{max}} s^2 \frac{\sum_{i=1}^M r_s^i}{M}$$

n_s Prob de ver una comp de tamaño s en las M realizaciones (n_s)



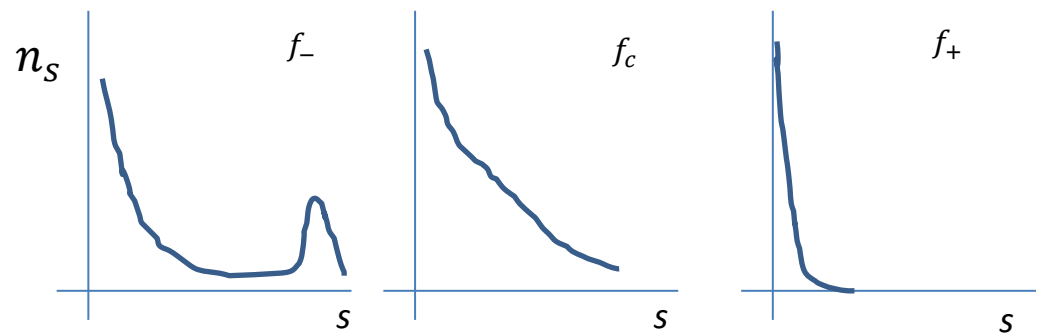
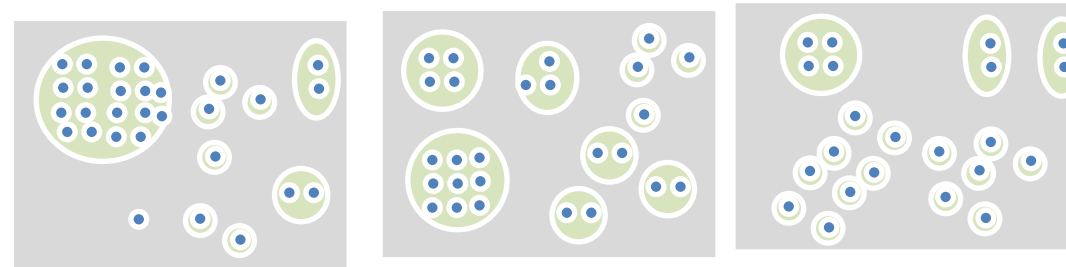
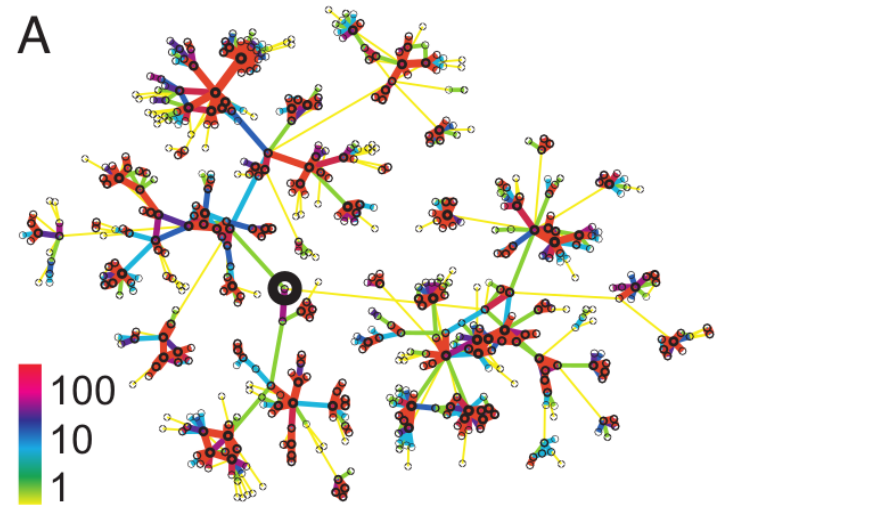
$$\langle S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{s_{max}} s^2 n_s$$

La transición



Que significa que $\langle S \rangle$ diverja?

n_s es una distribución de prob cuya media diverge (!)



$$n_s \sim s^{-a}$$

Referencias

- *Networks Crowds and Market*, Easley & Kleinberg Chap 2
- “Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks”, Bearman *et al* (2004) *Am. Jour. Soc.*
- “The small world problem” , Stanley Milgram (1967) *Psychology Today*
- “Planetary-scale views of instant-messaging network”, Leskovec (2007)
- <https://oracleofbacon.org>

- “Getting a Job. A study of contacts and careers” Mark Grannoveter (1974)
- “Suicide and Friendships Among American Adolescents”, Bearman & Moody (2004) *Am. J. Public Health*
- “Structure and tie strengths in mobile communication networks”, Onnela *et al* (2007) *PNAS*