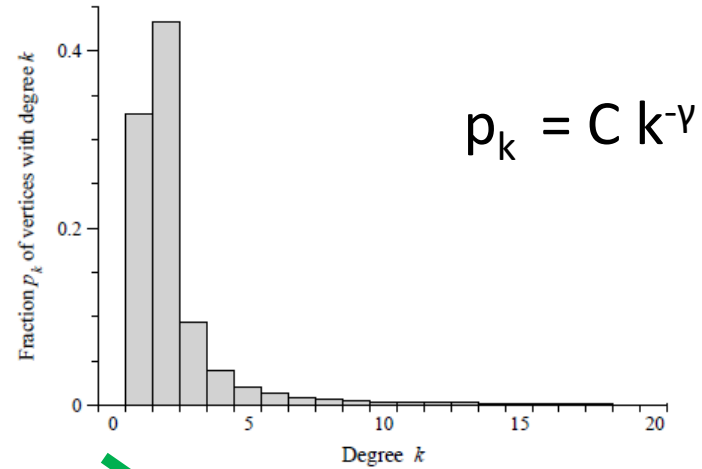
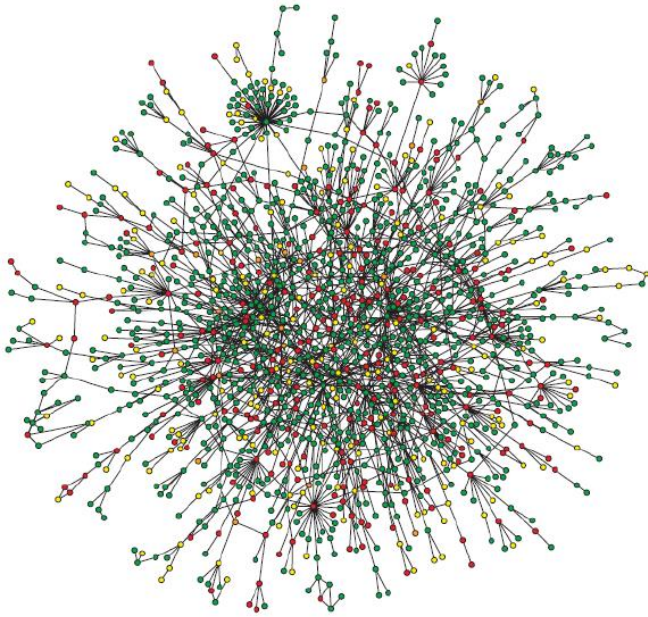


# Propiedades de escala

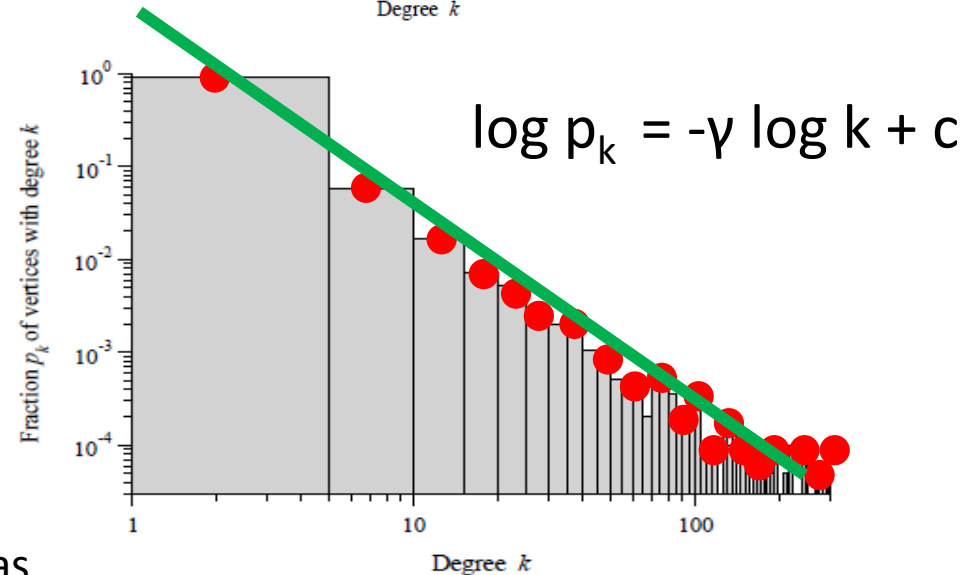
# Distribucion de grado



$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$

$$e^{\log p_k} = e^{-\gamma \log k + c}$$

$$p_k = C k^{-\gamma} \quad \text{Ley de potencias}$$



# Libre de escala

$$p_k = C k^{-\gamma}$$

$$f(x) \sim x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha x^\alpha$$

# Libre de escala

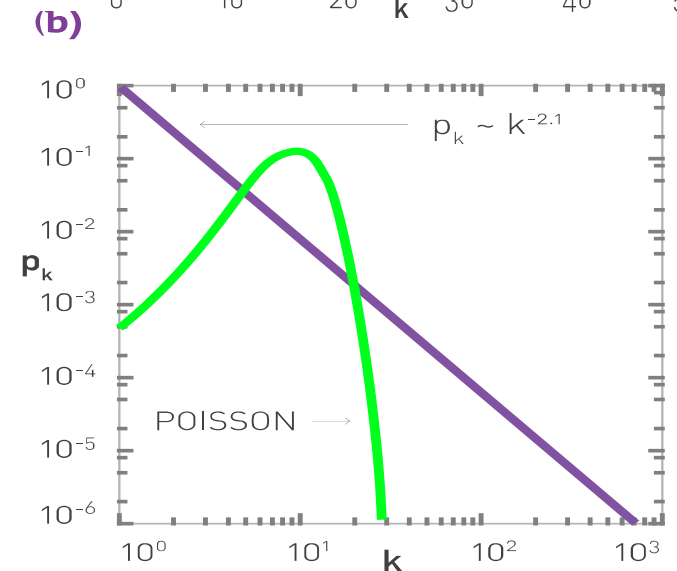
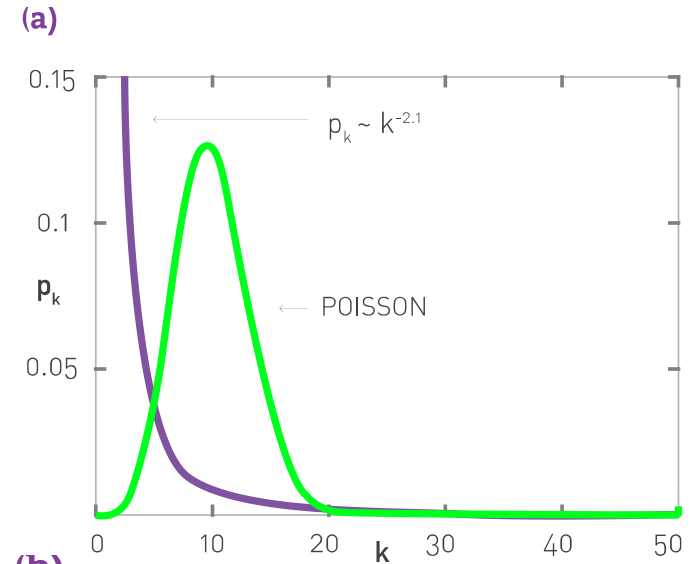
$$p_k = C k^{-\gamma}$$

$$f(x) \sim x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha f(x)$$

$f(x)$  describe el comportamiento del sistema y es adecuado para describir lo que se observa a cualquier escala (i.e. para cualquier valor de  $\lambda$ ) a menos de una constante



3A.

s, a predom-  
rions (see ar-  
ation of the  
rapid drop  
at has been  
LO barriers,  
t is obtained  
y by d-char-  
igin of this  
tively small  
ned. This is  
dependence  
ig effects on  
; calculation  
re Co-ALO  
; also shown  
rop can be  
waves.

and in sev-  
onstrate the  
ecture of the  
ng the spin  
ns. The neg-  
nterface has  
cts between  
is similar to

# Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási\* and Réka Albert

Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a **scale-free power-law distribution**. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary **scale-free distributions**, which indicates that the development of large networks is governed by **robust self-organizing phenomena** that go beyond the particulars of the individual systems.

The inability of contemporary science to describe systems composed of nonidentical elements that have diverse and nonlocal inter-

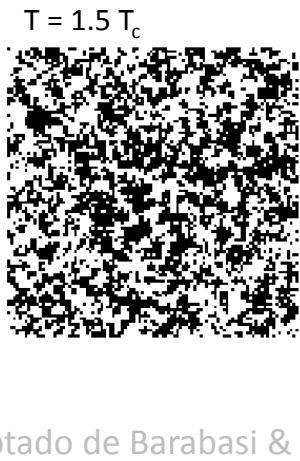
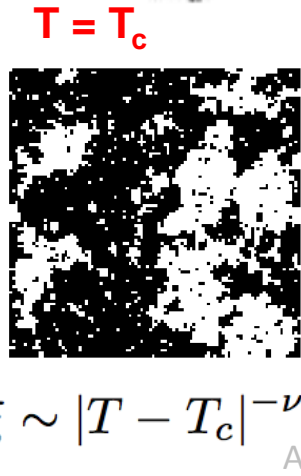
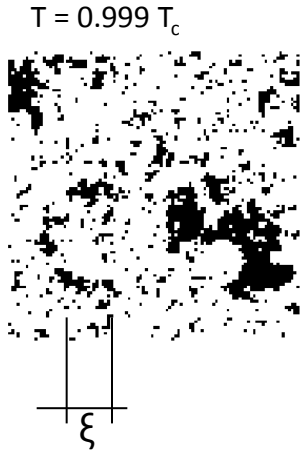
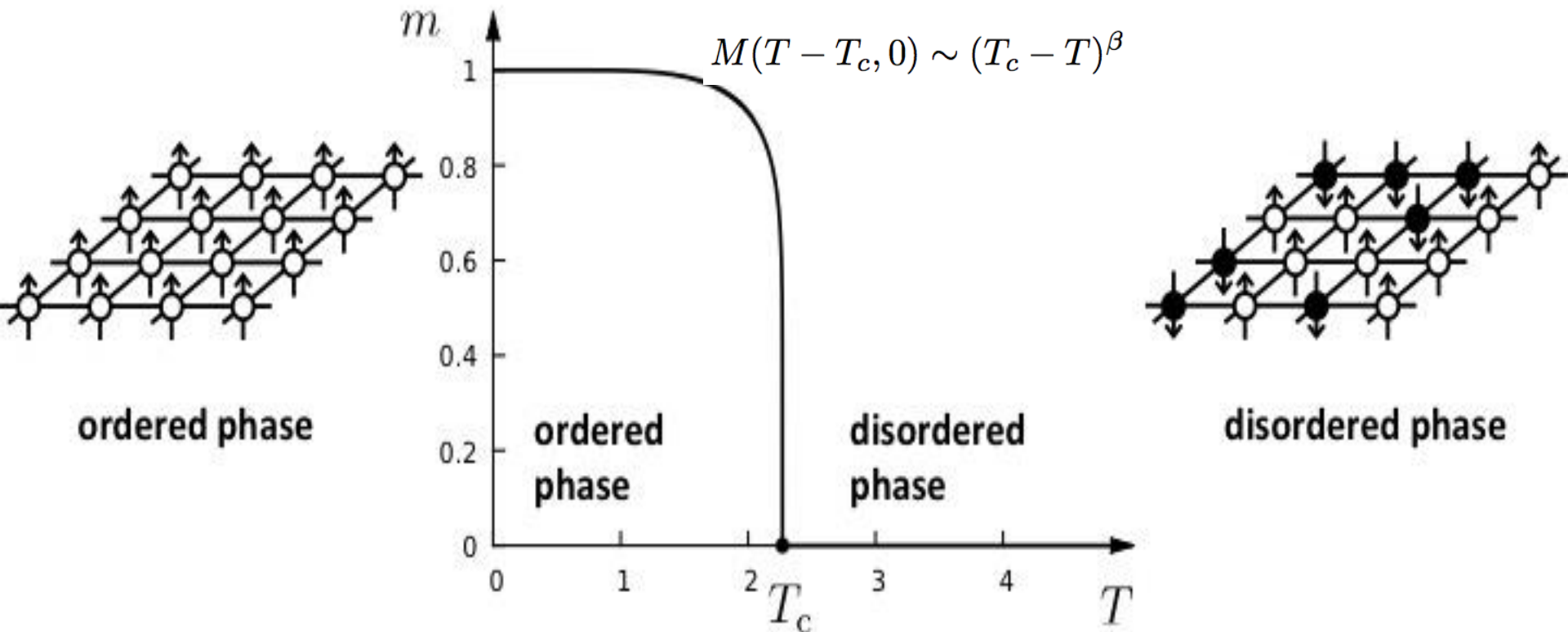
---

Department of Physics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA.

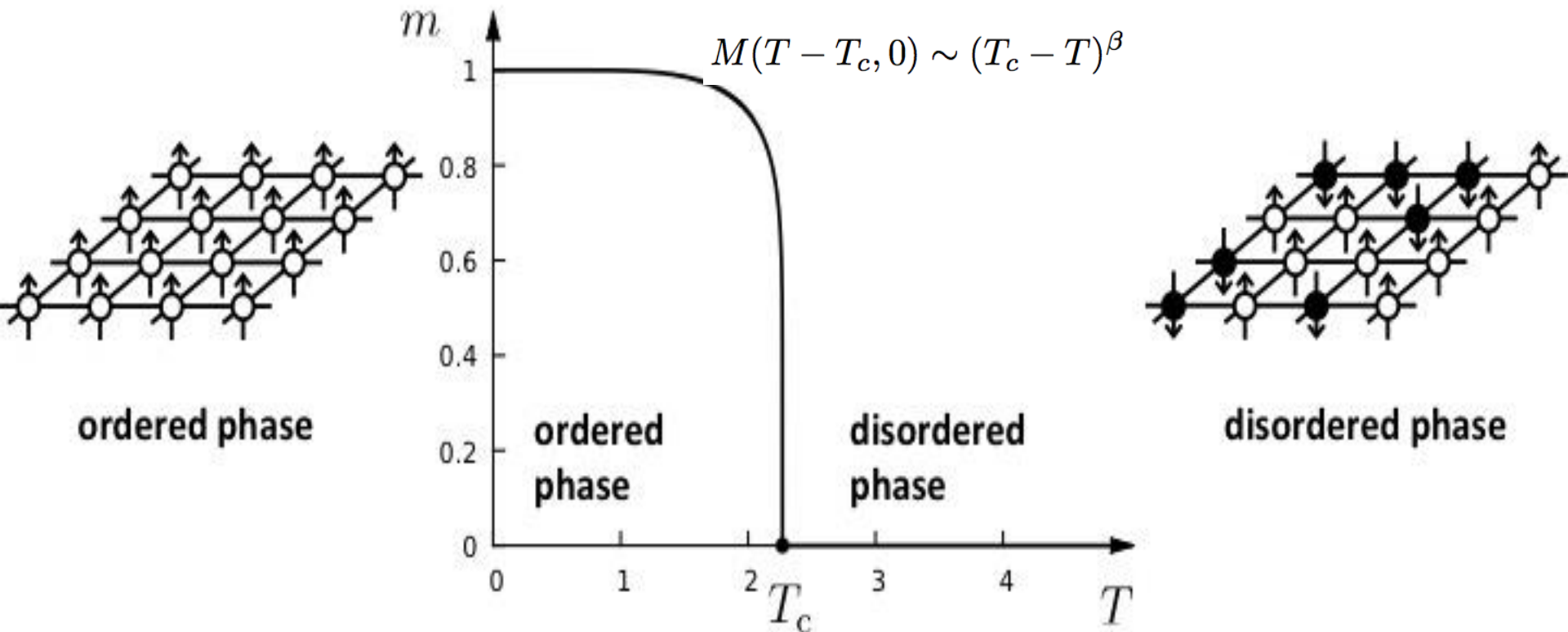
\*To whom correspondence should be addressed. E-mail: alb@nd.edu

actions currently limits advances in many disciplines, ranging from molecular biology to computer science (*1*). The difficulty of describing these systems lies partly in their topology: Many of them form rather complex networks whose vertices are the elements of the system and whose edges represent the interactions between them. For example, liv-

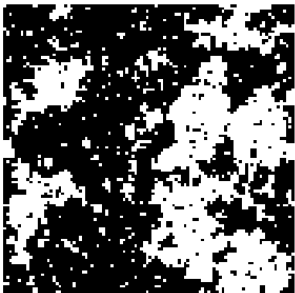
# Fenómenos críticos: materiales magnéticos



# Fenómenos críticos: materiales magnéticos



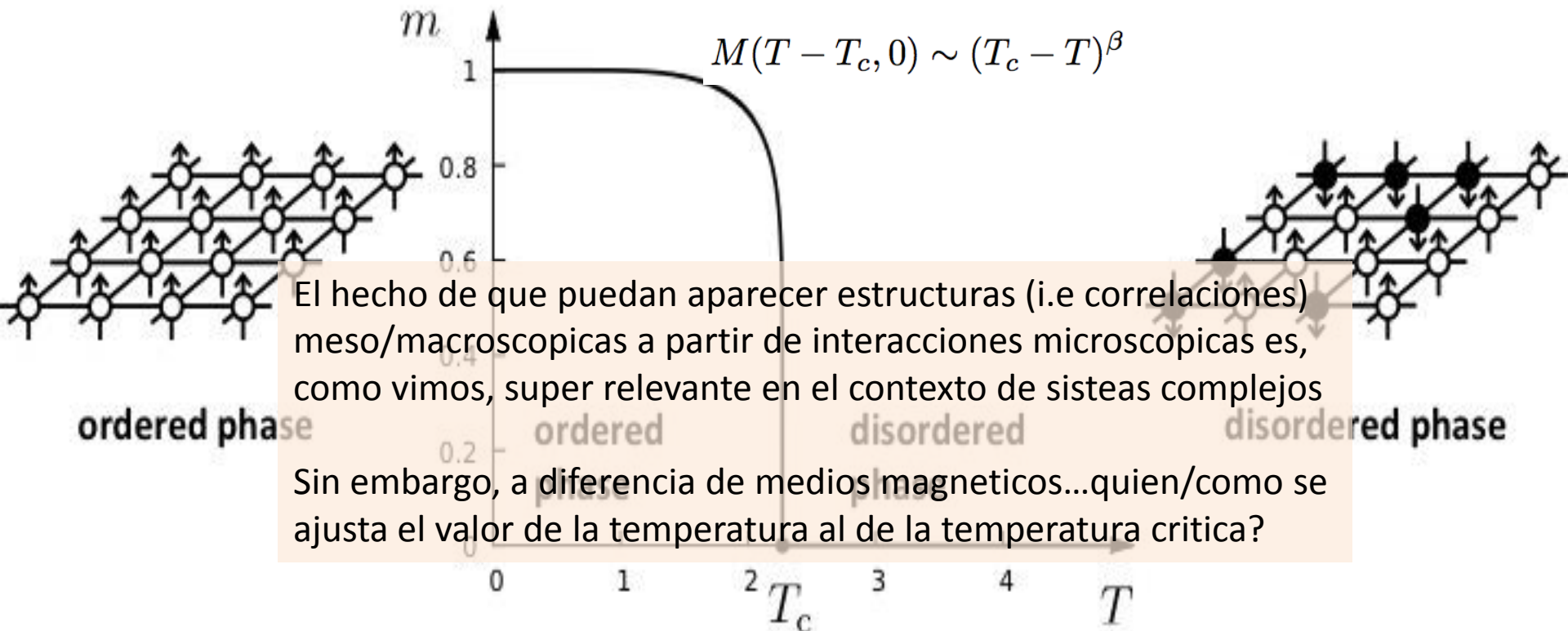
$T = T_c$



$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala:** distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad:** exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones

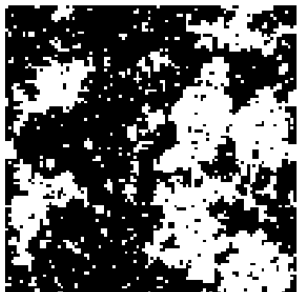
# Fenómenos críticos: materiales magnéticos



El hecho de que puedan aparecer estructuras (i.e correlaciones) meso/macrosópicas a partir de interacciones microscópicas es, como vimos, super relevante en el contexto de sistemas complejos

Sin embargo, a diferencia de medios magnéticos... ¿quién/como se ajusta el valor de la temperatura al de la temperatura crítica?

$T = T_c$



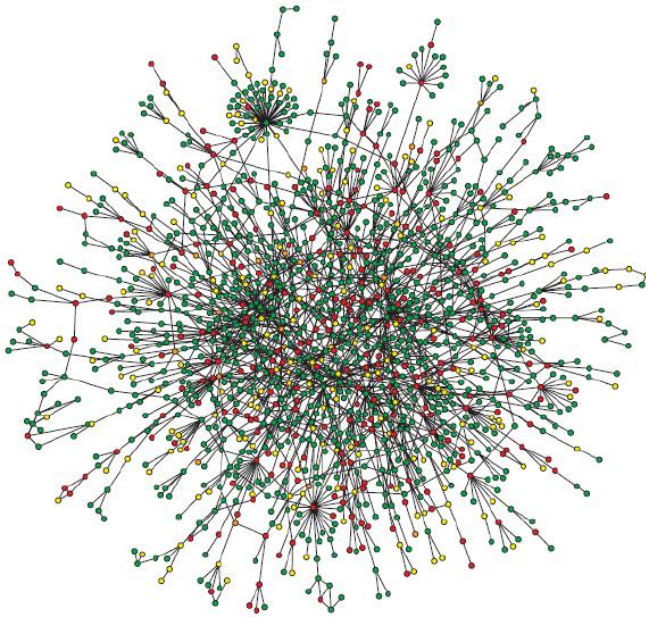
$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala:** distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad:** exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones

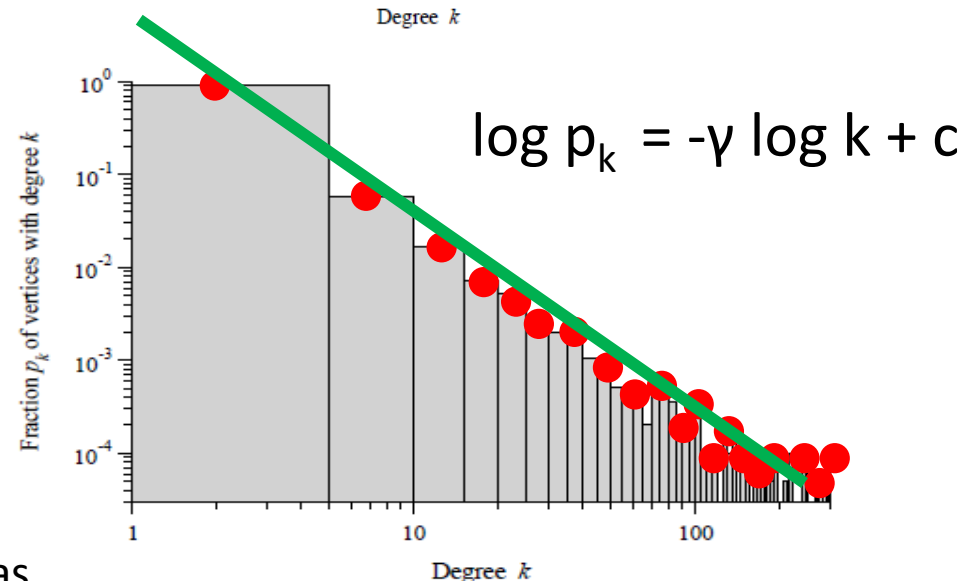


# Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási\* and Réka Albert



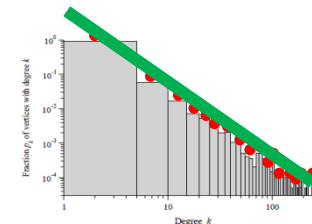
Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.



$$p_k = C k^{-\gamma} \quad \text{Ley de potencias}$$

# Formalismo

$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



## Discreto

Probabilidad de que un nodo tenga grado  $k$

$$p_k = Ck^{-\gamma}.$$

Condición de normalización:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

$$C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} = 1$$

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}} = \frac{1}{\zeta(\gamma)},$$

Función zeta de Riemann ( $\gamma > 1$ )

$$p_k = \frac{k^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)}$$

## Continuo

Para avanzar analíticamente asumimos que el grado de un nodo puede ser un número real

$$p(k) = Ck^{-\gamma}.$$

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} p(k) dk = 1$$

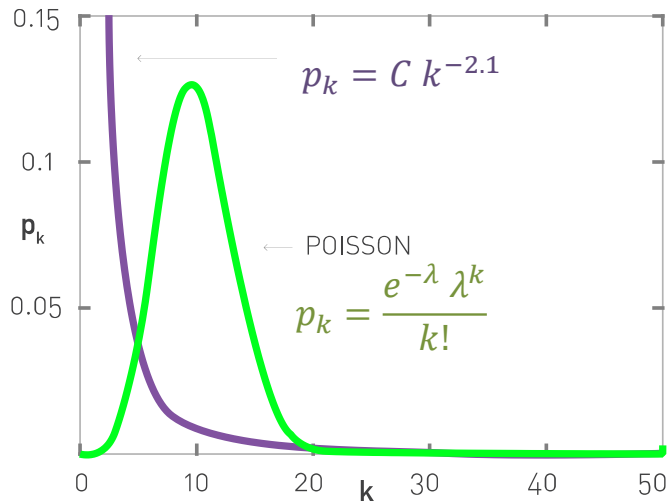
$$C = \frac{1}{\int_{k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma} dk} = (\gamma - 1) k_{\min}^{\gamma-1}$$

Grado a partir del cual se observa ley de potencia

$$p(k) = (\gamma - 1) k_{\min}^{\gamma-1} k^{-\gamma}.$$

# Diferencias entre ley de potencias y Poisson

(a)

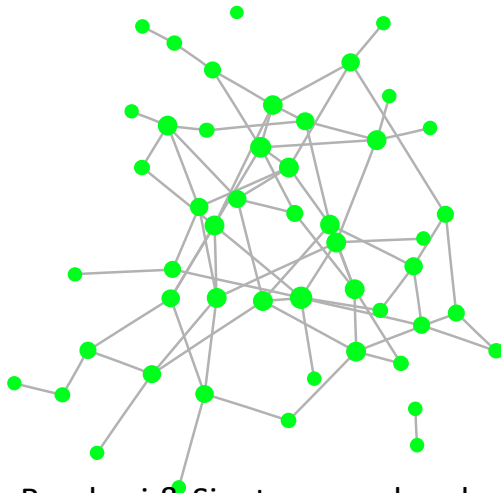


diferencias:

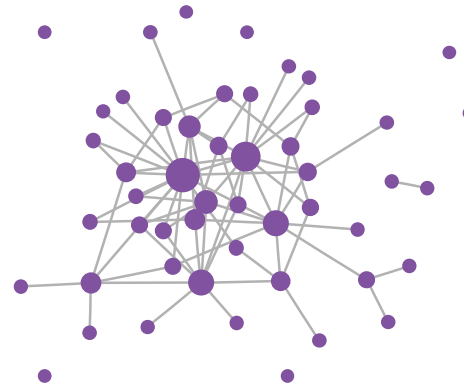
*Exceso* de nodos  $k$   
bajos y altos en LP

Exceso de nodos  
 $k \sim \langle k \rangle$  en Poisson

(c)

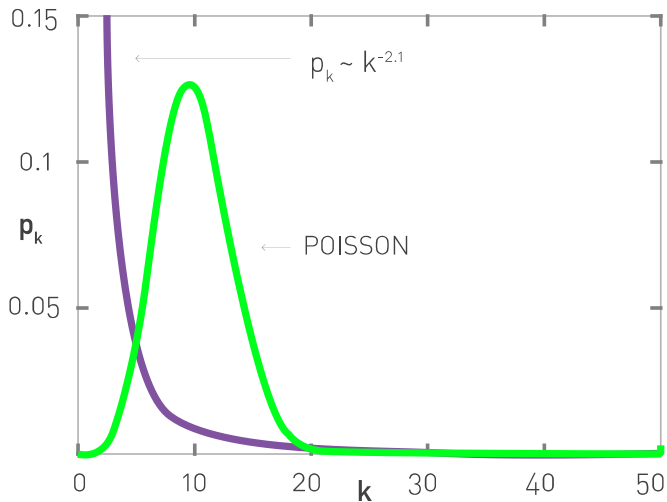


(d)

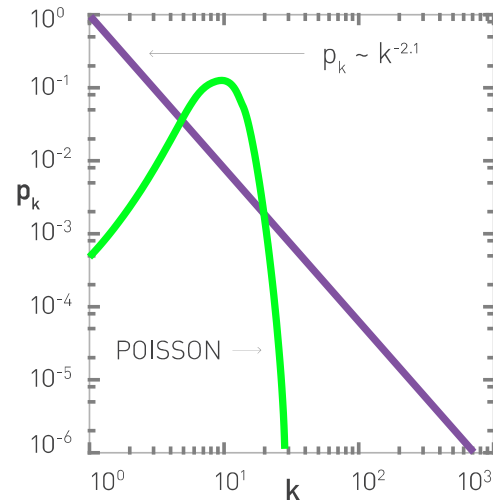


# Diferencias entre ley de potencias y Poisson

(a)



(b)



Diferencias:

- Exceso de nodos  $k$  bajos y altos en LP
- Exceso de nodos  $k \sim \langle k \rangle$  en Poisson

Sea una red Poisson:  $p_k = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$

Si  $\langle k \rangle = \mu = 4.6$  y hay en total  $N = 10^{12}$  (WWW) nodos la prob de encontrar un nodo con  $k \geq 100$

$$N_{k \geq 100} = 10^{12} \sum_{k \geq 100}^{\infty} \frac{4.6^k e^{-4.6}}{k!} \sim 10^{-82}$$

Esperaría ver **0** hubs

Si fuera una red Ley de Potencia ( $\gamma = 2.1$ )

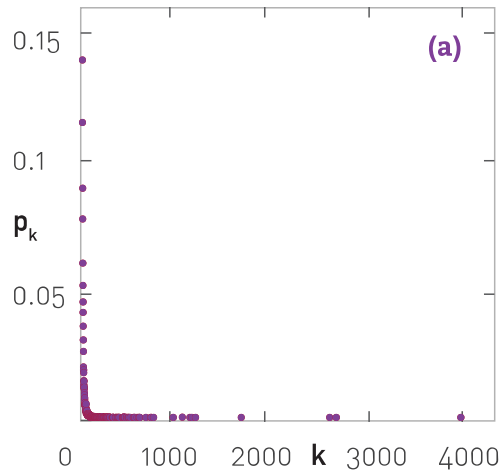
$$N_{k \geq 100} = 10^{12} \sum_{k \geq 100}^{\infty} \frac{k^{-2.1}}{\zeta(2.1)} \sim 10^9$$



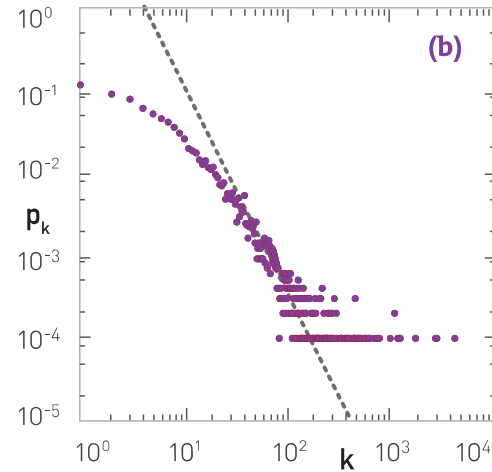
# Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

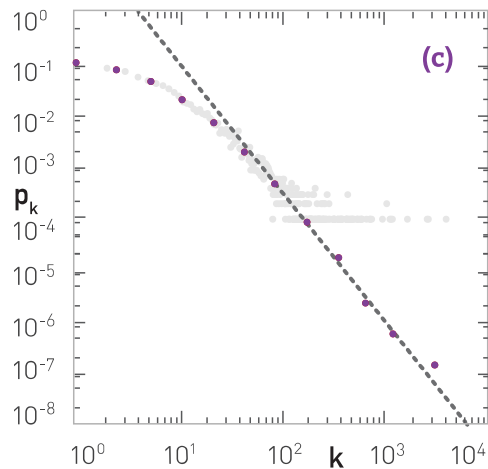
LINEAR SCALE



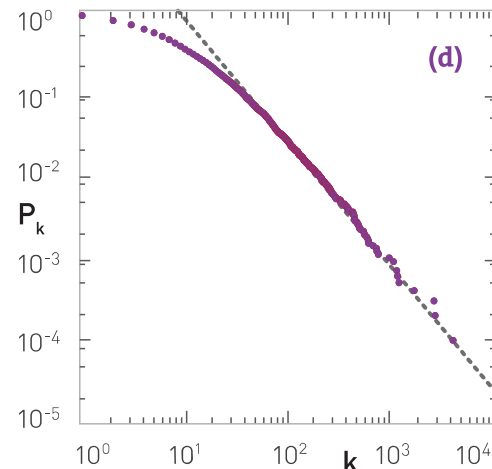
LINEAR BINNING



LOG-BINNING



CUMULATIVE



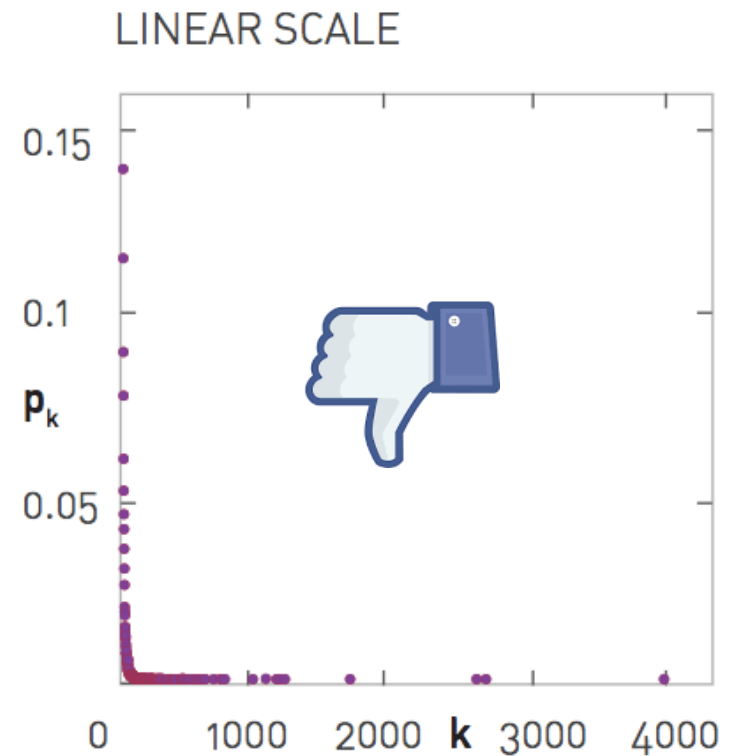
# Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

## 1. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

El rango de valores posibles de grado hace que se pierda todo detalle



# Visualizando leyes de potencias

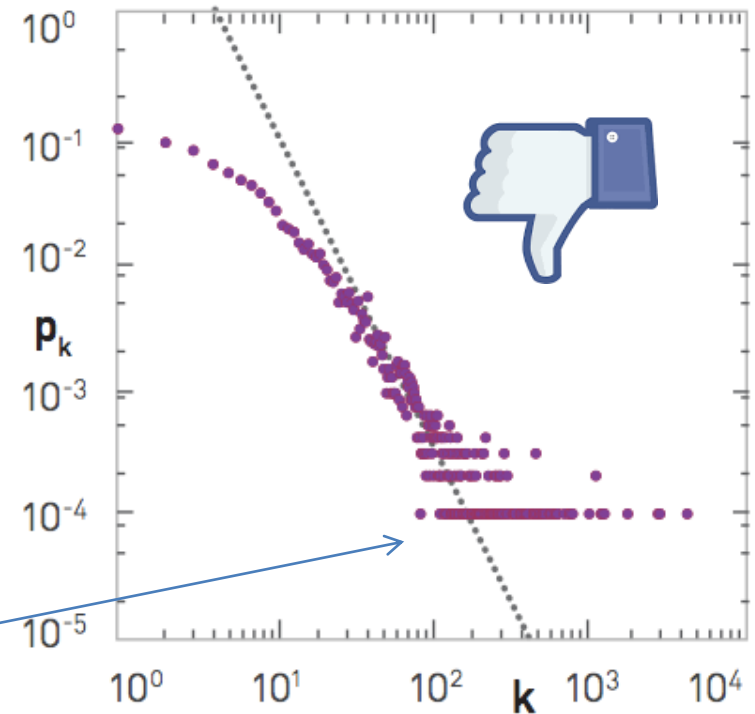
$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

## 2. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

utilizando escalas Log-Log

LINEAR BINNING ( $\Delta k = 1$ )



Al usar un  $\Delta k$  fijo (y chico) típicamente aparece un único ejemplo de un dado grado en la región de  $k$ -alto, dando lugar a la meseta de eventos  $1/N$  (tenemos 1 o 0 cluster de tamaño  $k \gg 1$ )



# Visualizando leyes de potencia

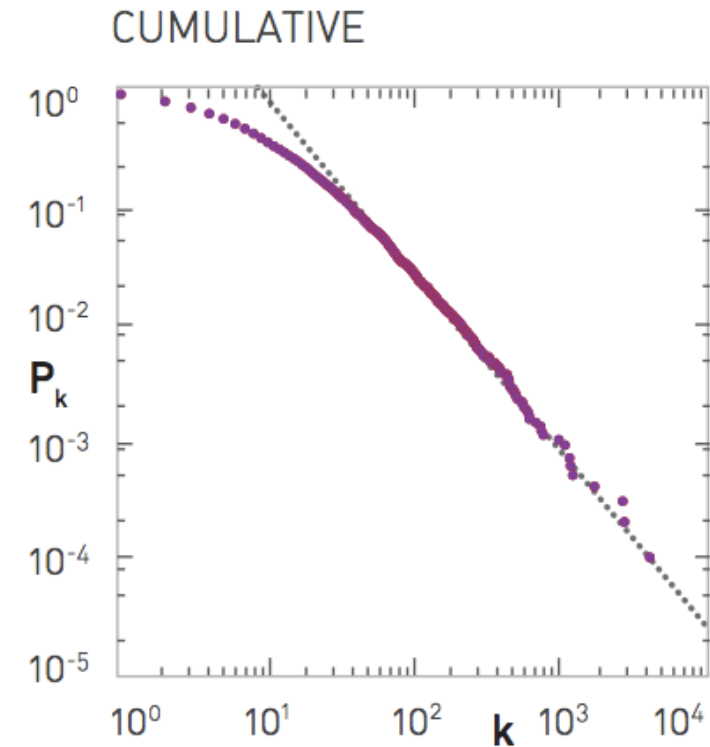
## 3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado  $k$  o mayor

- si  $p_k \sim k^{-\gamma}$  entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$



# Visualizando leyes de potencia

## 3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

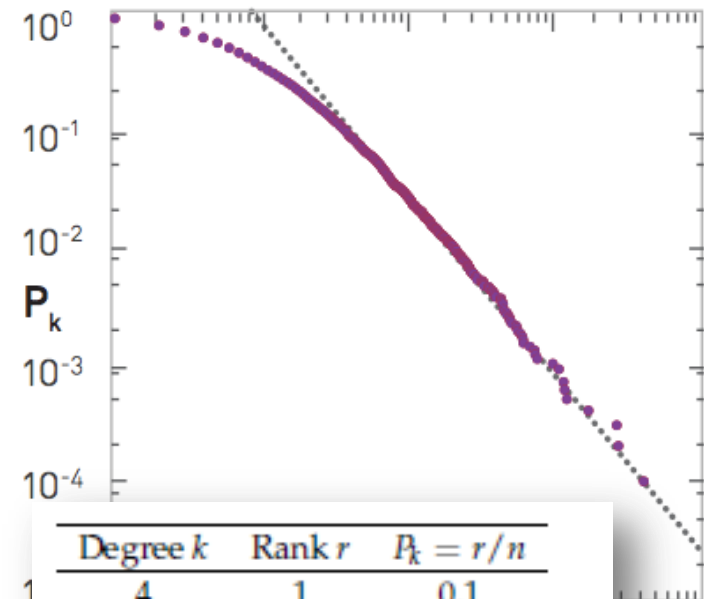
Prob. de encontrar un nodo de grado  $k$  o mayor

- si  $p_k \sim k^{-\gamma}$  entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma-1} k^{-(\gamma-1)}$$

- $P_k$  es fácil de calcular (no hay que binnear)
  - ranking  $r$  de un nodo: nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_k = r_k/N$ : fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado  $r_k$

CUMULATIVE



Degree $k$	Rank $r$	$P_k = r/n$
4	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.3
2	4	0.4
2	5	0.5
2	6	0.6
2	7	0.7
1	8	0.8
1	9	0.9
0	10	1.0

# Visualizando leyes de potencia

## 3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado  $k$  o mayor

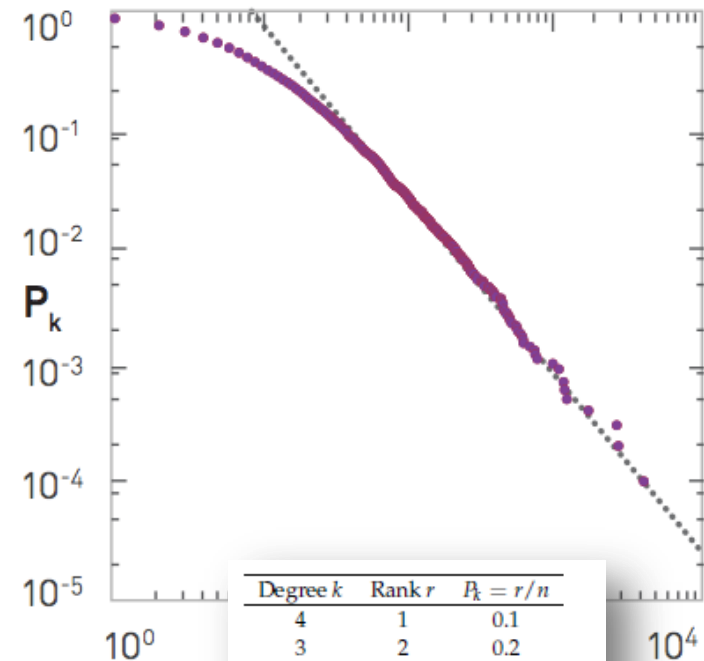
- si  $p_k \sim k^{-\gamma}$  entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma-1} k^{-(\gamma-1)}$$

- $P_k$  es fácil de calcular (no hay que binnear)
  - ranking  $r$  de un nodo: nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_{k=r_k}/N$ : fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado  $r_k$
  - Graficamos para cada nodo- $i$

$$P_{k_i} = \frac{r_{k_i}}{N} \quad \text{en función de } k_i$$

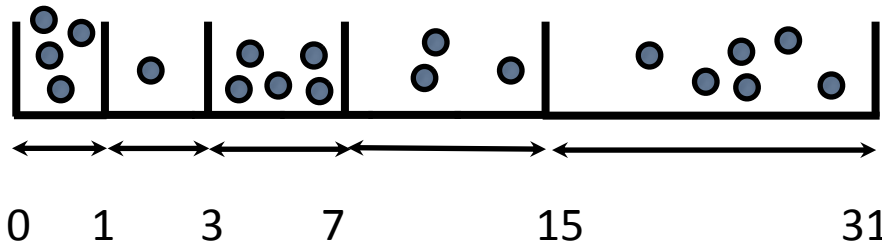
CUMULATIVE



Degree $k$	Rank $r$	$P_k = r/n$
4	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.3
2	4	0.4
2	5	0.5
2	6	0.6
2	7	0.7
1	8	0.8
1	9	0.9
0	10	1.0

# Visualizando leyes de potencias

## 4. Bineo logaritmico



$$b_0 = 1$$

$$b_i = b_{i-1} + 2^i \quad i > 0$$

$$\Delta b_i = 2^i$$

$$\Delta b_{i+1} = 2\Delta b_i$$

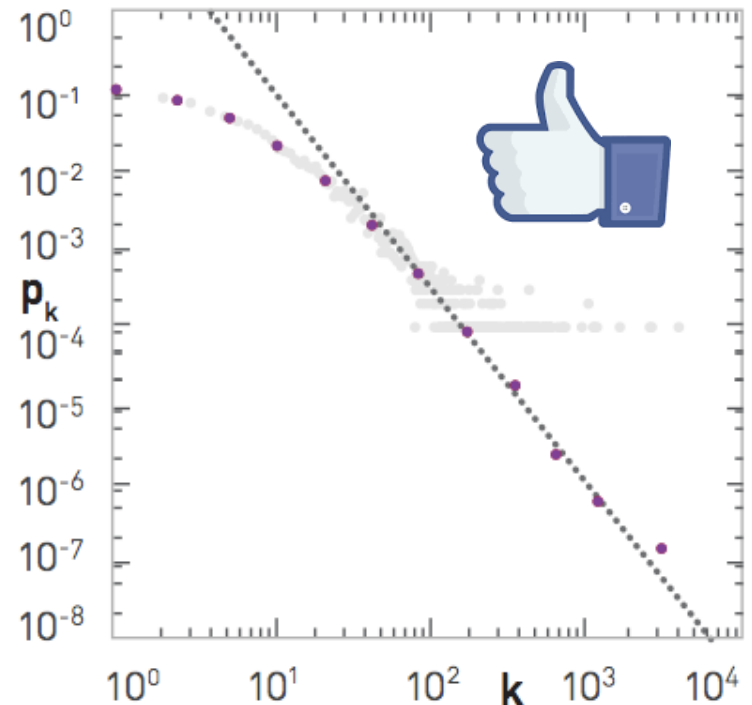
Celdas equiespaciadas en escala logaritmica  
 $\log \Delta b_{i+1} = \log \Delta b_i + \log 2$

Distribución de grado dada por

$$p(\langle k_i \rangle) = \frac{N_i}{\Delta b_i}$$

Bin crece con k: se equaliza el nro de nodos

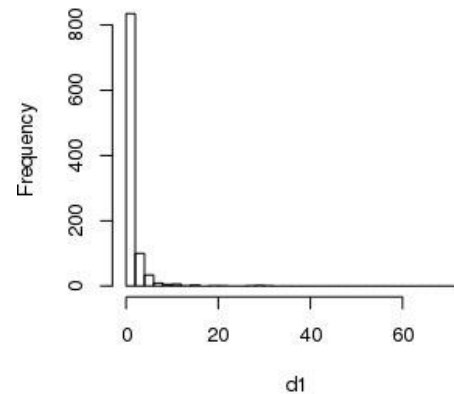
LOG-BINNING



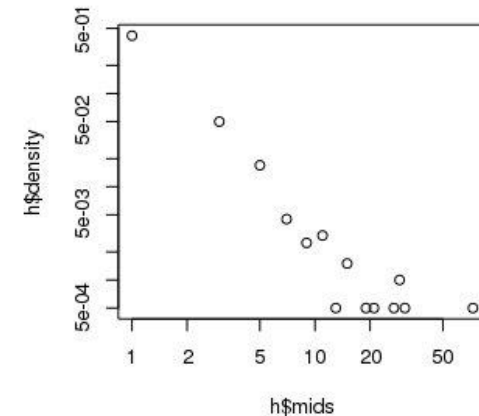


```
require(igraph)
#genero red scale-free
g<-barabasi.game(1000)
#calculo el grado
d<-degree(g,mode="all")
#figura de 4 paneles
layout(matrix(1:4,2,2,byrow=TRUE))
h<-hist(d,breaks = 50,main="histograma lineal")
plot(h$mids,h$density,log="xy",typ="p",main="bineado lineal")
#calculo de prob acumulada
rr<-rank(-d)/length(d)
plot(d,rr,log="xy",main="funcion distribucion acumulada")
#bineado logaritmico
bins<-2^seq(0,ceiling(log2(max(d))))
# > bins
# [1] 1 2 4 8 16 32 64 128
#calculo hstograma con bins log
h <- hist(d,breaks=bins,plot=FALSE)
plot(h$mids,h$density,log="xy",typ="p",main="log binning")
```

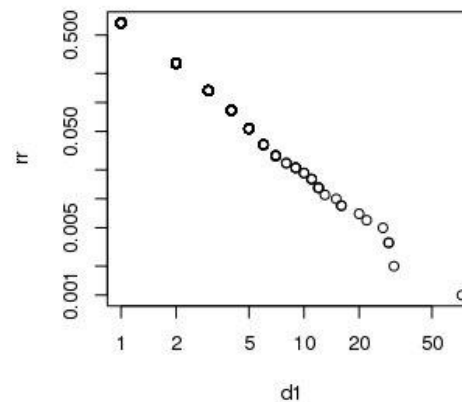
histogram



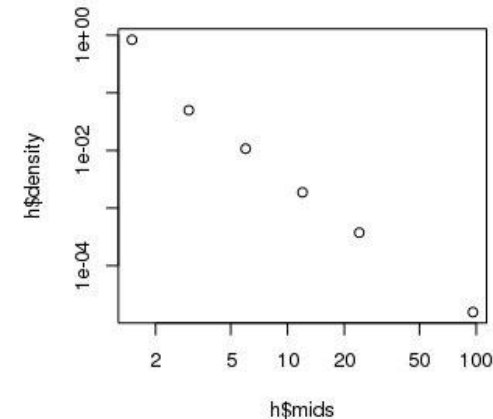
linear binning



cumulative distribution function

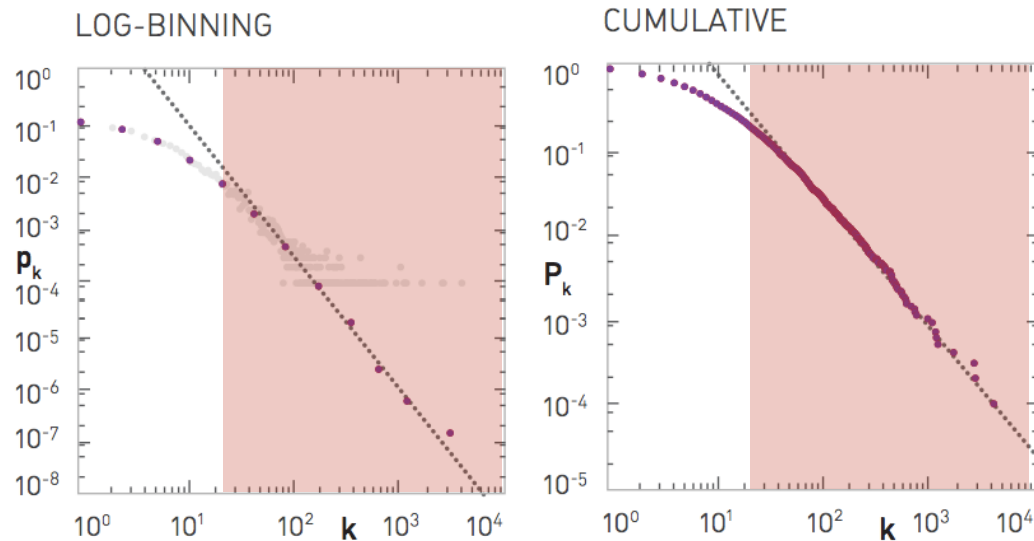


log binning



# Ajustando leyes de potencia

## La manera **incorrecta** de hacerlo



- Ajuste por mínimos cuadrados de la parte del grafico que **parece** lineal en log-log

$$\log p_k = -\gamma \log k + \text{constant}$$

$$\log P_k = (-\gamma + 1) \log k + \text{constant}$$

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **incorrecta** de hacerlo

Por qué esta **mal**?

- Las probabilidades tienen que estar normalizadas. Ajustar una línea en un gráfico nunca puede dar una distribución válida.
- Muchas funciones **parecen** lineales en log-log
- Discrepancias en la cola son más relevantes a la hora del ajuste
- El “método de los 5 puntos basculantes” no es de lo más recomendable en ciencia

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo

Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation (MLE)**

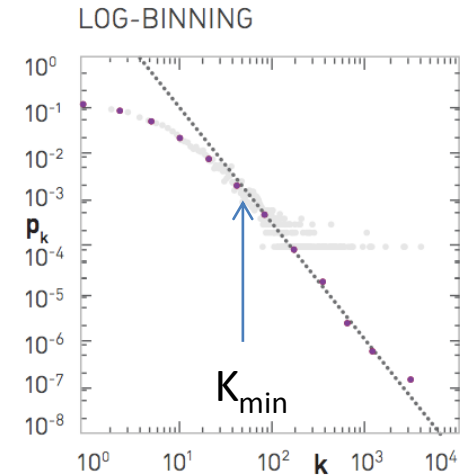
- Se comienza con la hipótesis

$$p(k) = Ck^{-\gamma} \quad C = (\gamma - 1) K_{min}^{\gamma-1}$$

- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud.

Prob de observar los datos observados,  $(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$  dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}(k|\gamma) = p(k_1)p(k_2) \dots p(k_N) = \prod_{i=1}^N p(k_i)$$





# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo

Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation (MLE)**

- Se comienza con la hipótesis

$$p(k) = Ck^{-\gamma} \quad C = (\gamma - 1) K_{min}^{\gamma-1}$$

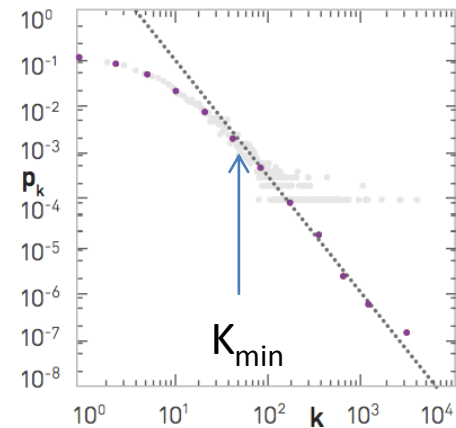
- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud. Prob de observar los datos, dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}(k|\gamma) = \prod_{i=1}^N p(k) = \prod_{i=1}^N \frac{\gamma - 1}{K_{min}} \left( \frac{k_i}{K_{min}} \right)^{-\gamma}$$

- Para un dado  $K_{min}$**  se estima el exponente minimizando la función de verosimilitud (derivando respecto a  $\gamma$ )

$$\gamma = 1 + N \left[ \sum_{i=1}^N \ln \frac{k_i}{K_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1}.$$

LOG-BINNING



Como estimar  $K_{min}$ ?

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo

Como estimar  $K_{\min}$ ?

- Se calcula la función de probabilidad acumulada

- de los datos,  $P_k$
- del ajuste,  $S_k$

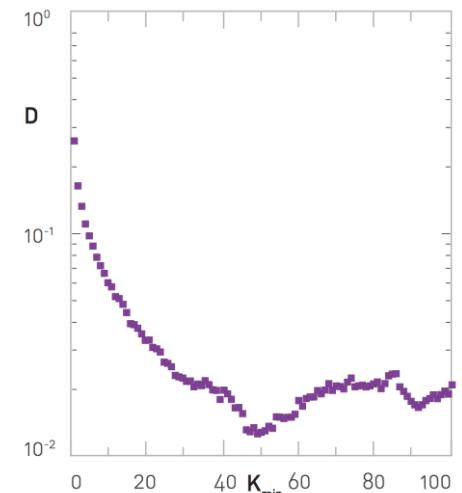
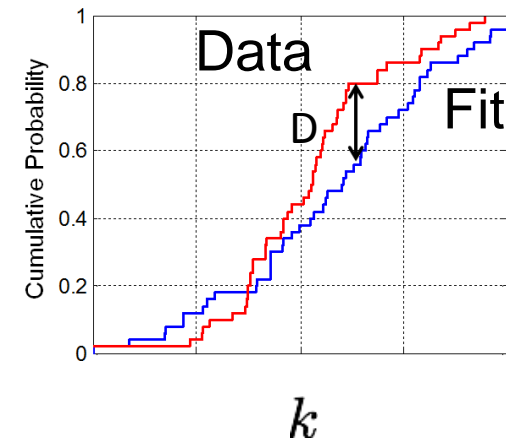
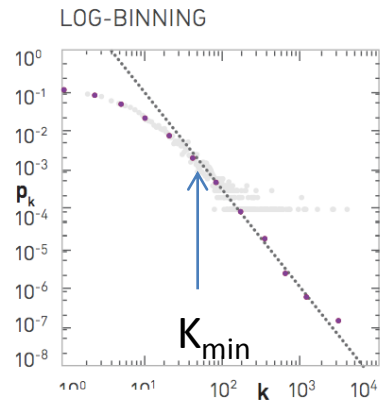
$$P_k = C \sum_{k'=K_{\min}}^k k'^{-\gamma}$$

- Se estima la distancia máxima entre ambas distribuciones

$$D = \max_{k \geq K_{\min}} |S_k - P_k|$$

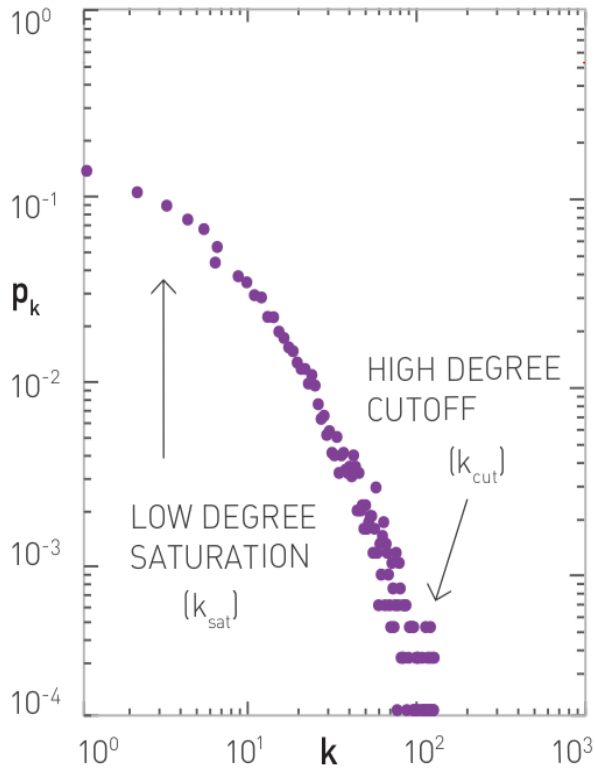
- Se elige el  $K_{\min}$  que minimiza dicha distancia

- Esto es lo que hace `fits_power_law` {igraph} (!)



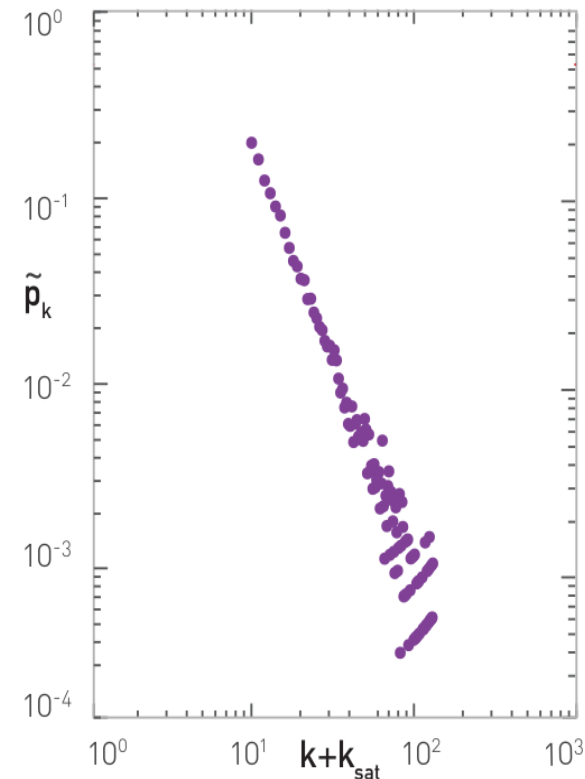
# Ajustando leyes de potencia

## Efectos *de borde* en redes reales



$$p_k \exp\left(\frac{k}{k_{cut}}\right) = a(k + k_{sat})^{-\gamma}$$

$$\hat{p}_k \sim (k + k_{sat})^{-\gamma}$$

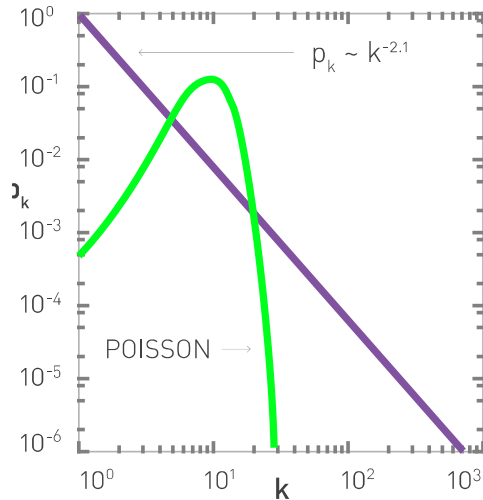


$$p_k = a(k + k_{sat})^{-\gamma} \exp\left(-\frac{k}{k_{cut}}\right)$$



# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

(b)



Estimación del grado máximo de la red

Nro de nodos de grado mayor o igual que  $k_{max}$

$$N_{k \geq k_{max}} = N \sum_{k \geq k_{max}} p_k \sim N \int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk$$

Dada una distribución de grado para una red de  $N$  vértices, cual es el valor esperado de  $k_{max}$ ?

Vamos a **pedir** que  $k_{max}$  cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk = \frac{1}{N}$$

probabilidad de encontrar un nodo con grado mayor a  $k_{max}$

Esto es compatible con que vemos 1 (un) nodo de grado  $k_{max}$  en nuestra red

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado  $p(k)$

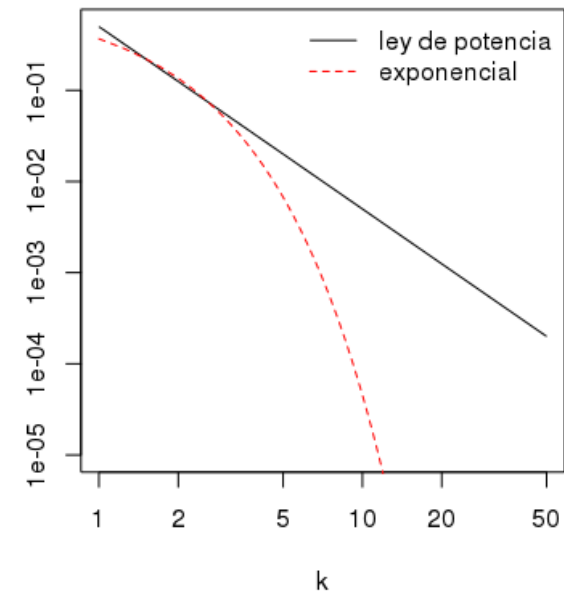
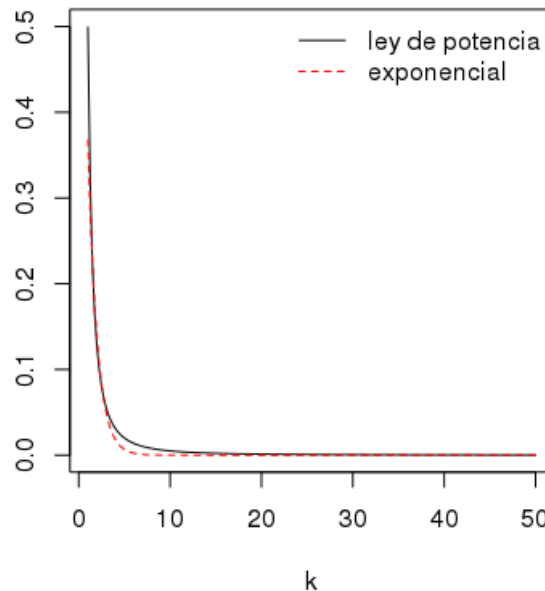
Vamos a pedir que  $k_{max}$  cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

## Distribución exponencial

$$p(k) = Ce^{-\lambda k}$$



# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado  $p(k)$

Vamos a pedir que  $k_{max}$  cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

## Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k} dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

El hecho de tener un **numero finito de nodos**, impone una **escala** para  $k_{max}$

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado  $p(k)$

Vamos a pedir que  $k_{max}$  cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Otro ejemplo:

## Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} e^{-\lambda k} dk = \frac{1}{N \lambda e^{\lambda k_{min}}}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

## Distribución ley de potencias

$$p(k) = (\gamma - 1) k_{min}^{\gamma-1} k^{-\gamma}$$

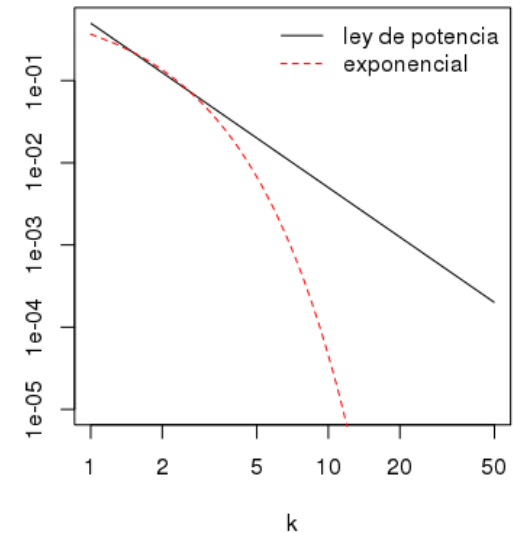
$$\int_{k_{max}}^{\infty} k^{-\gamma} dk = \frac{1}{N(\gamma - 1) k_{min}^{\gamma-1}}$$

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

El hecho de tener un **numero finito de nodos**, impone una **escala** para  $k_{max}$



# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs



## Distribución exponencial

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

$k_{max}$  crece de manera **logarítmica** con el tamaño de la red:

$$k_{max} \sim k_{min}$$

## Distribución ley de potencias

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$k_{max}$  crece de manera **polinómica** con el tamaño de la red: puede ser **ordenes de magnitud mayor** que  $k_{min}$

# Efectos de tamaño finito para leyes de potencia

Valor esperado para  $k_{max}$

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

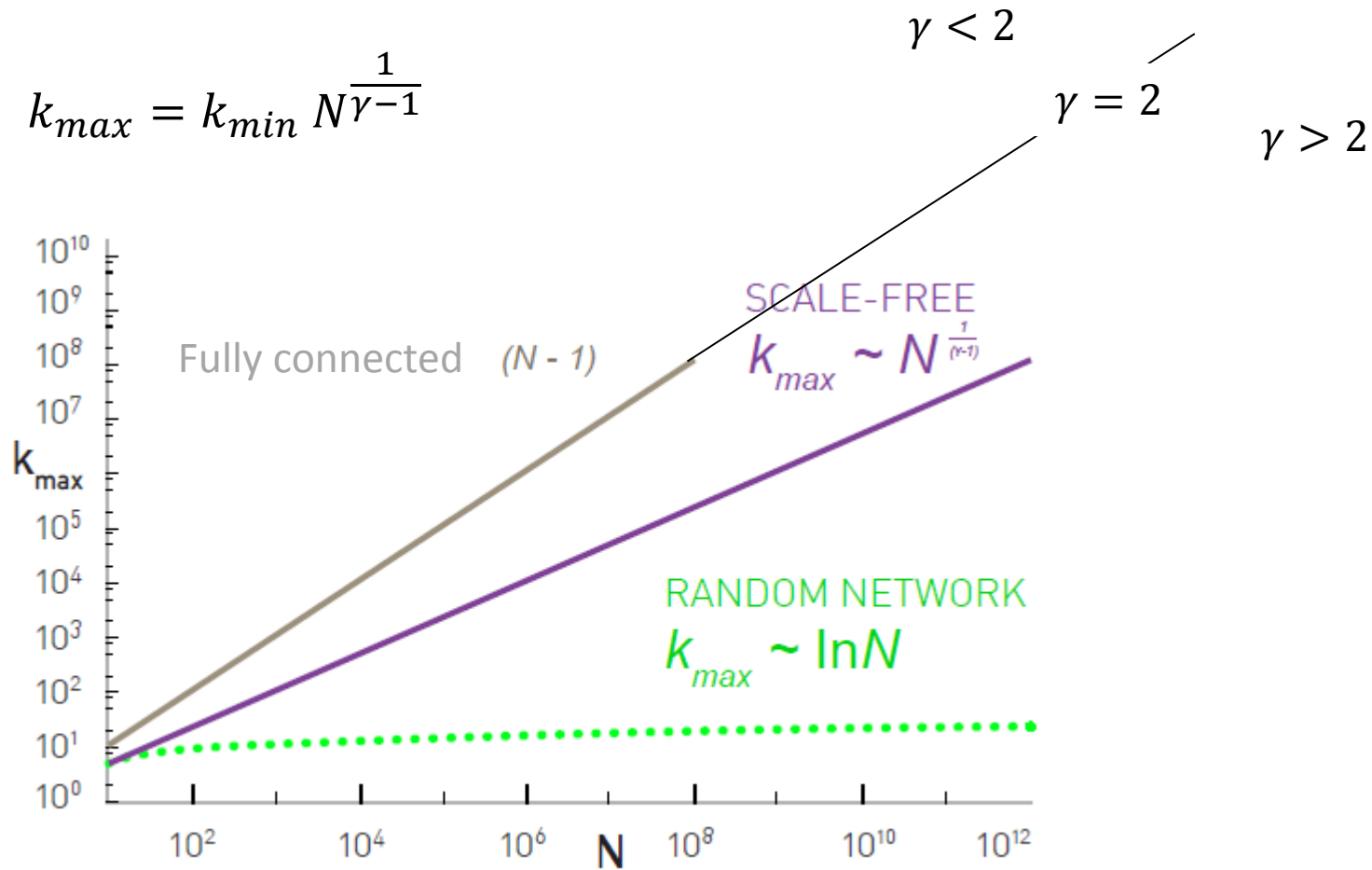
Para una distribución dada tipo ley de potencia,  $k_{max}$  aumenta con el tamaño del sistema

- Si  $\gamma > 2$ ,  $k_{max}$  crece más lento que  $N$
- Si  $\gamma = 2$ ,  $k_{max} \sim N$ . El tamaño del mayor *hub* es  $o(N)$
- Si  $\gamma < 2$ ,  $k_{max}$  crece más rápido que  $N$ . El hub atrae para sí una fracción creciente de links (comportamiento anómalo, no se observa si no se admiten multi-links)

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



# Que significa *libre de escala*?

$$f(x) \sim x^\alpha$$

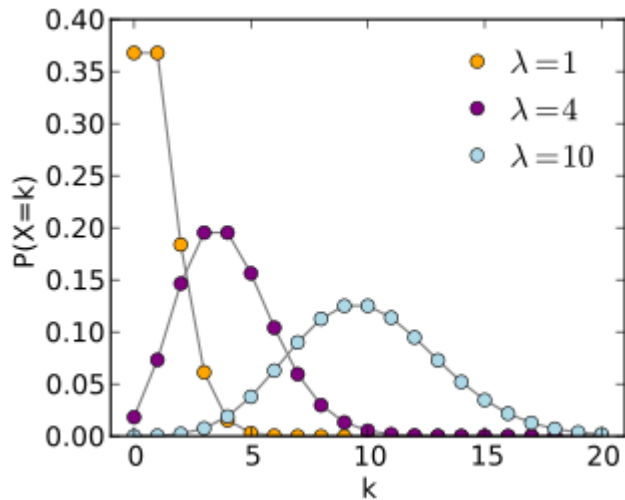
$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha f(x)$$

Desde el punto de vista estadístico.....

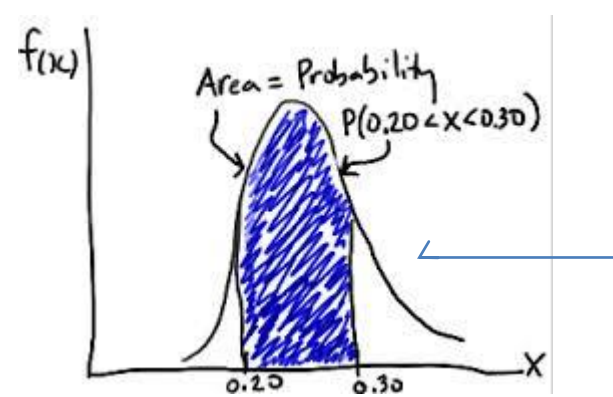


# Un momentito...



$$p_{k \in [k_1, k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k) dk$$

$p_k$



$$p_{k \geq k_2} = \sum_{k_2}^{\infty} p(k)$$

$$p_{k \geq k_2} = \int_{k_2}^{\infty} p(k) dk$$

prob de encontrar un nodo con  $k \geq k_2$

$$\langle f_k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} f_k p(k)$$

$$\langle f(k) \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} f(k) p(k) dk$$

valor medio de una funcion  $f(k)$

$$\langle k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k p(k)$$

$$\langle k \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k p(k) dk$$

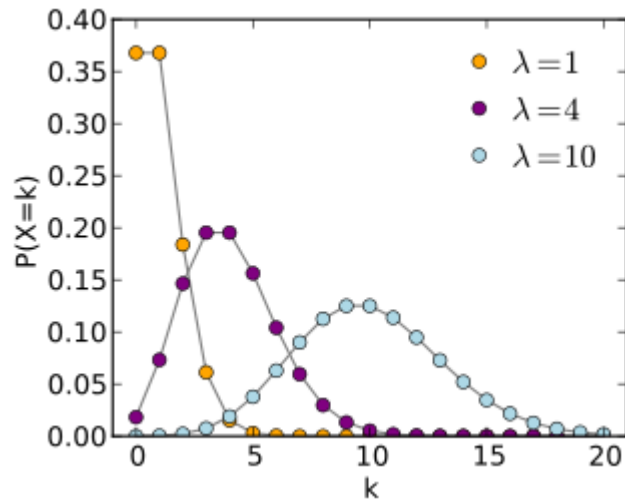
grado medio

$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m p(k)$$

$$\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m p(k) dk$$

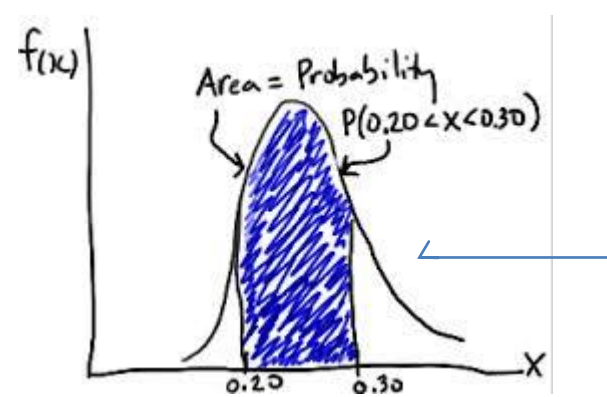
momento orden-m de distr. de grado

# Un momentito...



$p_k$

$$p_{k \in [k_1, k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k) dk$$



$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m p(k)$$

$$\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m p(k) dk$$

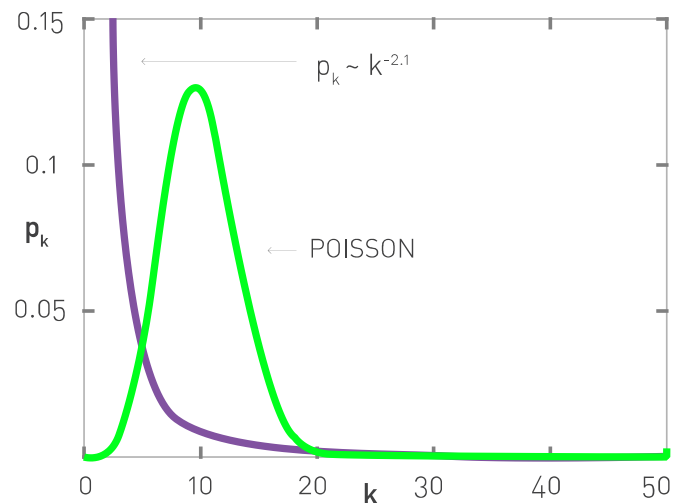
momento orden-m  
de distr. de grado

Este factor aumenta con  $k$ , este otro disminuye con  $k$

Para que la integral converja  $p(k) \rightarrow 0$  lo suficientemente rapido  
 $k \rightarrow \infty$

# Qué significa libre-de-escala?

(a)



$$\langle k^m \rangle = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^m p(k) \approx \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^m p(k) dk$$

- Conocer todos los momentos de la distribución equivale a conocer la distribución
- Los primeros momentos tienen interpretaciones conocidas

- $m=1$  corresponde al valor medio de la distribución
- $m=2$  permite calcular la varianza y desviación estándar  $\sigma$ :  $var = \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$
- $m=3$  permite calcular el *skewness*  $\langle (k - \langle k \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$
- ...

Para una distribución tipo ley de potencia:

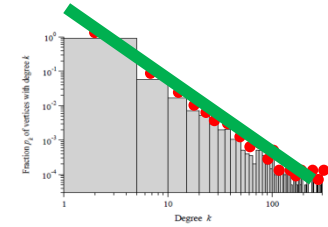
$$\langle k^m \rangle = C \frac{k_{max}^{m-\gamma+1} - k_{min}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

Para redes grandes ( $k_{max} \rightarrow \infty$ )

- si  $m-\gamma+1 \leq 0$   $\langle k^m \rangle$  resulta finito
- si  $m-\gamma+1 > 0$   $\langle k^m \rangle$  diverge.

**Los momentos de orden  $m > \gamma - 1$  divergen**

$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



# Distribuciones libre-de-escala

Para una distribución tipo ley-de-potencia los momentos de orden  $m > \gamma - 1$  divergen

Network	Size	$\langle k \rangle$	$\kappa$	$\gamma_{out}$	$\gamma_{in}$
WWW	325 729	4.51	900	2.45	2.1
WWW	$4 \times 10^7$	7		2.38	2.1
WWW	$2 \times 10^8$	7.5	4000	2.72	2.1
WWW, site	260 000				1.94
Internet, domain*	3015–4389	3.42–3.76	30–40	2.1–2.2	2.1–2.2
Internet, router*	3888	2.57	30	2.48	2.48
Internet, router*	150 000	2.66	60	2.4	2.4
Movie actors*	212 250	28.78	900	2.3	2.3
Co-authors, SPIRES*	56 627	173	1100	1.2	1.2
Co-authors, neuro.*	209 293	11.54	400	2.1	2.1
Co-authors, math.*	70 975	3.9	120	2.5	2.5
Sexual contacts*	2810			3.4	3.4
Metabolic, <i>E. coli</i>	778	7.4	110	2.2	2.2
Protein, <i>S. cerev.</i> *	1870	2.39		2.4	2.4
Ythan estuary*	134	8.7	35	1.05	1.05
Silwood Park*	154	4.75	27	1.13	1.13
Citation	783 339	8.57			3
Phone call	$53 \times 10^6$	3.16		2.1	2.1
Words, co-occurrence*	460 902	70.13		2.7	2.7
Words, synonyms*	22 311	13.48		2.8	2.8

- Muchas redes reales  $\gamma < 3$
- $\langle k^2 \rangle$  diverge en el limite  $N \rightarrow \infty$  !!

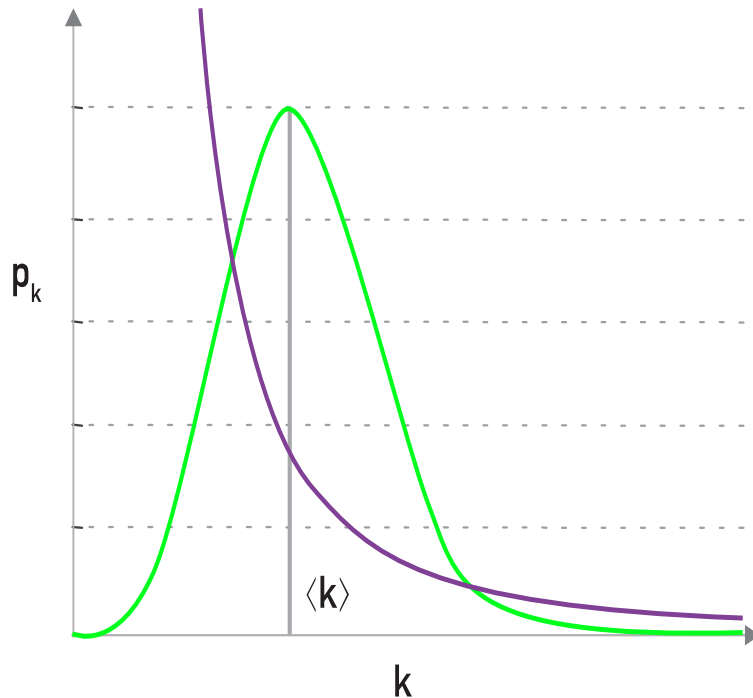
$$\langle k^m \rangle = C \frac{k_{max}^{m-\gamma+1} - k_{min}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

$$\langle k^2 \rangle = C \frac{k_{max}^{3-\gamma} - k_{min}^{3-\gamma}}{3 - \gamma}$$

La variabilidad (fluctuación cuadrática media) también diverge  $\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$



# Distribuciones libre-de-escala



Rango donde encontrar valores típicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

## Random Network

Randomly chosen node:  $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

Scale:  $\langle k \rangle$

## Scale-Free Network

Randomly chosen node:  $k = \langle k \rangle \pm \infty$

Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con  $\gamma < 3$  puede tener valores muy alejados de  $\langle k \rangle$ . No existe una escala característica para la conectividad.

# Distribuciones libre-de-escala en redes finitas

Rango donde encontrar valores típicos

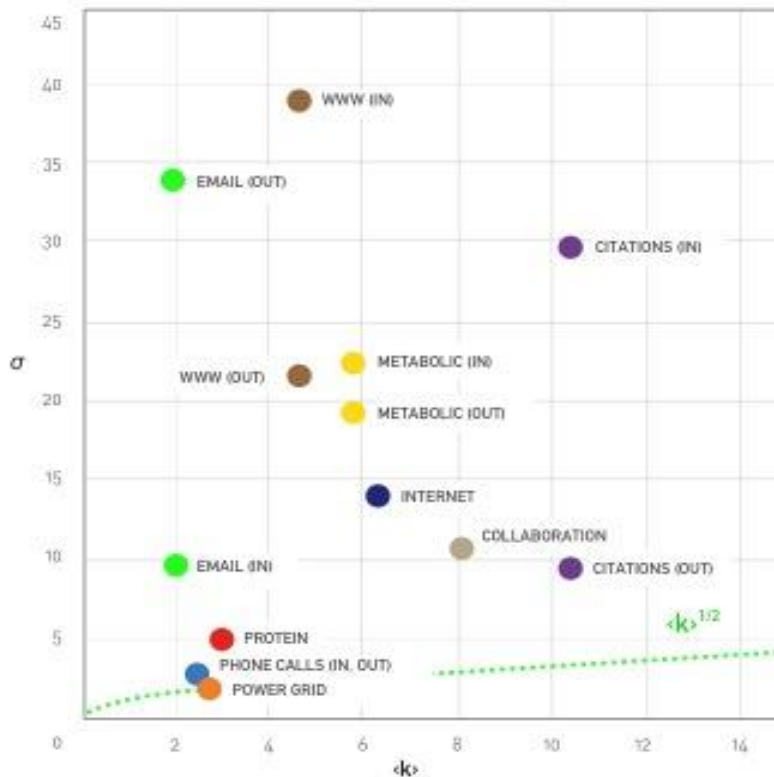
$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

## Random Network

Randomly chosen node:  $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$   
Scale:  $\langle k \rangle$

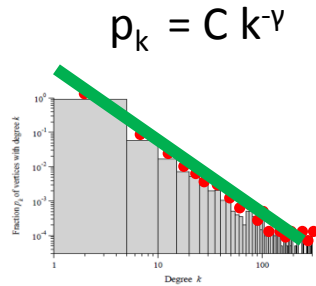
## Scale-Free Network

Randomly chosen node:  $k = \langle k \rangle \pm \infty$   
Scale: none



Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con  $\gamma < 3$  puede tener valores muy alejados de  $\langle k \rangle$ . No existe una escala característica para la conectividad.

# Leyes de potencia en régimen logN



Es difícil encontrar redes reales con distribución de grado ley de potencia con  $\gamma > 3$

- Se necesita observar nodos con grados que varíen en al menos 2 (o mejor 3) ordenes de magnitud:  $k_{min} \sim 1$ ,  $k_{max} \sim 10^2$
- Pero entonces

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

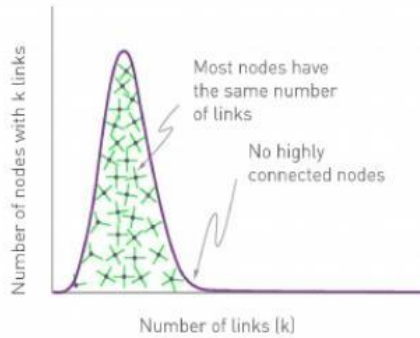
$$N = \left( \frac{k_{max}}{k_{min}} \right)^{\gamma-1} = 10^{2(\gamma-1)}$$

Para reconocer una red con distrib. de grado de exponente  $\gamma=5$  necesitaría que la misma tuviera al menos  $N \sim 10^8$  nodos (!)

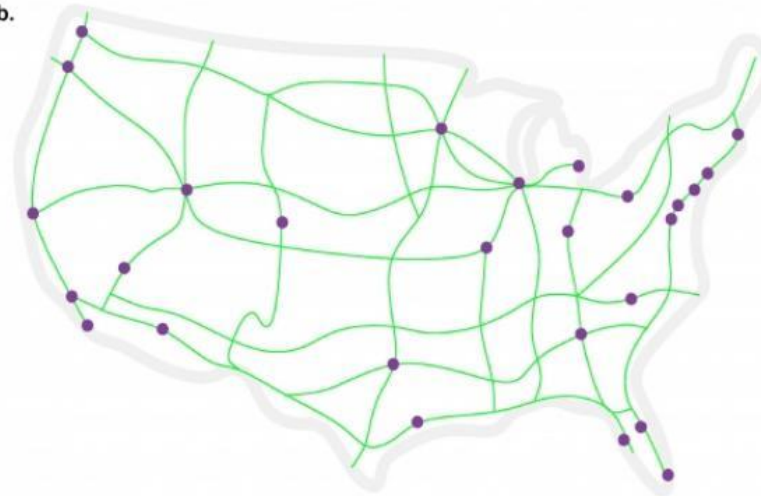


# Efecto de hubs sobre distancias

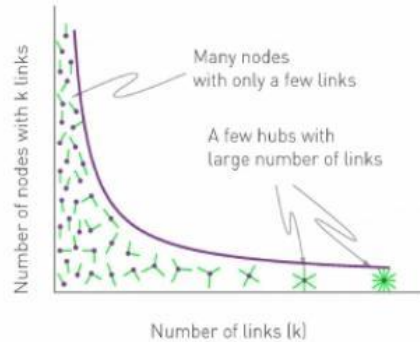
a. POISSON



b.



c. POWER LAW



d.

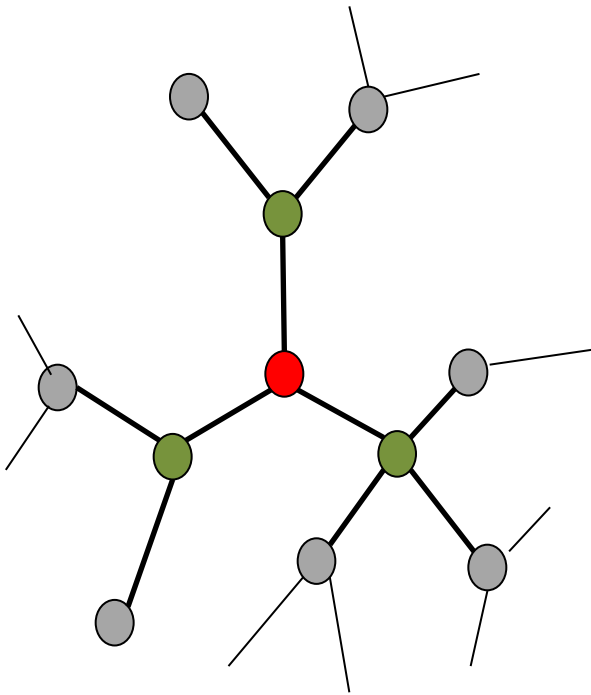


La presencia de hubs crea **atajos**

# Distancias y mundo-pequeño en redes aleatorias (idea)

En redes aleatorias (distribución Poisson) los nodos tienden a tener  $k \sim \langle k \rangle$ .

- Nro primeros vecinos  $\sim \langle k \rangle$
- Nro segundos vecinos  $\sim \langle k \rangle^2$
- Nro de vecinos a distancia  $s \sim \langle k \rangle^s$



El nro de nodos hasta una distancia  $s$  resulta

$$N(l) = 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \dots + \langle k \rangle^l = \frac{\langle k \rangle^{l+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

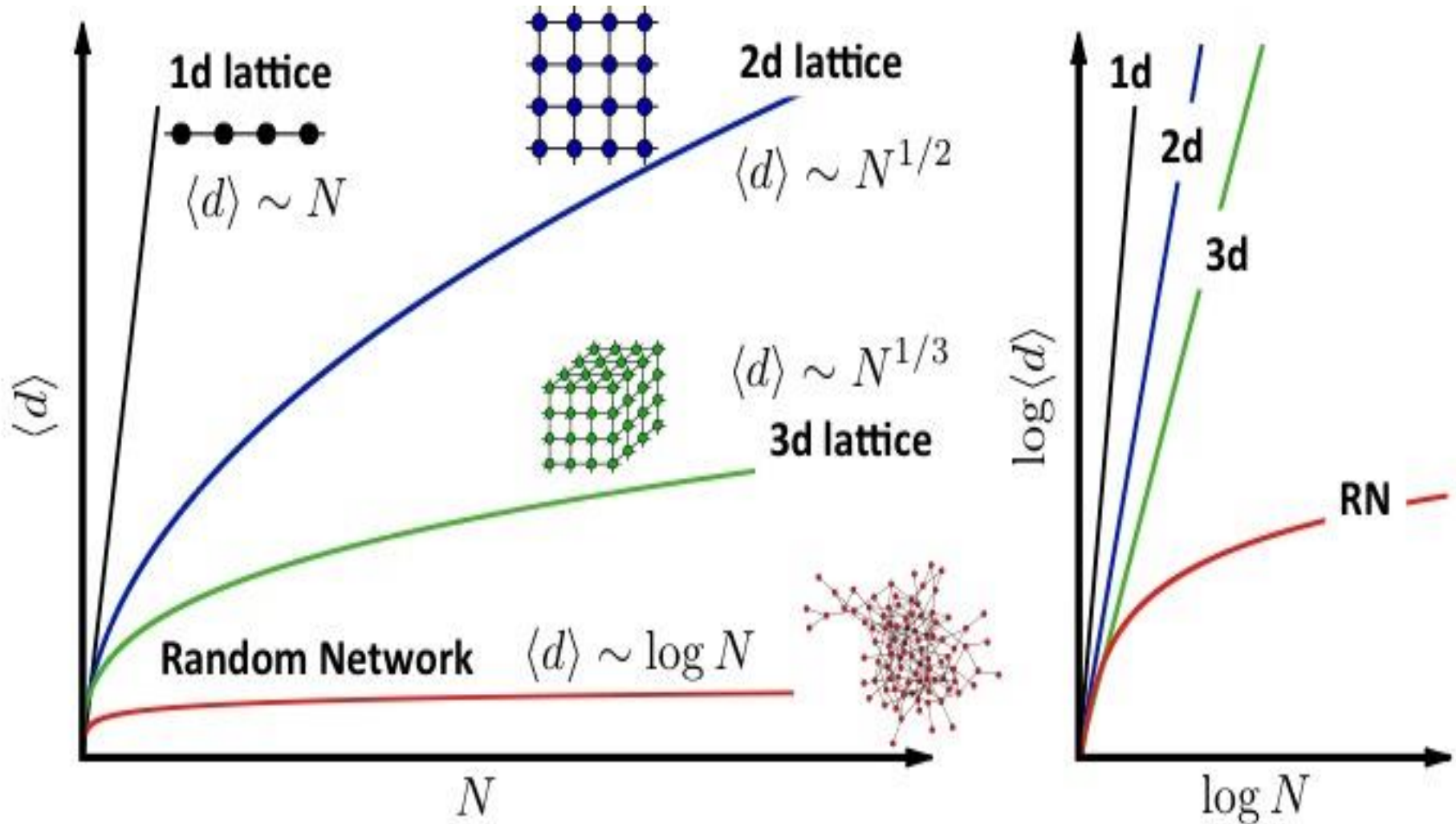
Como máximo  $N(l_{\max}) = N$

$$N \sim \langle k \rangle^{l_{\max}}$$

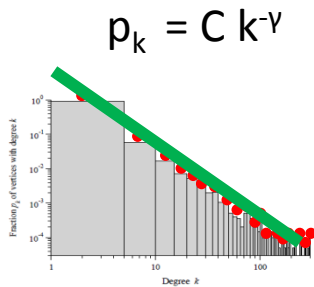
$$l_{\max} \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle} \quad \leftarrow \text{Efecto mundo pequeño}$$

# Topología de mundos-pequeños

$$l_{max} \sim \log N$$



# Distancias en redes libres de escala

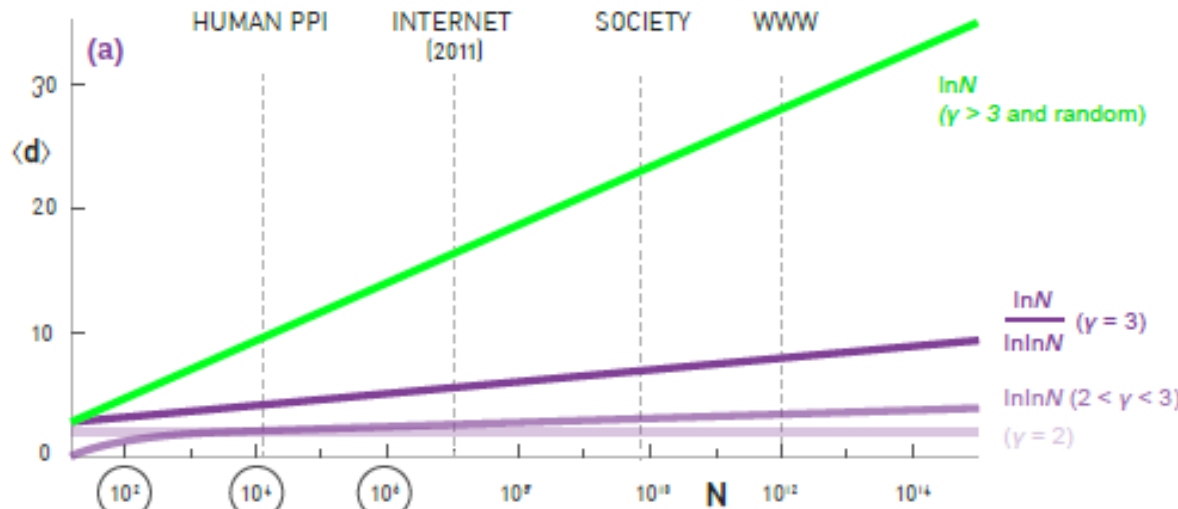


$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

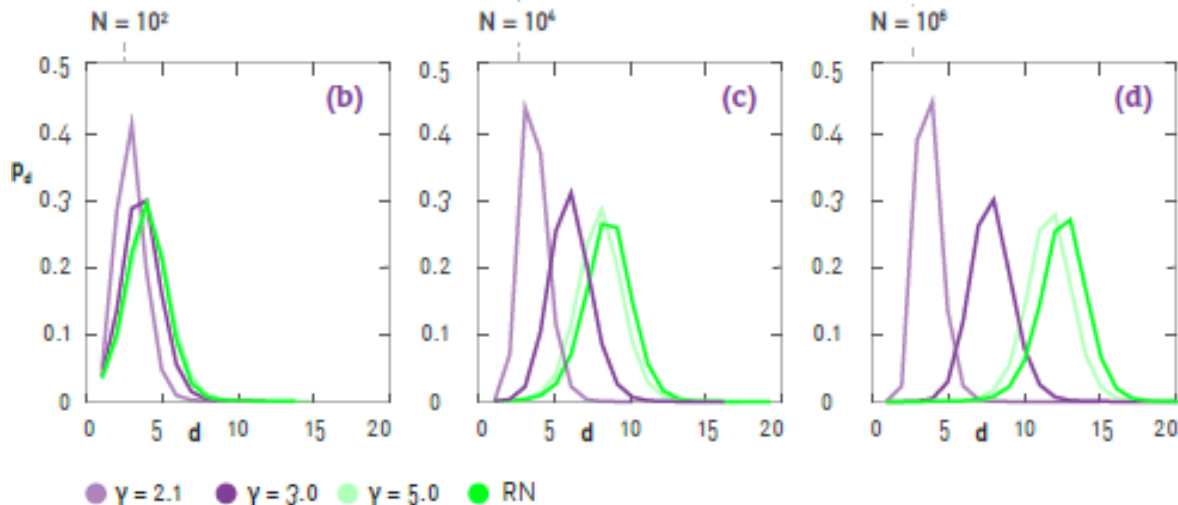
{	$\langle d \rangle \sim$	$\text{const.}$	$\gamma = 2$	Tamaño hub $o(N)$ . Estructura tipo <i>spoke</i> . Camino medio independiente del tamaño del sistema
	$\ln \ln N$	$2 < \gamma < 3$		Longitud media aumenta mas lento que log (!) <b>Ultra-small-world</b> debido a hubs.
	$\frac{\ln N}{\ln \ln N}$	$\gamma = 3$		Valor crítico de $\gamma$ para el cual $\langle k^2 \rangle$ deja de diverger.
	$\ln N$	$\gamma > 3$		$\langle k^2 \rangle$ es finito. No hay suficientes hubs, ni son tan gdes. Se comporta como <b>small-world</b> random network.



# Distancias en redes libres de escala

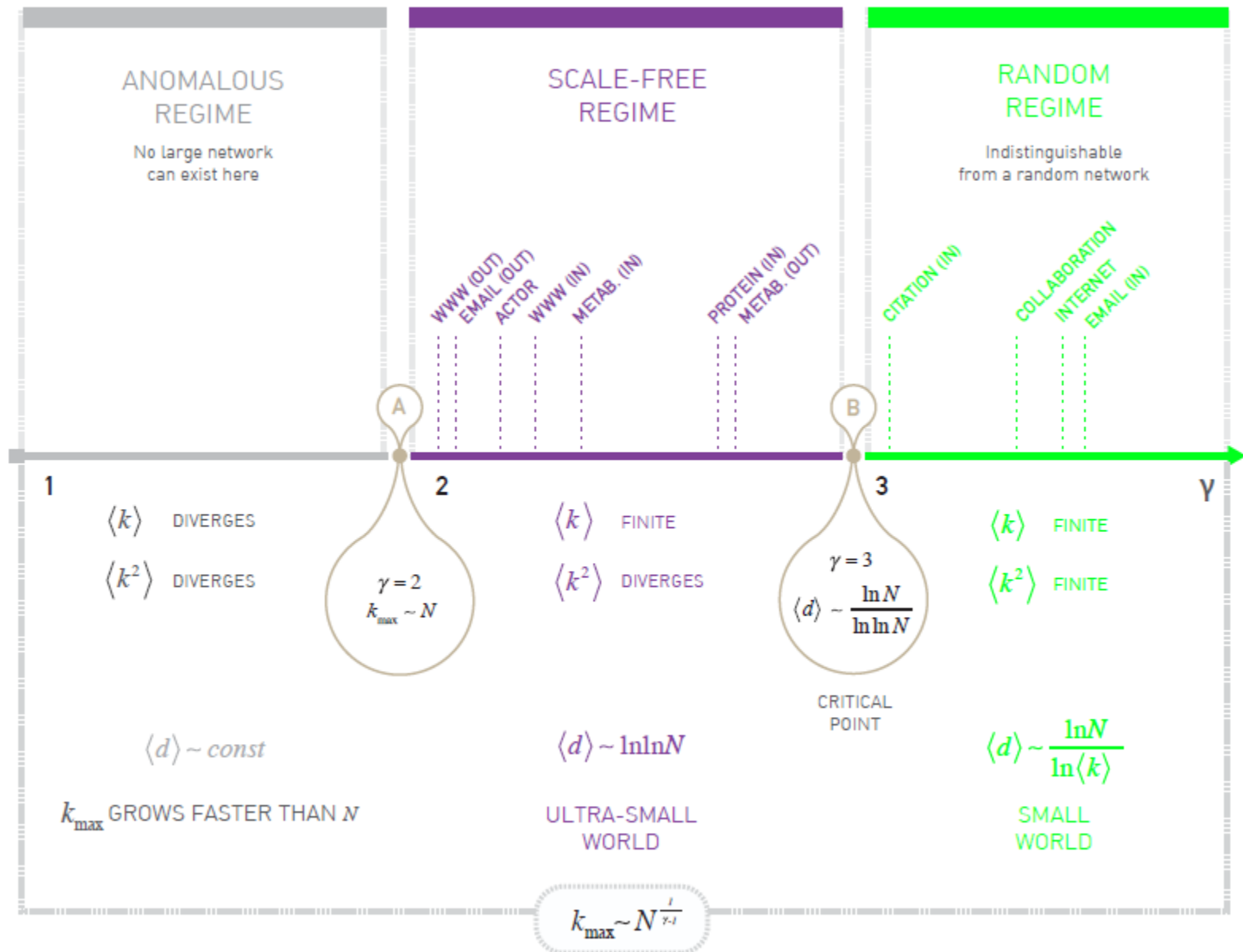


$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2, \\ \frac{\ln \ln N}{\ln(\gamma - 1)} & 2 < \gamma < 3, \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3, \\ \ln N & \gamma > 3. \end{cases}$$

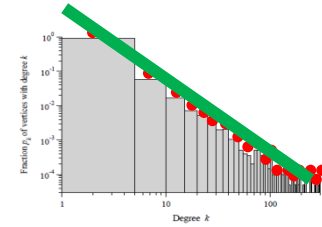


Las diferencias entre diferentes tipos de *escaleo* para las distancias se ponen de manifiesto en redes grandes.

# Exponente crítico



$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



# Habiamos visto...

De acuerdo a la distribución de grado las redes pueden clasificarse en

## Redes acotadas exponencialmente:

- distribución decae para altos valores de  $k$  exponencialmente o más rapido
- Ausencia de grandes fluctuaciones en el grado [  $\langle k^2 \rangle < \langle k \rangle$  ]

## Redes de cola pesada:

- redes cuya distribución decae como ley de potencia para altos valores de  $k$
- Pueden presentarse grandes fluctuaciones en el grado [  $\langle k^2 \rangle \gg \langle k \rangle$  ]
- Típicamente presentan outliers (hubs)

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

	$\langle k \rangle$	$\langle k^2 \rangle$
$2 < \gamma \leq 3$	finito	<b>infinito</b>
$\gamma > 3$	finito	finito

Cual es el efecto de tener **hubs** en una red?