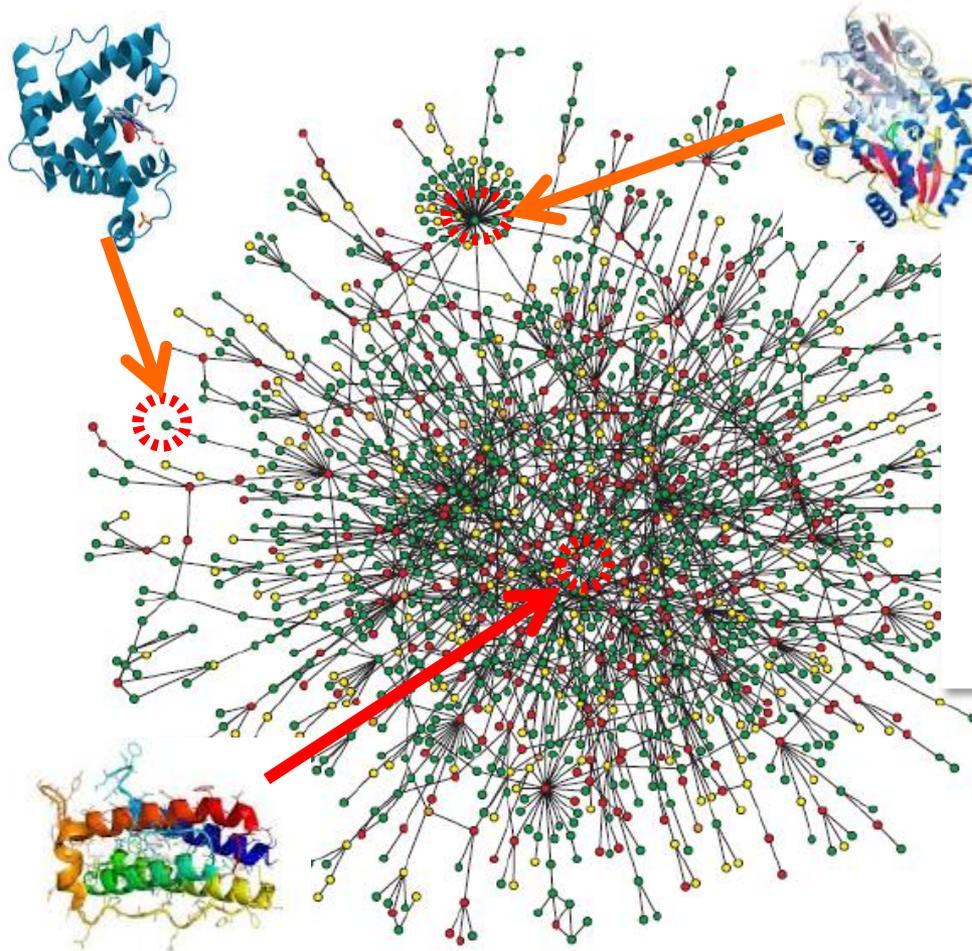


Centralidad

¿Qué tan *relevante* es un nodo de la red?

Topología y rol biológico



Redes Complejas

Degree
Eccentricity
Closeness
Betweenness
Bridging centrality
Eigenvalue centrality
Random walk centralities
....



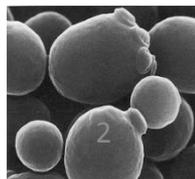
Biologia

Essentiality
Phenotypic variability
Biological function
Cancer related
Disease Related
...

Protein-protein interaction in yeast *S. cerevisiae*, (N=1870 and L=2240).

Jeong et al., Nature, 411, 41 (2001).

Redes Complejas - Chernomoretz



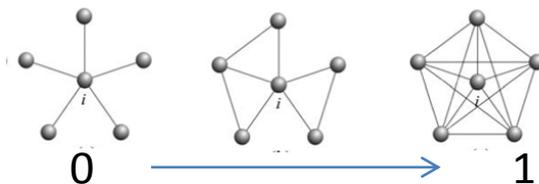
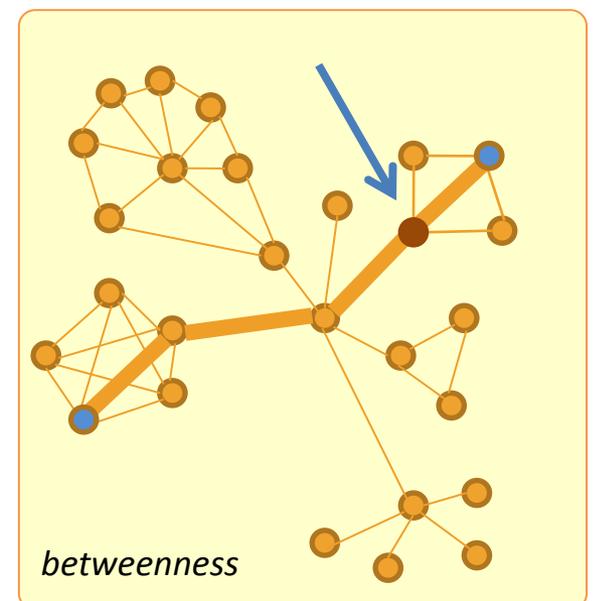
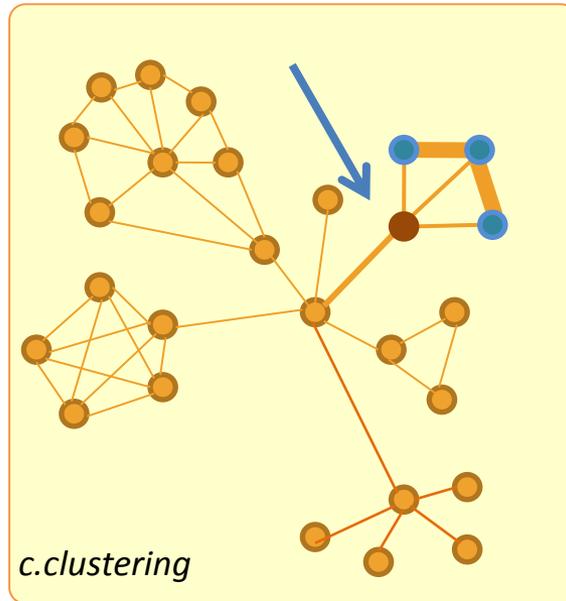
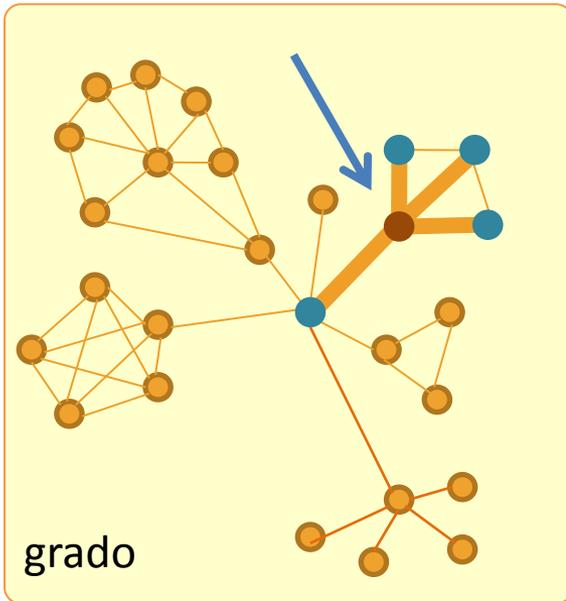
Propiedades topológicas: entorno local/global

Propiedades Locales

grado
coef. Clustering
centralidad 'random walk'
...

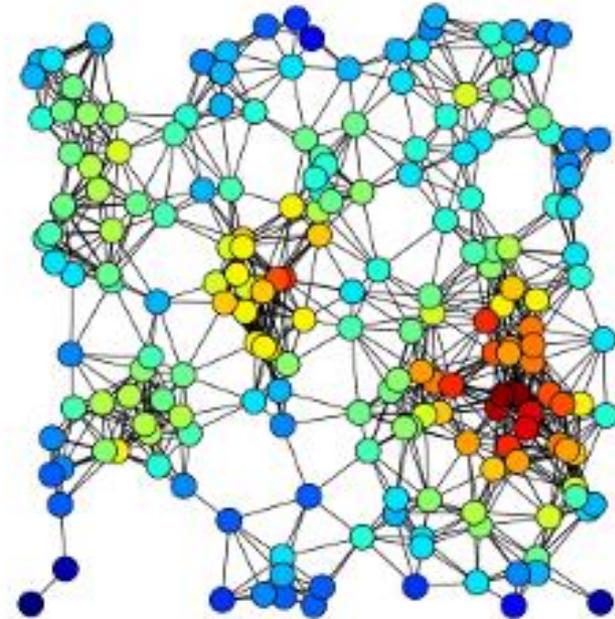
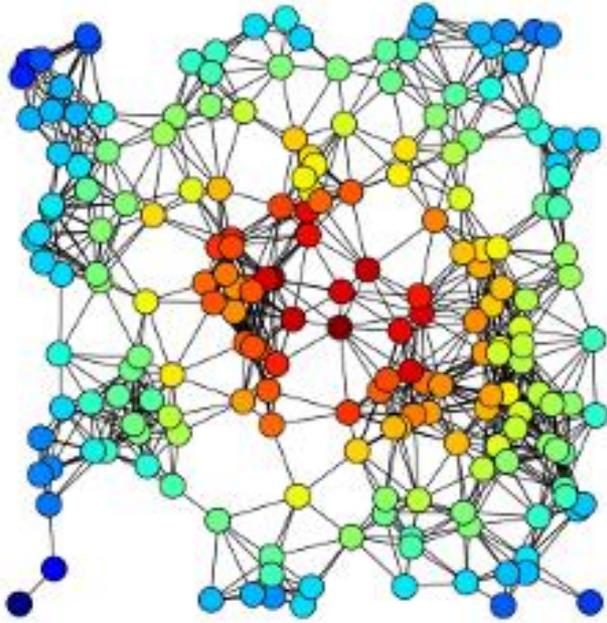
Propiedades Globales

betweenness
centralidad de autovalores adyacencia
cercania
...



$$be(v) = \sum_{s \neq t \neq v} \frac{\sigma_{s,t}^{shortest-path}(v)}{\sigma_{s,t}^{shortest-path}}$$

Que significa ser **importante**?



Noción de **flujo** sobre la red

Noción de **coesividad** sobre la red

Dime qué modelas con tu red y te diré qué es ser importante

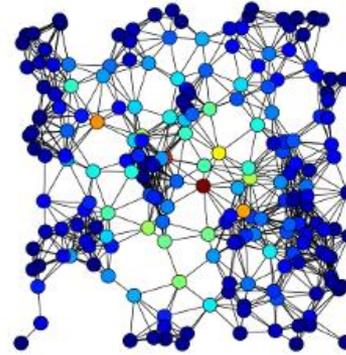
Centralidad

Dime qué modelas con tu red y te diré qué es ser importante

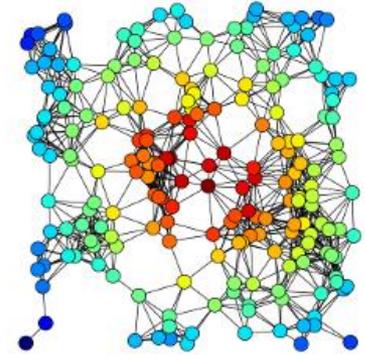
Noción de **flujo** sobre la red

Noción de **coesividad** sobre la red

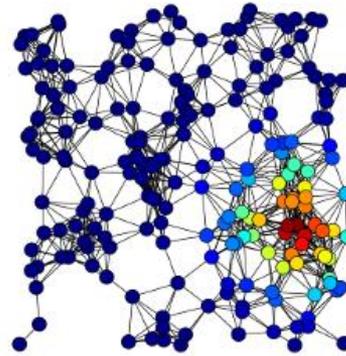
- a. intermedieatz
- b. cercanía
- c. autovalor
- d. grado
- e. centralidad armónica
- f. centralidad de Katz



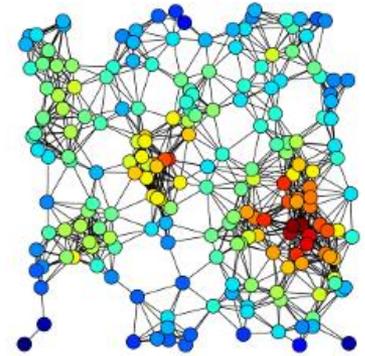
A



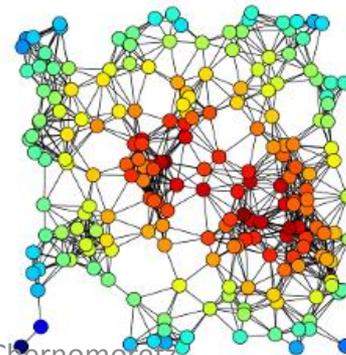
B



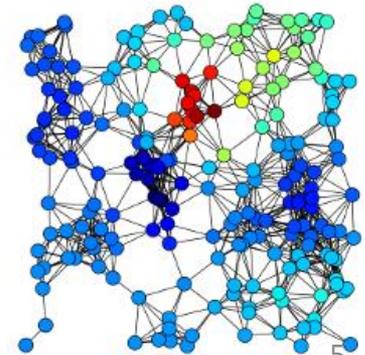
C



D



E



F

Centralidad y flujos

Dime qué modelas con tu red y te diré qué significa ser importante

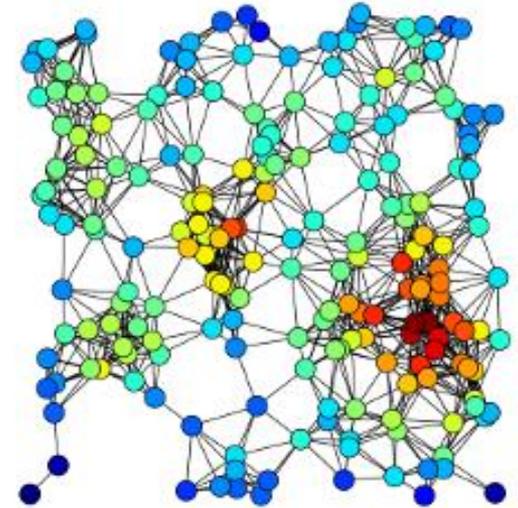
- Flujo de items indivisibles que están en un único lugar a un dado tiempo. Su difusión es por transferencia. Puede haber casos en que:
 - Billetes, libros: se mueven por el grafo **sin restricciones** acerca de repetir enlaces o nodos ya visitados (i.e. *walks*)
 - Ropa usada, *re-gifting*: se mueven por el grafo **sin repetir enlaces** (i.e. *trails*)
 - correo, gps: se mueven por el grafo desde un nodo origen hacia uno destino minimizando distancia recorrida (i.e. geodésicas).
- Flujo de entidades que pueden estar en varios lugares a la vez. Difusión por replicación.
 - Chismes: Transmisión boca-a-boca, en general no repite enlaces, pero si vértices (i.e. *trails*)
 - Campaña mailing: Transmisión por emisora (*broadcasting*), suele ser simultánea.
 - Ideas, creencias, modas, actitudes: influencia que se transmite boca-a-boca por replicación. Puede repetir enlaces (i.e. *walks*)
 - Procesos infecciosos, con inmunidad. Procede por replicación, pero sin visitar vértices (i.e. *paths*).

Centralidad de grado

- Utiliza directamente el **grado** de un nodo como medida de su importancia

$$Cent(n_i) = k_i$$

- En términos de flujo:
 - caracteriza efectos de influencia inmediata.
 - razonable por ejemplo para aplicar en procesos de duplicación paralela (prob de recibir algo que esta distribuido aleatoriamente por la red es proporcional al nro de contactos) o de caminatas al azar.
- En términos de cohesividad:
 - Hubs proveen atajos entre pares de nodos
- Asume linealidad: un nodo con el **doble** de vecinos que otro es **dos** veces mas importante
- Sólo utiliza información **local**

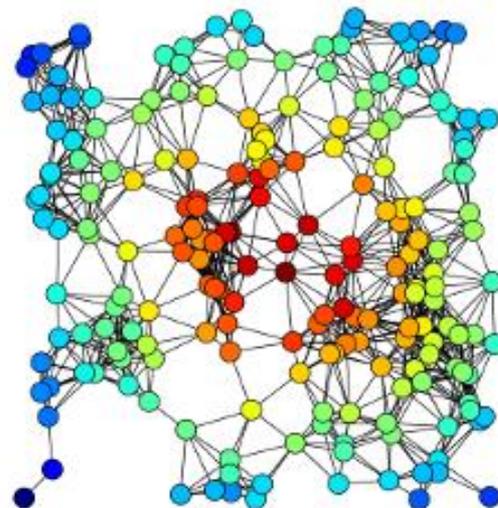


Centralidad de cercanía

- Asume que los nodos mas importantes son aquellos que pueden alcanzar fácilmente a más vecinos (están **cerca** de todos)

$$Closeness\ Centrality(n_i) = \left[\frac{\sum_{j \neq i} d_{geod}(n_i, n_j)}{N - 1} \right]^{-1}$$

(sin vecinos) $0 \leq Closeness\ Centrality \leq 1$ (vecino de todos)



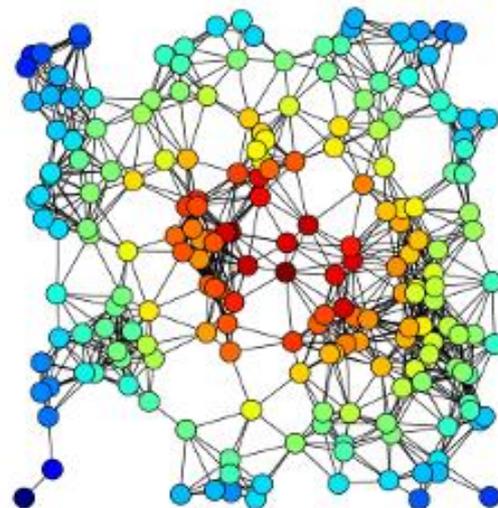
- nodos que en promedio reciben flujo transmitido por la red rápidamente:
 - red de flujo de información: ubicaciones ventajosas
 - red de contactos sexuales : ubicaciones riesgosas
 - en gral para flujos a lo largo de geodésicas o por duplicación en paralelo
 - no seria un buen indice para identificar, por ejemplo, quién recibirá info antes si el proceso de transmisión es tipo rumor (no va por caminos mas cortos)

Centralidad de cercanía

- Asume que los nodos mas importantes son aquellos que pueden alcanzar fácilmente a más vecinos (están **cerca** de todos)

$$Closeness\ Centrality(n_i) = \left[\frac{\sum_{j \neq i} d_{geod}(n_i, n_j)}{N - 1} \right]^{-1}$$

(sin vecinos) $0 \leq Closeness\ Centrality \leq 1$ (vecino de todos)



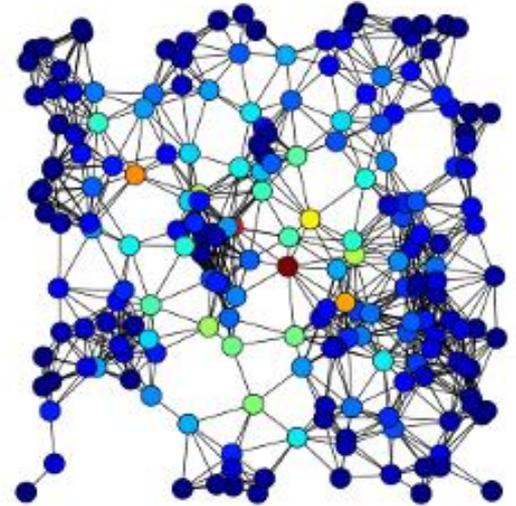
- En general tiene un rango dinamico chico (distancias geodésicas son chicas $1 < d_{geod} < o(\log N)$)
- No está bien definido para redes con más de una componente.
- Aún si calculáramos cada componente por separado no es trivial dar un ordenamiento global (centralidad en componentes más chicas tiende a ser mayor)

$$Harmonic\ Closeness\ Centrality(n_i) = \frac{1}{N - 1} \sum_{j \neq i} \frac{1}{d_{geod}(n_i, n_j)}$$

- Bien definido aún para redes con más de una componente.
- Se le da más peso a entorno local

Centralidad de **intermediatez** (*betweenness*)

Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intercambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.

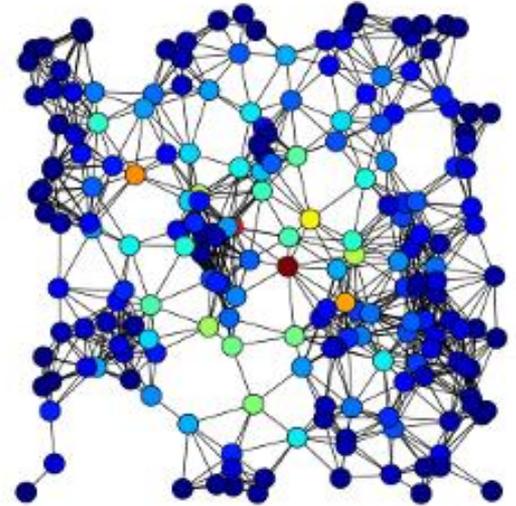


$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x_{rs}^i}{x_{rs}}$$

← nro de geodésicas entre r y s que pasan por i
← nro de geodésicas entre r y s

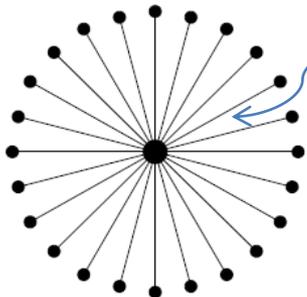
Centralidad de **intermediatez** (*betweenness*)

Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intercambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.



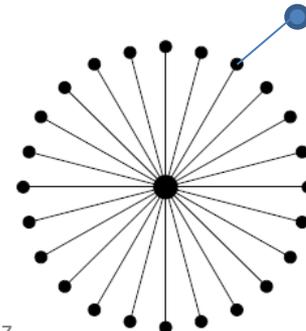
$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x_{rs}^i}{x_{rs}}$$

← nro de geodésicas entre r y s que pasan por i
 ← nro de geodésicas entre r y s



$$bet_{max} = n^2 - (n - 1)$$

Participa en la geodesica de todos los pares menos en la de los $n-1$ perifericos consigo mismos

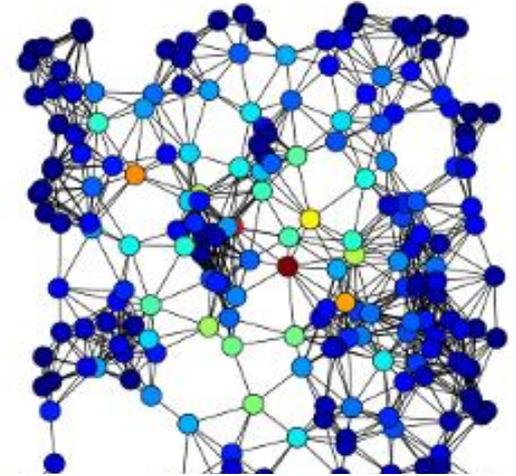


$$bet_{min} = 2n - 1$$

Participa en las geodesicas (ida y vuelta) del azul con el resto $2(n-1)$ mas la del azul consigo mismo.

Centralidad de **intermediatez** (*betweenness*)

Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intercambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.



$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x_{rs}^i}{x_{rs}}$$

← nro de geodésicas entre r y s que pasan por i
 ← nro de geodésicas entre r y s

$$bet_{min} = 2n - 1$$

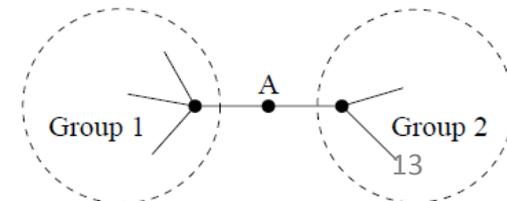
$$bet_{max} = n^2 - (n - 1)$$

$$\frac{bet_{max}}{bet_{min}} \sim \frac{1}{2}n$$

(amplio rango dinámico)

Es una medida global

Es una medida de intermediatez más que de conectividad



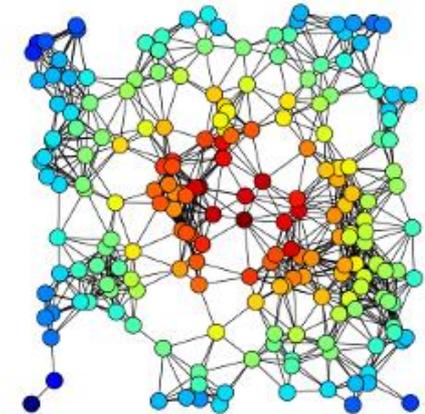
Centralidad de autovalor

Nodos importantes tienen **vecinos** importantes

- x_i (importancia de nodo- i) depende de x_j (importancia de nodo- j vecino). La importancia se *transmite* por la red.
- asumiendo linealidad

$$x_i \sim \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$$

$x \in \mathbb{R}^N$ es un autovector de \mathbf{A} $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$



$$\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$$

\mathbf{U} matriz de autovectores como columnas

$\mathbf{\Lambda}$ matriz autovalores en diagonal

Pero... la matriz \mathbf{A} tiene N autovalores/autovectores...
cual de todos ellos me da el campo de centralidad que busco?

$$\lambda_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{A} \mathbf{v}_\alpha$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

Ec autovalores de \mathbf{A}

Otra manera de reconocer *direcciones especiales*

$$\lambda_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = A \mathbf{v}_{\alpha}$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

Pensemos iterativamente...

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}' = AA\mathbf{x}$$

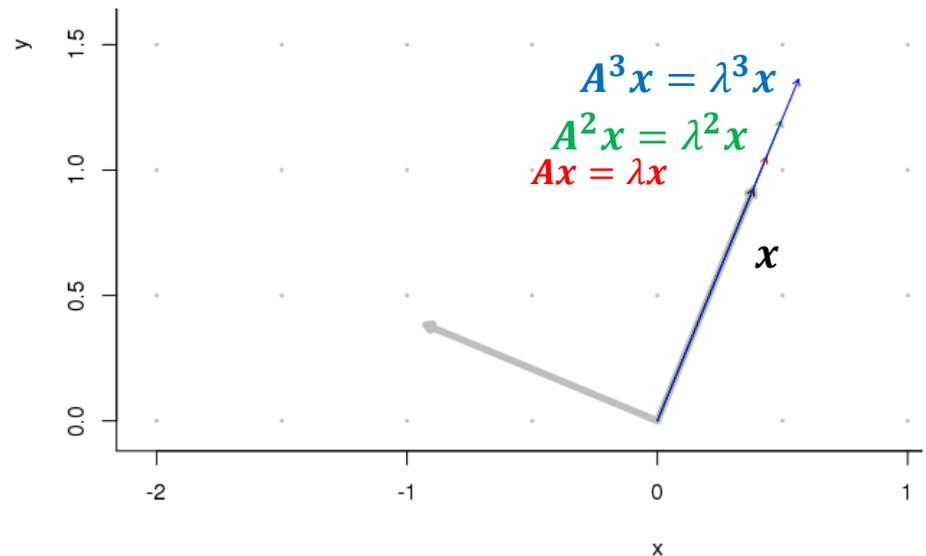
$$\mathbf{x}(s) = \overbrace{AA \dots A}^s \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(s) = A^s \mathbf{x}(0)$$

Si $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_{\alpha}$

$$\mathbf{x}(s) = \lambda_{\alpha}^s \mathbf{v}_{\alpha}$$

si \mathbf{x} inicial fuera justo un **autovector**, por ejemplo \mathbf{v}_i , de la matriz de adyacencia \mathbf{A}



Otra manera de encontrar *direcciones especiales*

$$\lambda_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{A} \mathbf{v}_\alpha$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}^s \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots = \sum_i c_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^s \mathbf{x}(0) = \sum_i c_i \mathbf{A}^s \mathbf{v}_i = \sum_i c_i \lambda_i^s \mathbf{v}_i$$

$$= \lambda_*^s \sum_i c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_*} \right)^s \mathbf{v}_i$$

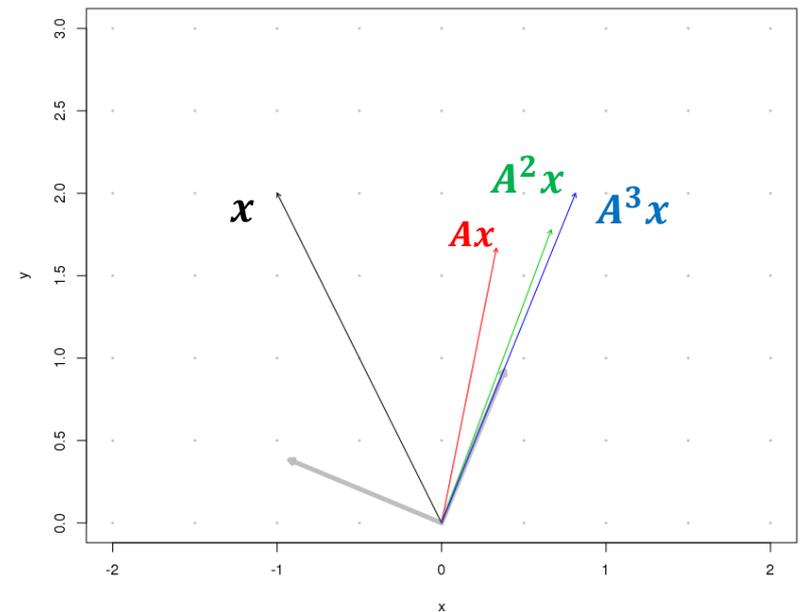
↑
Autovalor dominante

$$\mathbf{x}(s) = \lambda_*^s \sum_i c_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_*} \right)^s}^{<1} \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{x}(s) \sim \lambda_*^s c_i \mathbf{v}_*$$

$$s \rightarrow \infty$$

En el caso general $\mathbf{x}(0)$ no coincide con una dirección privilegiada asociada con \mathbf{A} ...



Todo campo inicial $\mathbf{x}(0)$ converge a \mathbf{v}_* asintóticamente...este es el que estamos buscando !

Centralidad de autovalor

$$A\mathbf{x}^* = \lambda_* \mathbf{x}^*$$

\mathbf{x} se conoce como **centralidad de Bonacich**

$$x_i^* = \frac{1}{\lambda_*} \sum_j A_{ij} x_j^*$$

La centralidad de un nodo depende de la de sus vecinos.

Es \mathbf{x}^* una buena centralidad? Quien me asegura que sus componentes sean todas positivas, por ejemplo?



WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

[Main page](#)
[Contents](#)
[Featured content](#)
[Current events](#)
[Random article](#)

Not logged in [Talk](#) [Contributions](#) [Create account](#) [Log](#)

Article

[Talk](#)

Read

[Edit](#)

[View history](#)

[C](#)

Perron–Frobenius theorem

From Wikipedia, the free encyclopedia

In **linear algebra**, the **Perron–Frobenius theorem**, proved by [Oskar Perron \(1907\)](#) and [Georg Frobenius \(1912\)](#), asserts that a [real square matrix](#) with positive entries has a unique largest real [eigenvalue](#) and that the corresponding [eigenvector](#) can be chosen to have strictly positive components, and also asserts a similar statement for certain classes of nonnegative matrices. This theorem has important applications to probability theory ([ergodicity](#) of [Markov chains](#)); to the theory of [dynamical](#)

Centralidad de autovalor

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \lambda_* \mathbf{x}^*$$

\mathbf{x} se conoce como **centralidad de Bonacich**

$$x_i^* = \frac{1}{\lambda_*} \sum_j A_{ij} x_j^*$$

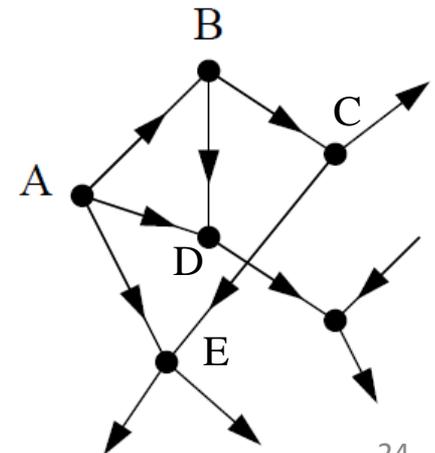
La centralidad de un nodo depende de la de sus vecinos.

Para redes dirigidas (**A** matriz no simétrica) se usa la misma definición de centralidad. Esto equivale a considerar el autovector-por-derecha de mayor autovalor.

Sin embargo puede haber problemas:

- x_A no tiene vecinos, entonces $x_A=0$
- pero también $x_B=0$, $x_C=0$, $x_D=0$, $x_E=0$

Sólo nodos de una **componente fuertemente conexa** de dos o más vértices (o la **out-component** de dicha componente) pueden tener centralidad de Bonacich no nula. **Potencial problema (!)**



Centralidad de Katz

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + \beta$$

Matricialmente

centralidad de base.

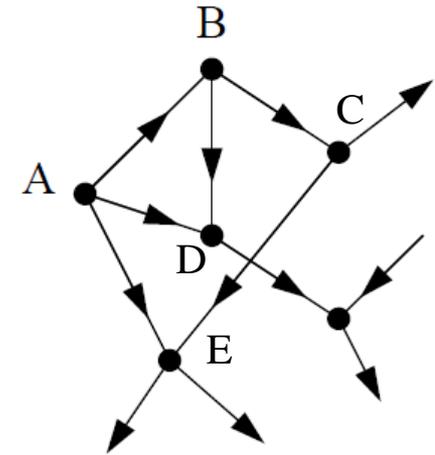
Gran diferencia para nodos con $k_{in}=0$

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{x} = \beta \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A}) \mathbf{x} = \beta \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \beta \mathbf{1}$$



Usualmente se toma $\beta=1$ y se debe especificar α , que controla la importancia relativa del primer término respecto del segundo

Centralidad de Katz

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + 1$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

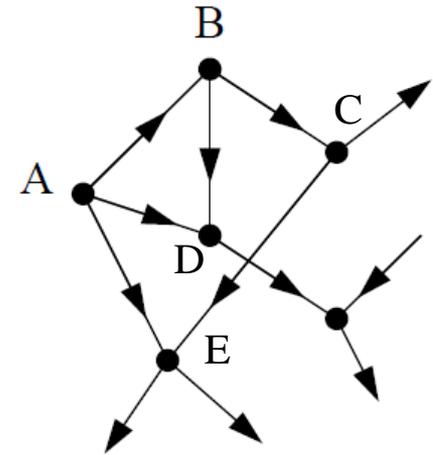
Se debe especificar α , como lo elijo?

- $\alpha = 0$ resulta en distribución uniforme de centralidad
- $\alpha > 0$ le doy más peso al primer término
- **PERO OJO:** para algún $\alpha > 0$ la matriz $\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A}$ puede no ser invertible. Esto sucede cuando $\det(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A}) = 0$, o lo que es lo mismo, cuando:

$$\det(\mathbf{A} - \alpha^{-1} \mathbf{I}) = 0 \xrightarrow{\alpha^{-1} = \lambda} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

La condición para identificar α problemáticos **asociada** a la ecuación de autovalores para \mathbf{A} (!) Para α creciente el *primer* problema lo encuentro cuando $\alpha^{-1} = \lambda_*$

Por lo tanto, se suele elegir α en el rango $0 < \alpha < 1/\lambda_*$



Centralidad de Katz

Estimación de centralidad

Algebraica:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})^{-1}\beta\mathbf{1}$$

Iterando:

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta$$

Costo
computacional

$o(n^3)$

$o(M.r)$

M: #enlaces, i.e. items no nulos de \mathbf{A}
r: #iteraciones

Centralidad de Katz generalizada

Asignamos una relevancia-a-priori, que puede ser diferente para cada nodo, utilizando **información externa a la red**

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$$

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i \quad \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

Centralidad PageRank

Katz generalizado:

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

Un posible problema: nodos con **alta centralidad** distribuyen ese valor (**alto**) a todos sus contactos k_{out} . Quizas no sea eso lo que uno quiere.

↓ 'diluye' la contribución del nodo-j

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

Centralidad PageRank sin bias

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{AD}^{-1}\mathbf{x}$$

$$[\mathbf{D}^{-1}]_{ii} = 1/k_i^{out}$$

- Estoy buscando el autovector de \mathbf{AD}^{-1} asociado a $\lambda=1$
- Para redes no-dirigidas es fácil ver que $x_j=k_j$ es la solución autoconsistente buscada.
- O sea PageRank sin bias equivale a centralidad de grado.

$$k_i = \sum_j \frac{1}{k_j} A_{ij} k_j = \sum_j A_{ij} \quad \checkmark$$

Nota:

- para redes no dirigidas se puede demostrar (practica) que el autovalor dominante de \mathbf{AD}^{-1} es 1, con autovector (k_1, k_2, \dots, k_n)
- para redes dirigidas no. pero resulta $o(1)$

Centralidad PageRank

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta} \quad [\mathbf{D}^{-1}]_{ii} = 1/k_i^{out}$$

$$(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}) \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

deja de ser
invertible cuando

$$\det(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}) = 0$$

$$\det\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}\right) = 0$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}) = 0$$

$$\lambda = 1/\alpha$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$= (\mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$= [(\mathbf{D} - \alpha \mathbf{A}) \mathbf{D}^{-1}]^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D} (\mathbf{D} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

razonando como antes $\alpha < 1/\lambda_{dominante}$ de $\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}$.

Pero vimos que $\lambda_{dominante} = 1$

$0 < \alpha < 1$...se suele usar $\alpha = 0.85$

Centralidades de recurrencia (resumen)

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}(\mathbf{D} - \alpha\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

PageRank centrality

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}$$

Degree centrality

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

Katz centrality

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\mathbf{x} = \lambda_*^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

**Eigenvector (Bonacich)
centrality**

Conectores (*hubs*) y Autoridades

- Hasta ahora, en **redes dirigidas**, los algoritmos que vimos asignaban más nivel de **centralidad** a aquellos nodos que **recibían** muchas conexiones
- Puede ser de interés, sin embargo, identificar nodos que actúen como buenos *reviews*. Implica idea de centralidad asociada con k_{out} hacia nodos relevantes (e.g. página con links hacia otras páginas relevantes)

Idea [Kleinberg, Authoritative Sources in a Hyperlinked Environment, 1999 10122 citas]:

Generalizar la centralidad de Bonacich y permitir que cada nodo tenga dos atributos

1. **Autoridad**: que tanto conocimiento, información, etc, tiene un nodo respecto a un tema
2. **Conectividad (*hubiness*)**: que tanto un nodo es capaz de encontrar información sobre un tema

En este esquema:

- Los nodos son caracterizados simultáneamente como **conectores y autoridades**
- Los mejores conectores apuntan a las mejores autoridades
- Algoritmo HITS (*Hyperlink-induced topic search*)

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j$$

$$y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \beta \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

pero entonces

$$\mathbf{x} = (\alpha\beta) \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = (\alpha\beta) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$$

con $\lambda = \alpha\beta$

fijarse además que:

- $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ es la matriz de co-citas, por lo que la **centralidad de autoridad** puede verse como **centralidad de autovector de la red de co-citas**
- $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es la matriz bibliográfica, por lo que la **centralidad de conectividad** puede verse como **centralidad de autovector de la red bibliográfica**

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j$$

$$y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \beta \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

pero entonces

$$\mathbf{x} = (\alpha\beta) \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad \mathbf{y} = (\alpha\beta) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad \text{con } \lambda = \alpha\beta$$

fijarse además que:

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \lambda (\mathbf{A}^T \mathbf{x})$$

por lo que $\mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{x})$ o sea, basta con resolver la ecuación de autovalores de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j$$

$$y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \beta \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

pero entonces

$$\mathbf{x} = (\alpha\beta) \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad \mathbf{y} = (\alpha\beta) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad \text{con } \lambda = \alpha\beta$$

- $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ es una matriz simétrica, semi-definida positiva, por lo que sus autovalores son mayores que cero.
- De hecho, sus autovalores son los valores-singulares de \mathbf{A} elevados al cuadrado
- Perron-Frobenius: el autovector del autovalor dominante tiene componentes no-negativas