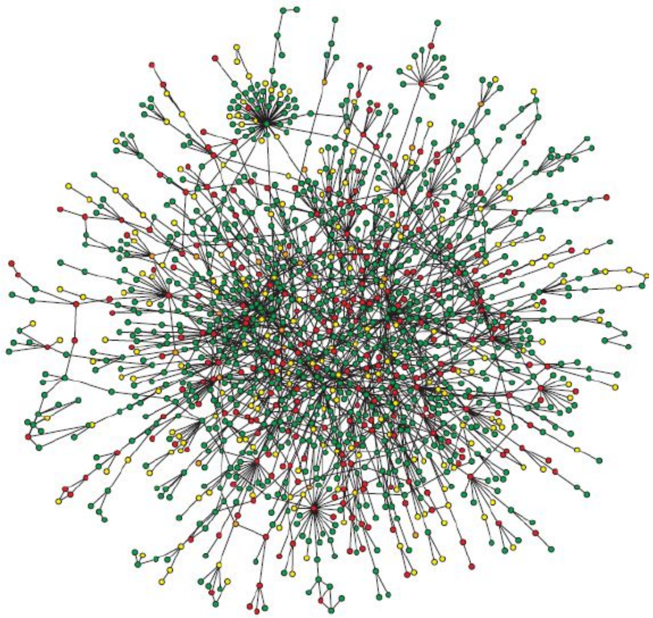
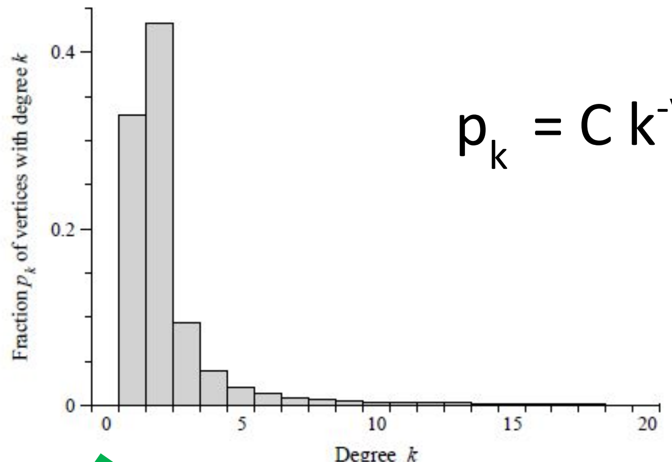
Propiedades de gran escala

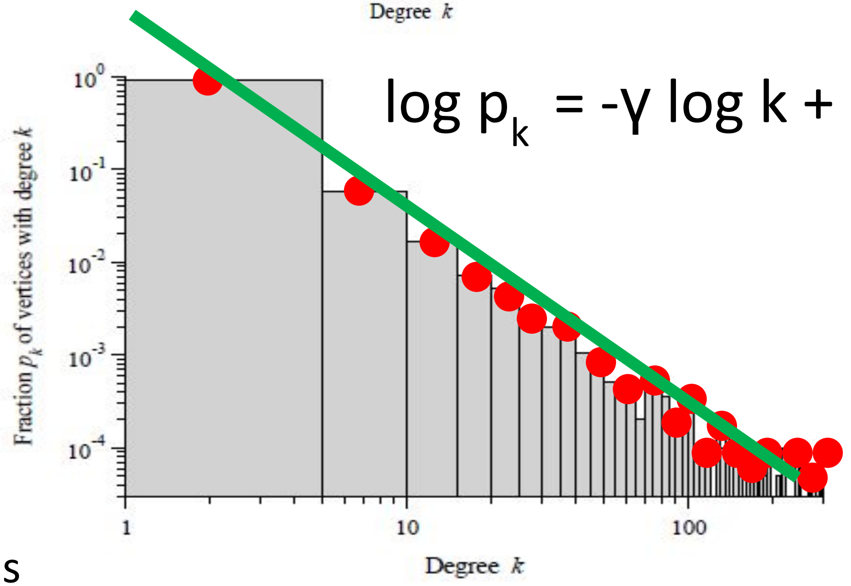
v1.1

Distribucion de grado





$p_k = C\,k^{-\gamma}$



$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$e^{\log pk} = e^{-\gamma \log k + c}$

$p_k = C\,k^{-\gamma}$ Ley de potencias

Libre de escala

$p_k = C\, k^{-\gamma}$

$$f(x) \sim x^{\alpha}$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} x^{\alpha}$$

Libre de escala

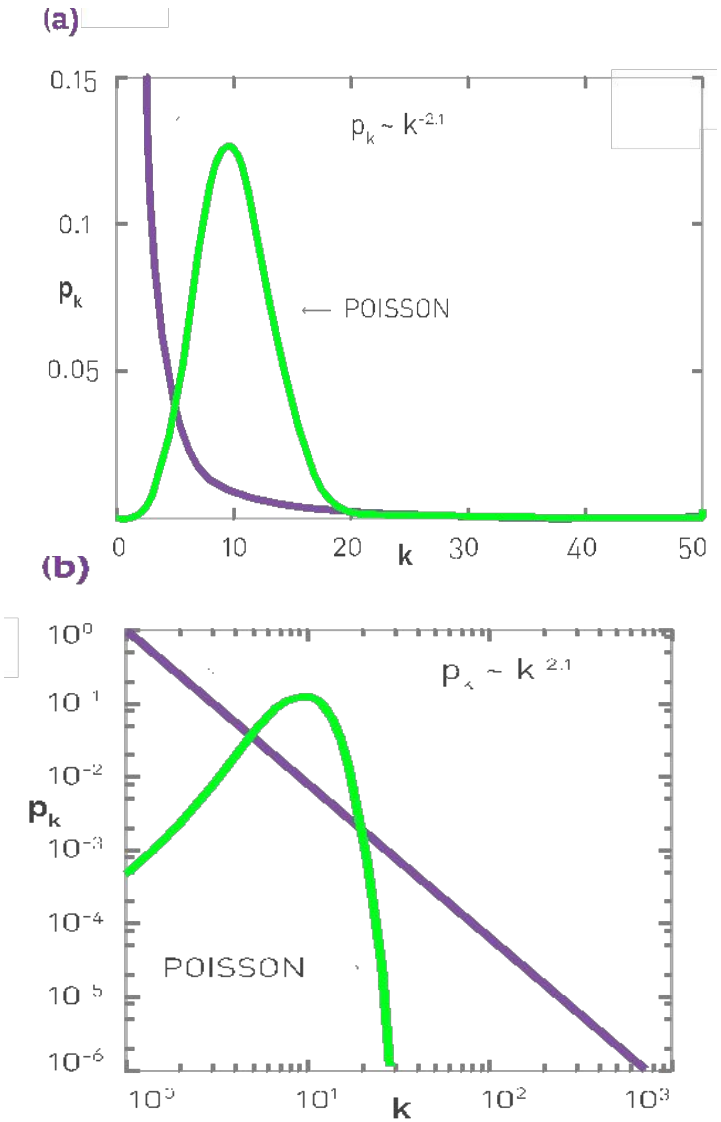
$p_k = C\, k^{-\gamma}$

$$f(x) \sim x^{\alpha}$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} x^{\alpha}$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} f(x)$$

f(x) describe el comportamiento del sistema y es adecuado para describir lo que se observa a cualquier escala (i.e. para cualquier valor de λ) a menos de una constante



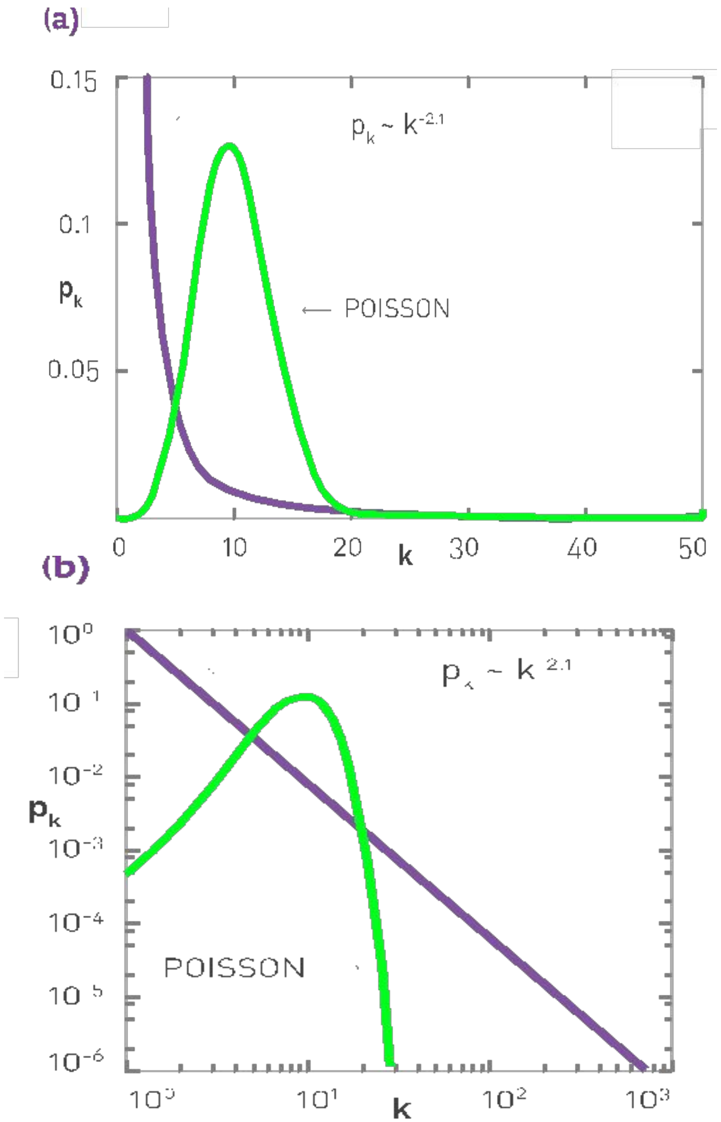
Libre de escala

$p_k = C\,k^{-\gamma}$

$$f(x) \sim x^{\alpha}$$

$$f\,(\overbrace{\lambda x}^{x'}) \sim \lambda^{\alpha} x^{\alpha}$$

$$f(x') \sim \lambda^{\alpha} f(x)$$



3A.
s, a predom-
rons (see ar-
ıation of the
rapid drop
ıat has been
LO barriers,
t is obtained
y by d-char-
igin of this
tively small
ned. This is
dependence
ıg effects on
: calculation
ıe Co-ALO
: also shown
rop can be
waves.
and in sev-
ıonstrate the
ıcture of the
ng the spin
ns. The neg-
nterface has
cts between
is similar to

Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási* and Réka Albert

Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.

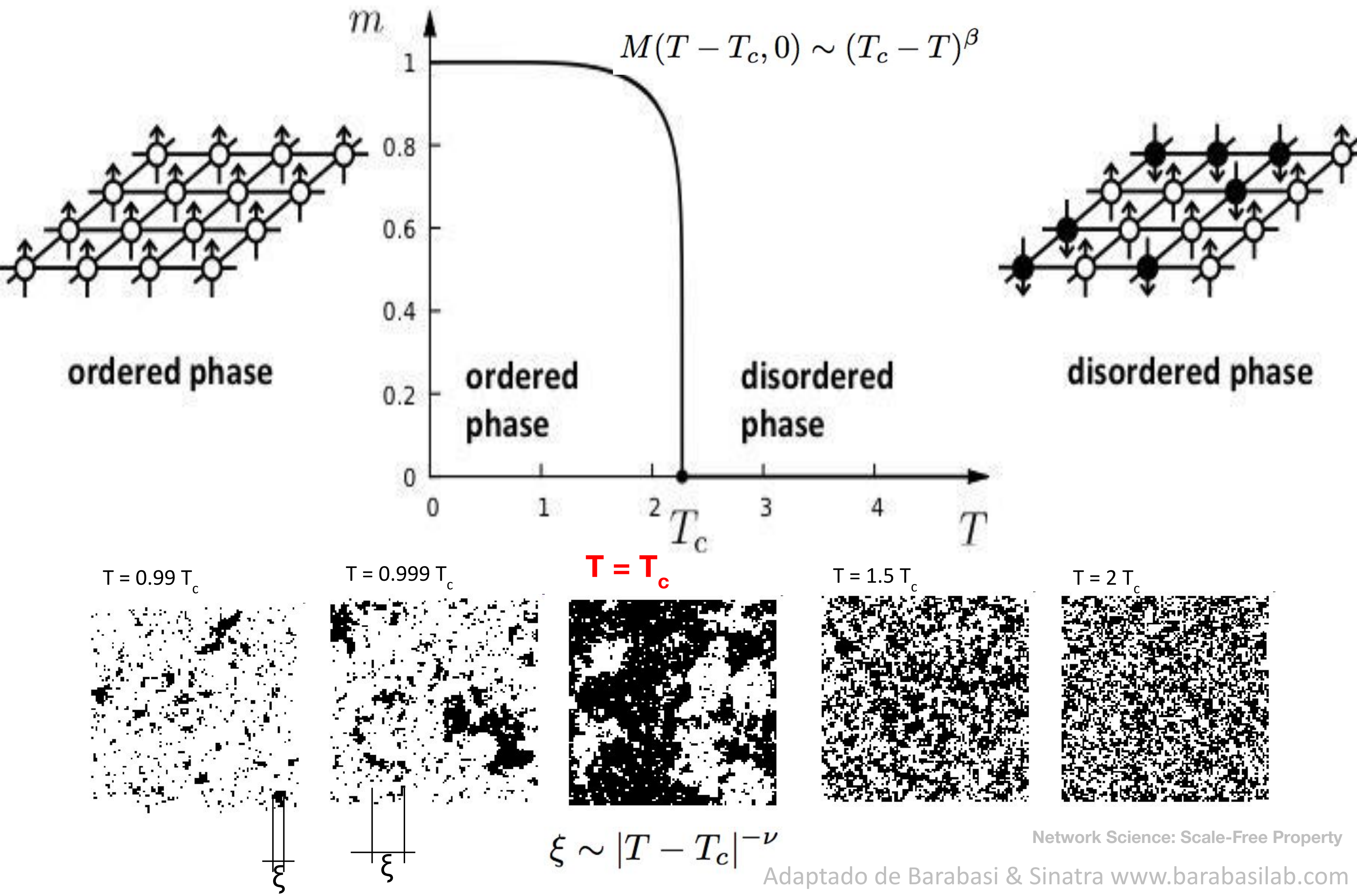
The inability of contemporary science to describe systems composed of nonidentical elements that have diverse and nonlocal interactions currently limits advances in many disciplines, ranging from molecular biology to computer science (*1*). The difficulty of describing these systems lies partly in their topology: Many of them form rather complex networks whose vertices are the elements of the system and whose edges represent the interactions between them. For example, liv-

Department of Physics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: alb@nd.edu

~46000 citas

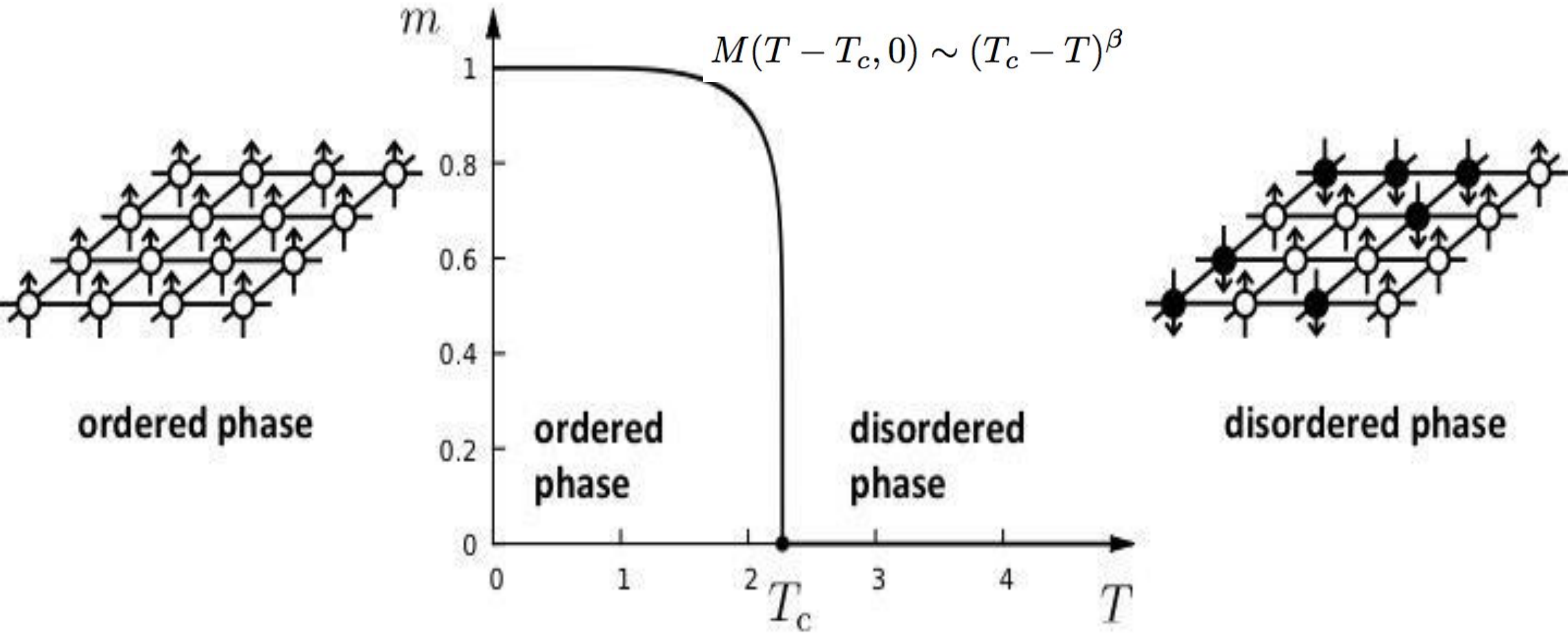
Fenómenos críticos: materiales magnéticos



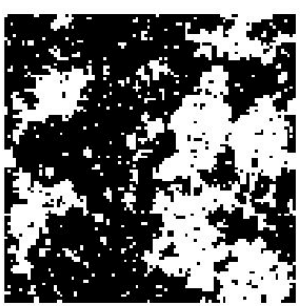
Network Science: Scale-Free Property

Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

Fenómenos críticos: materiales magnéticos



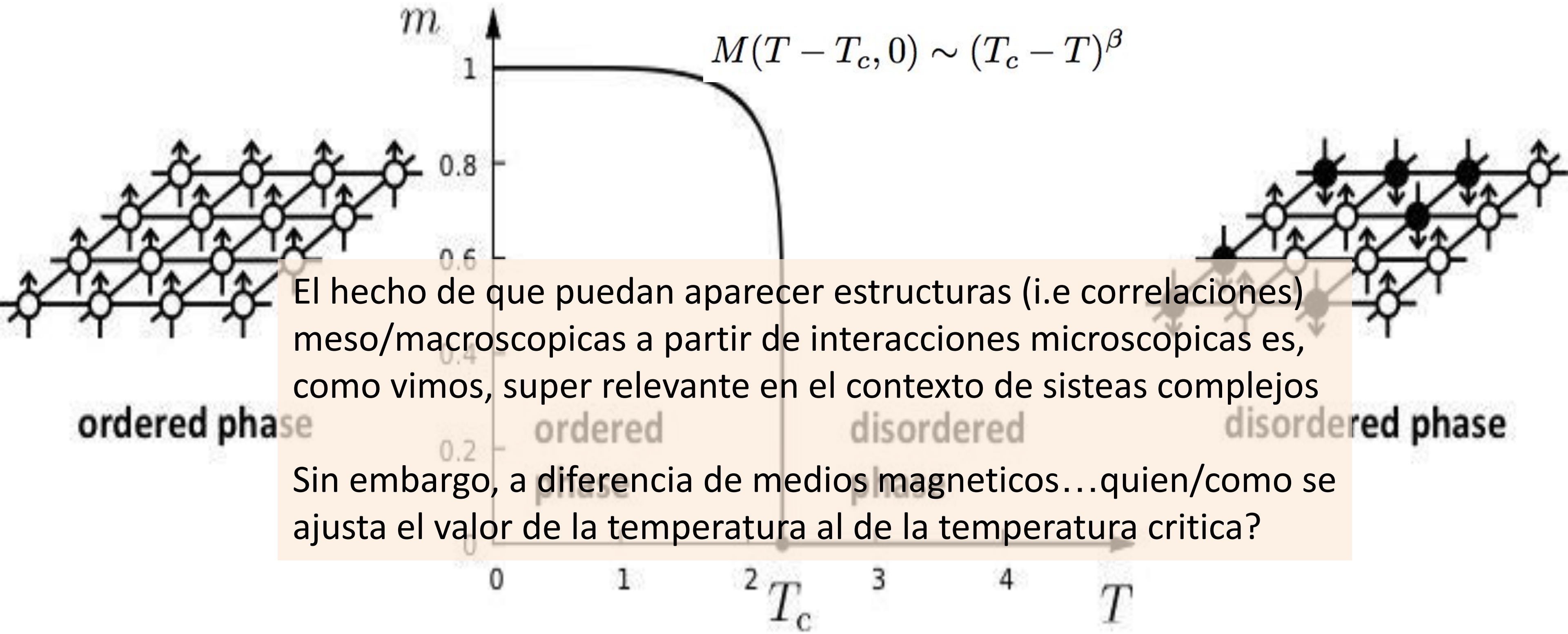
T = T$_c$



$\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$

- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala**: distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad**: exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones

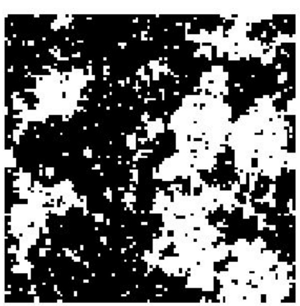
Fenómenos críticos: materiales magnéticos



El hecho de que puedan aparecer estructuras (i.e correlaciones) meso/macroscopicas a partir de interacciones microscopicas es, como vimos, super relevante en el contexto de sisteas complejos

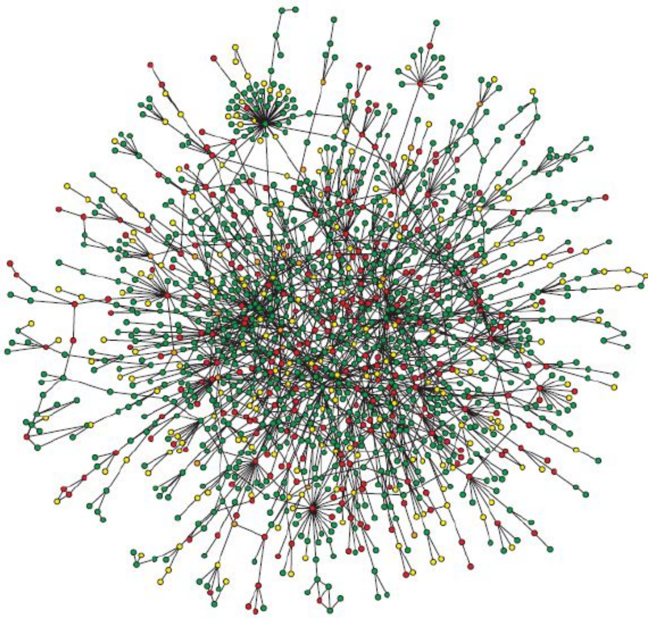
Sin embargo, a diferencia de medios magneticos…quien/como se ajusta el valor de la temperatura al de la temperatura critica?

$T = T_c$



$\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$

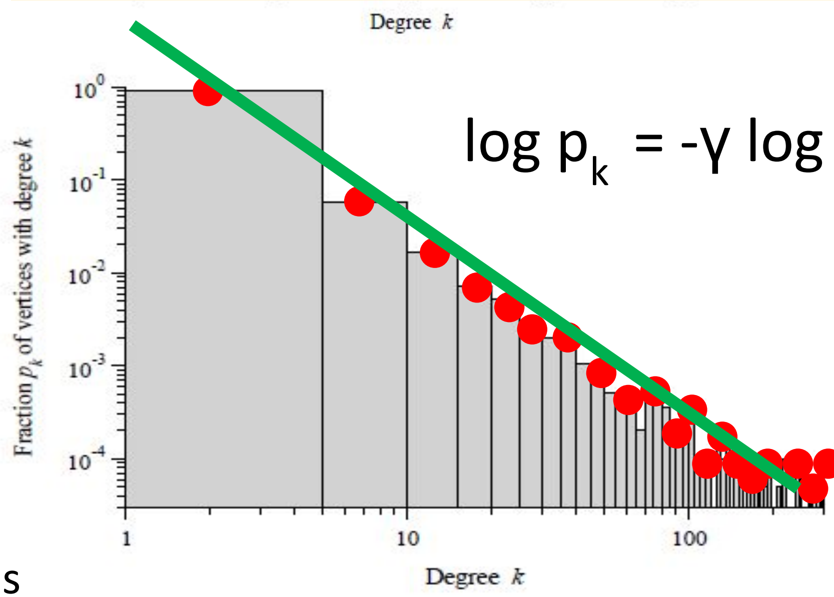
- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala**: distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad**: exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones



Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási* and Réka Albert

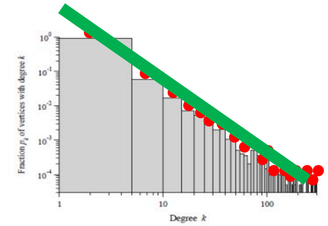
Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.



$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$p_k = C\, k^{-\gamma}$ Ley de potencias

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



Formalismo

Discreto

Probabilidad de que un nodo tenga grado *k*

$$p_k = Ck^{-\gamma}.$$

Condicion de normalización:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1\,.$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} = 1 \qquad C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}} = \frac{1}{\zeta(\gamma)},$$

Función zeta de Riemann (γ>1)

$$\boxed{p_k = \frac{k^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)}}$$

Continuo

Para avanzar analìticamente asumimos que el grado de un nodo puede ser un número real

$$p(k) = Ck^{-\gamma}.$$

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} p(k)dk = 1$$

$$C = \frac{1}{\int_{k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma} dk} = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}$$

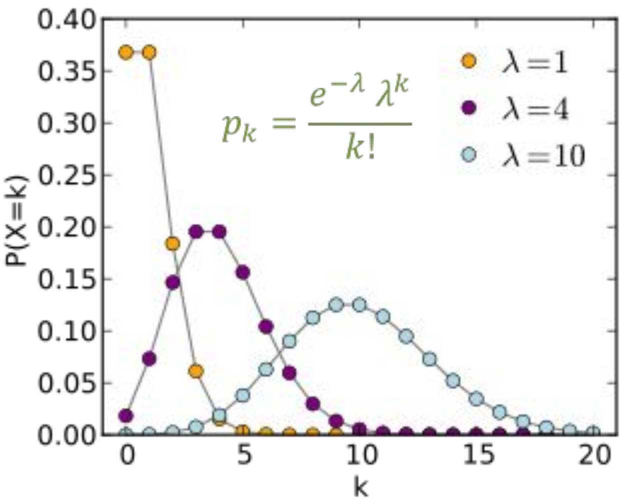
Grado a partir del cual se observa ley de potencia

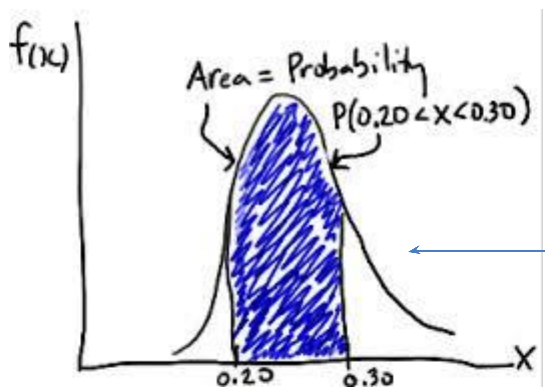
$$\boxed{p(k) = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}k^{-\gamma}.}$$

Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

Formalismo (repaso)

$$p_{k\in[k_1,k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k)dk$$





$$p_{k\geq k_2} = \sum_{k_2}^{\infty} p(k) \qquad p_{k\geq k_2} = \int_{k_2}^{\infty} p(k)dk$$

prob de encontrar un nodo con $k \geq k_2$

$$\langle f_k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} f_k\, p(k) \qquad \langle f(k) \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} f(k)\, p(k)dk$$

valor medio de una funcion *f(k)*

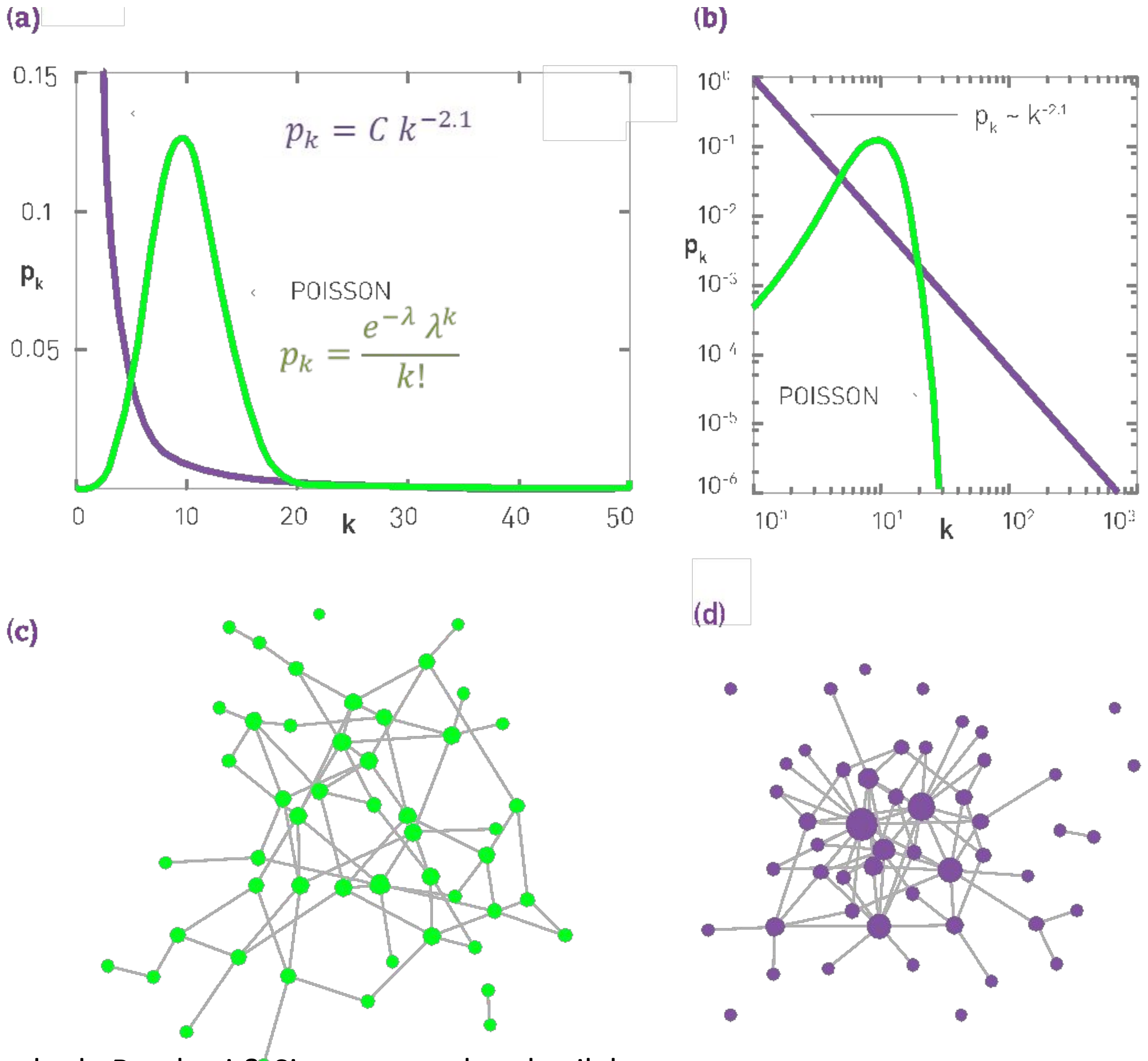
$$\langle k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k\, p(k) \qquad \langle k \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k\, p(k)dk$$

grado medio

$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k) \qquad \langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} \underline{k^m\, p(k)dk}$$

momento orden-m de distr. de grado

Diferencias entre ley de potencias y Poisson

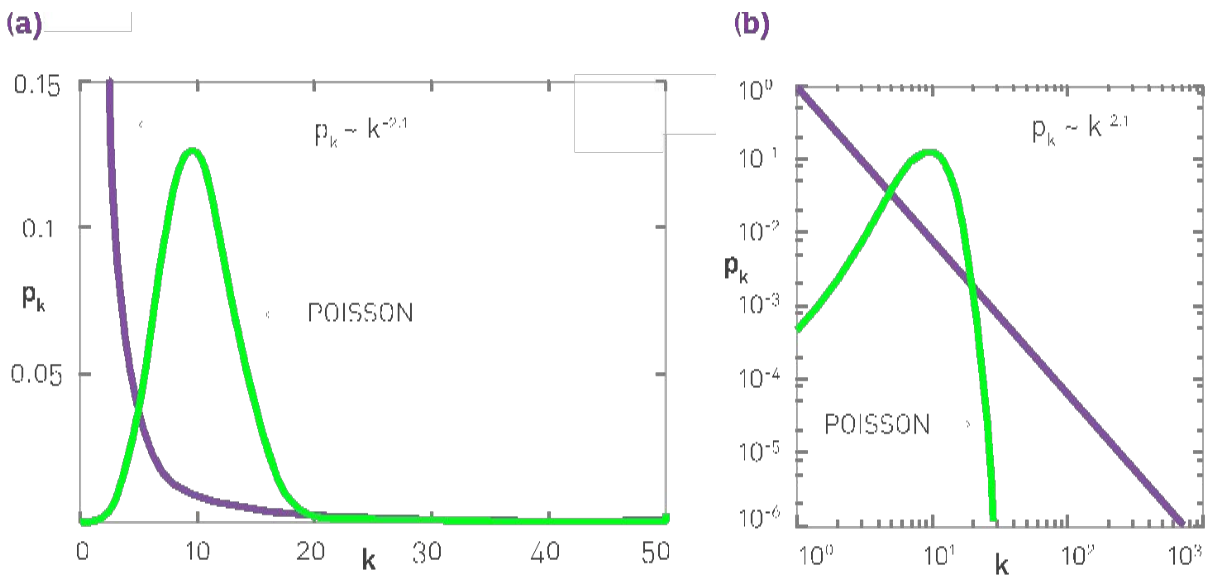


Diferencias:

- *Exceso* de nodos *k* bajos y altos en LP
- Exceso de nodos k~<k> en Poisson

Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

Diferencias entre ley de potencias y Poisson



Diferencias:

- *Exceso* de nodos *k* bajos y altos en LP
- Exceso de nodos k~<k> en Poisson

Sea una red Poisson: $p_k = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$

Si <k>=μ=4.6 y hay en total N=10^{12} (WWW) nodos la prob de encontrar un nodo con k≥100

$$N_{k\geq 100} = 10^{12} \sum_{k\geq 100}^{\infty} \frac{4.6^k e^{-4.6}}{k!} \sim 10^{-82}$$

Esperaría ver **0** hubs

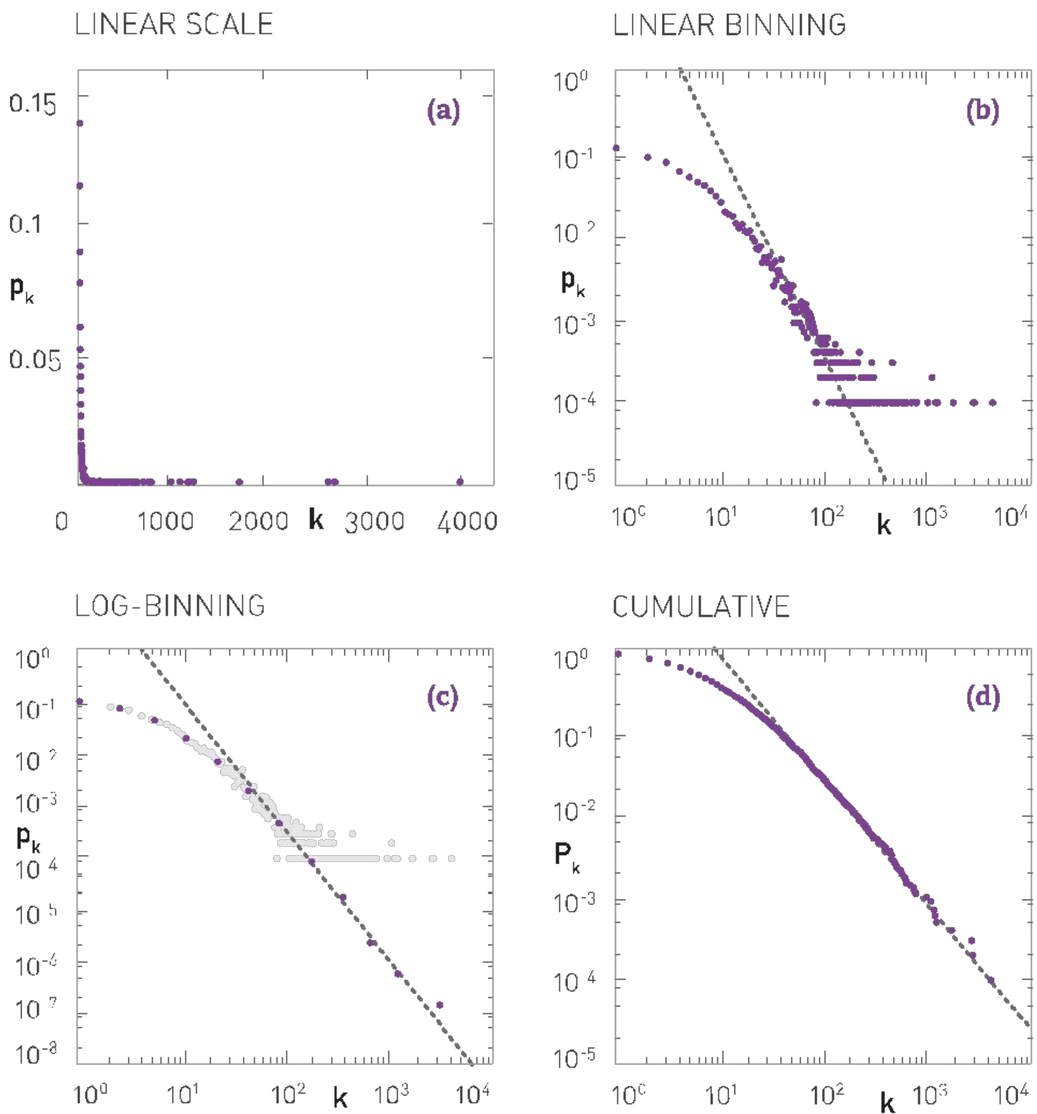
Si fuera una red Ley de Potencia (γ=2.1)

$$N_{k\geq 100} = 10^{12} \sum_{k\geq 100}^{\infty} \frac{k^{-2.1}}{\zeta(2.1)} \sim 10^{9}$$

Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

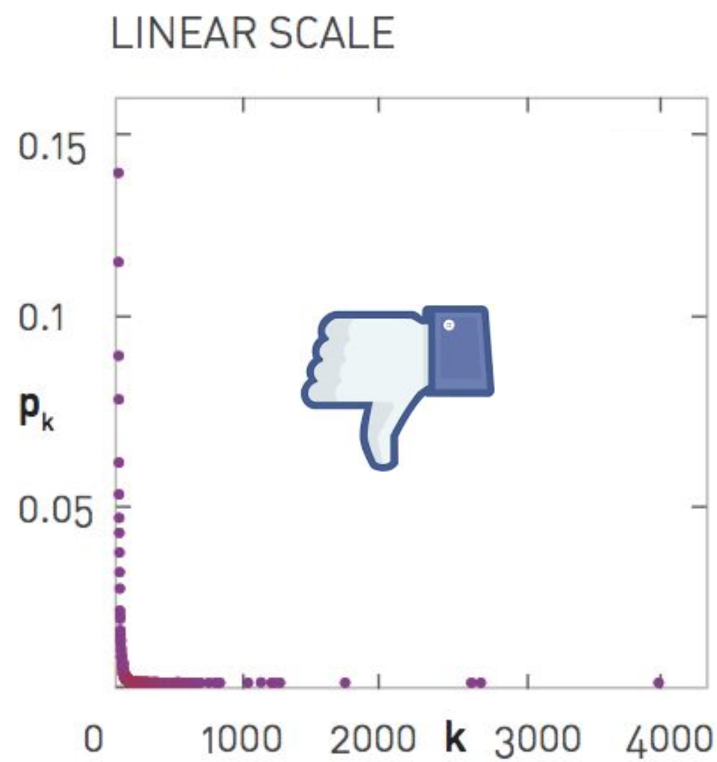


Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

1. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$



El rango de valores posibles de grado hace que se pierda todo detalle

A.-L. Barabási. (2014). *Network Science, Chapter 4*.

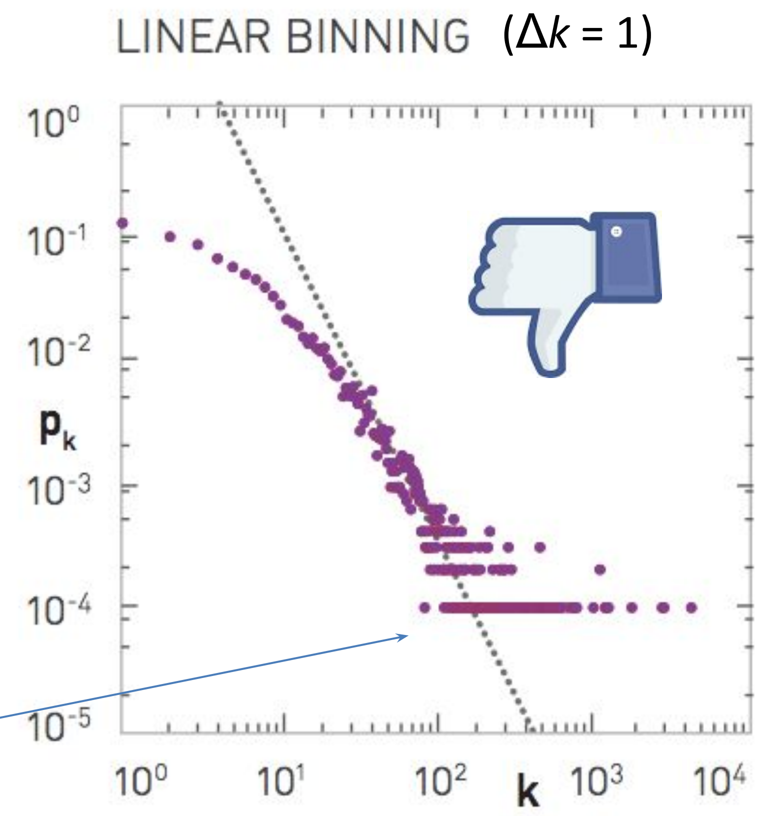
Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

2. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

utilizando escalas Log-Log



Al usar un Δk fijo (y chico) típicamente aparece un único ejemplo de un dado grado en la región de k-alto, dando lugar a la meseta de eventos 1/N (tenemos 1 o 0 cluster de tamanio k>>1)

A.-L. Barabási. (2014). *Network Science, Chapter 4*.

Visualizando leyes de potencia

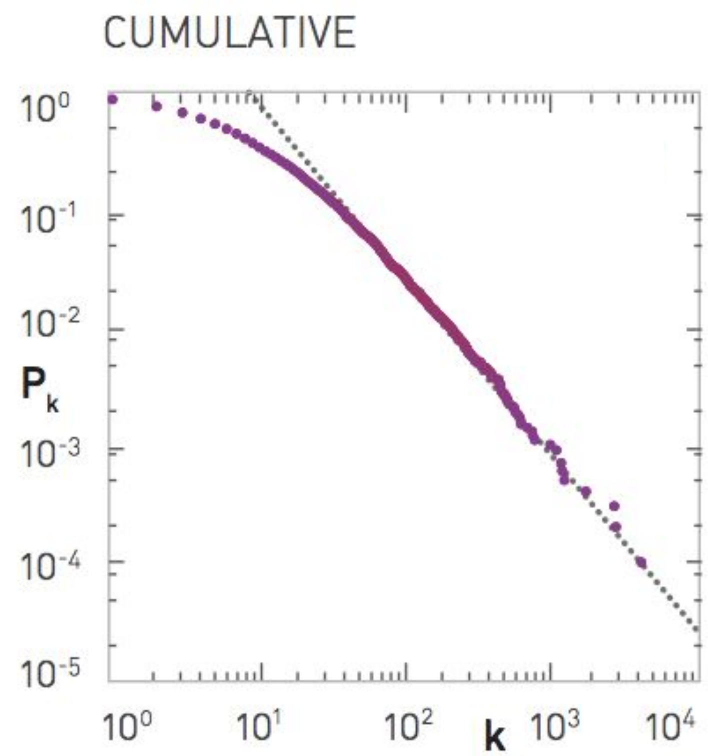
3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$



Visualizando leyes de potencia

3. Función distribución acumulada

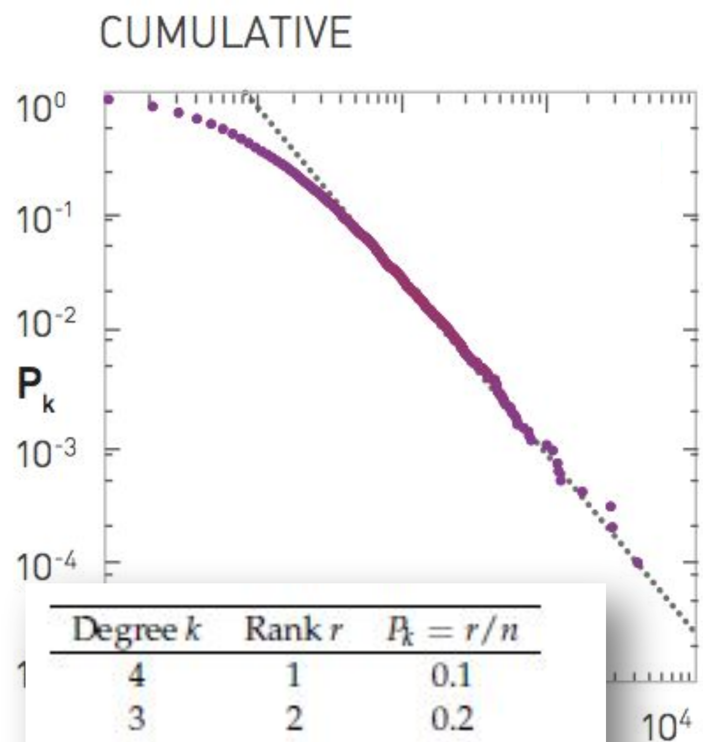
$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_{k}^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$

- P_k es fácil de calcular(no hay que binnear)
  - ranking *r de un nodo:* nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_k = r_k / N$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado r_k



Degree k	Rank r	$P_k = r/n$
4	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.3
2	4	0.4
2	5	0.5
2	6	0.6
2	7	0.7
1	8	0.8
1	9	0.9
0	10	1.0

Visualizando leyes de potencia

3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

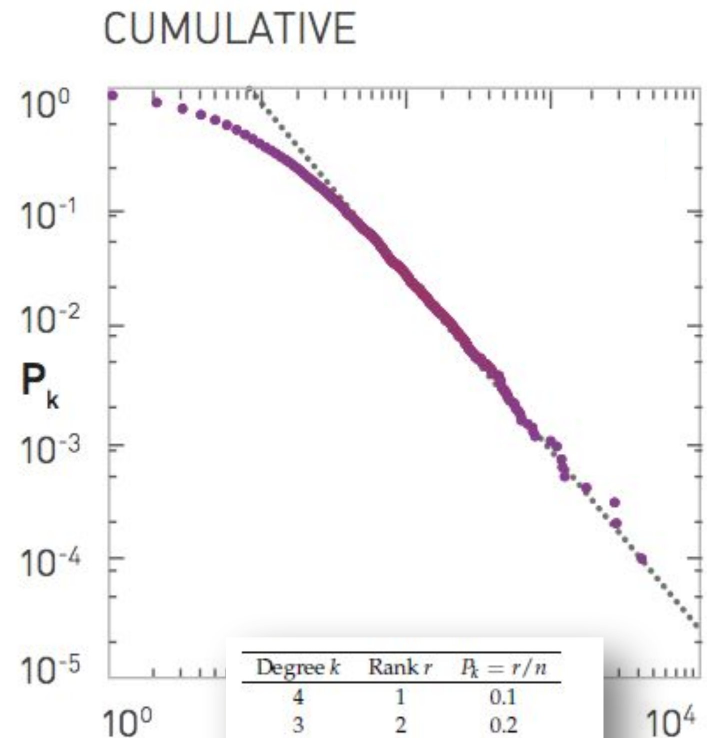
Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_{k}^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$

- P_k es fácil de calcular(no hay que binnear)
  - ranking *r de un nodo:* nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_k = r_k / N$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado r_k
  - Graficamos para cada nodo-i

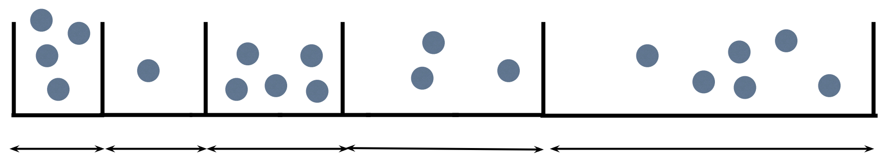
$$P_{k_i} = \frac{r_{k_i}}{N}$$ en función de k_i



Degree k	Rank r	$P_k = r/n$
4	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.3
2	4	0.4
2	5	0.5
2	6	0.6
2	7	0.7
1	8	0.8
1	9	0.9
0	10	1.0

Visualizando leyes de potencias

4. Bineo logaritmico



0 1 3 7 15 31

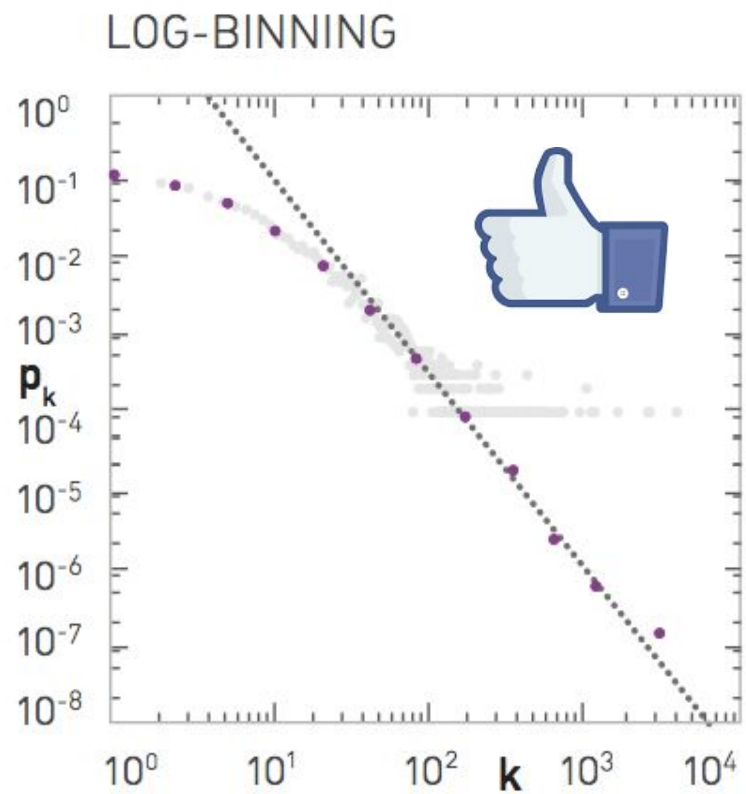
$$b_0 = 1$$

$$b_i = b_{i-1} + 2^i \quad i > 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta b_i &= 2^i \\ \Delta b_{i+1} &= 2\Delta b_i \end{aligned}\right\}$$

Celdas equiespaciadas en escala logaritmica

$$\log \Delta b_{i+1} = \log \Delta b_i + \log 2$$

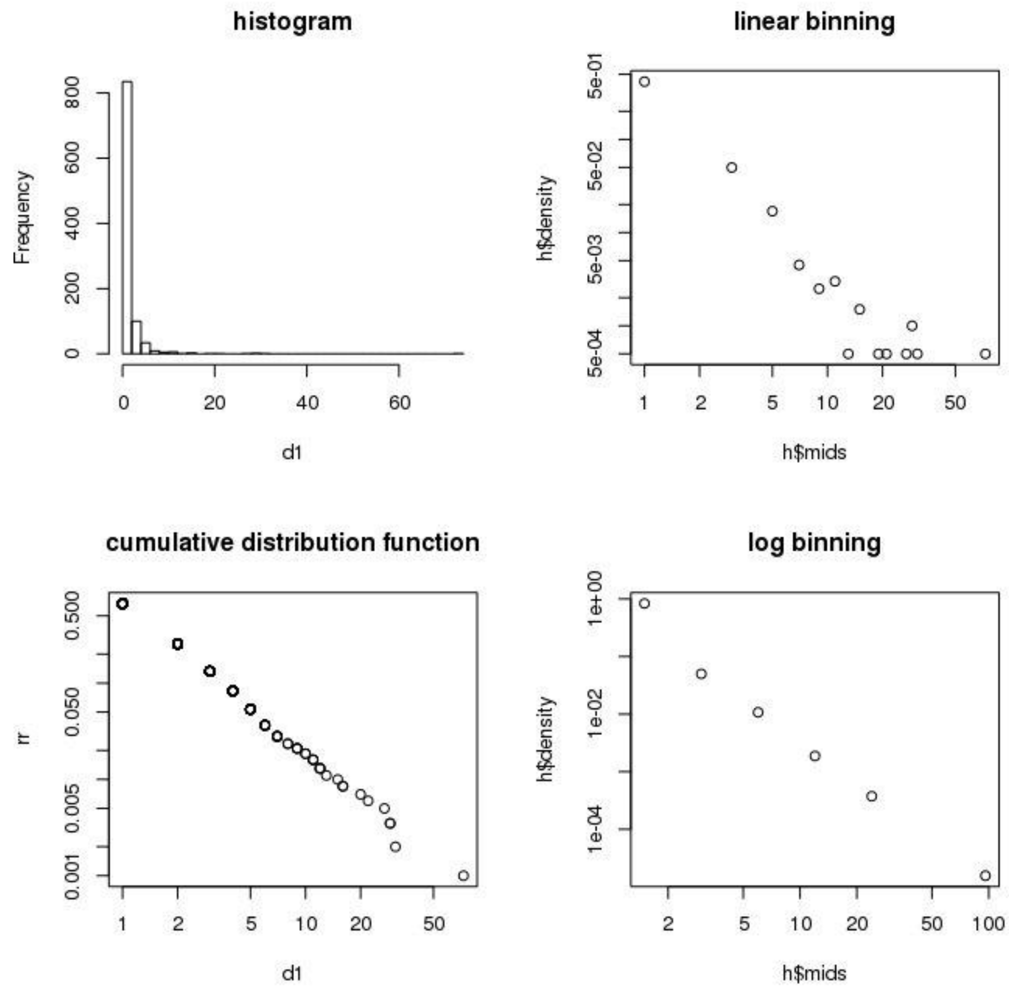


Distribución de grado dada por

$$p(\langle k_i \rangle) = \frac{N_i}{\Delta b_i}$$

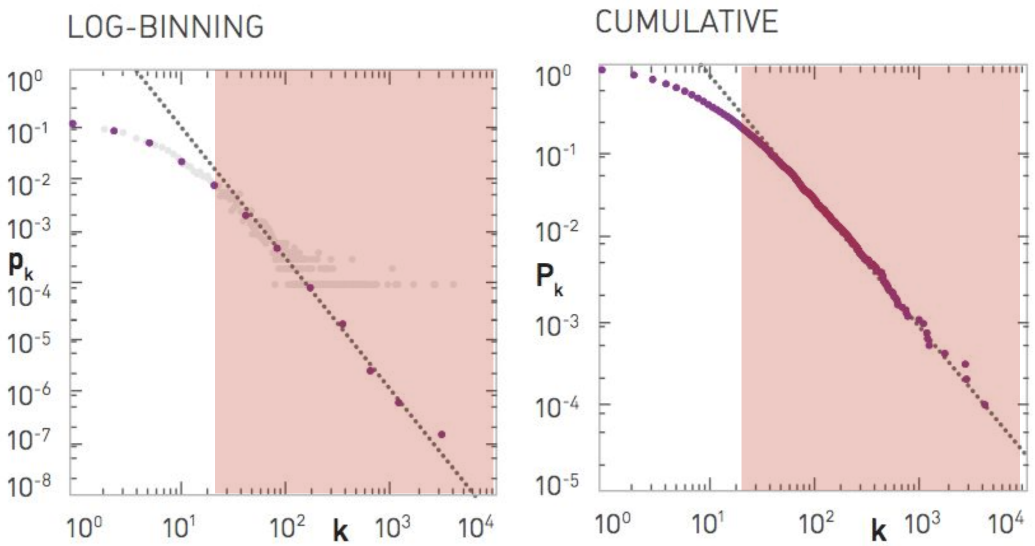
Bin crece con k: se ecualiza el nro de nodos

```r
require(igraph)

#genero red scale-free
g<-barabasi.game(1000)

#calculo el grado
d<-degree(g,mode="all")

#figura de 4 paneles
layout(matrix(1:4,2,2,byrow=TRUE))

h<-hist(d,breaks = 50,main="histograma lineal")

plot(h$mids,h$density,log="xy",typ="p",main="bineado lineal")

#calculo de prob acumulada
rr<-rank(-d)/length(d)
plot(d,rr,log="xy",main="funcion distribucion acumulada")

#bineado logaritmico
bins<-2^seq(0,ceiling(log2(max(d))))
#  > bins
# [1]   1   2   4   8  16  32  64 128

#calculo hsotgrama con bines log
h <- hist(d,breaks=bins,plot=FALSE)
plot(h$mids,h$density,log="xy",typ="p",main="log binning")
```



Ajustando leyes de potencia

La manera **incorrecta** de hacerlo



- Ajuste por mínimos cuadrados de la parte del grafico que **parece** lineal en log-log

$$\log p_k = -\gamma \log k + \text{constant}$$

$$\log P_k = (-\gamma + 1) \log k + \text{constant}$$

Ajustando leyes de potencia

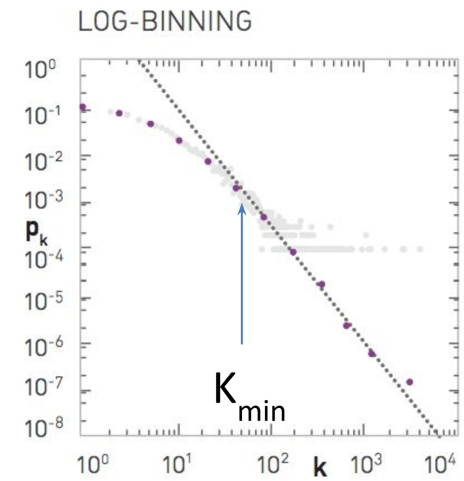
La manera **incorrecta** de hacerlo

Por qué esta **mal**?

- Las probabilidades tienen que estar normalizadas. Ajustar una linea en un gráfico nunca puede dar una distribución válida.
- Muchas funciones **parecen** lineales en log-log
- Discrepancias en la cola son mas relevantes a la hora del ajuste
- El “método de los 5 puntos basculantes” no es de lo mas recomendable en ciencia

Ajustando leyes de potencia

La manera **correcta** de hacerlo



Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation** (**MLE**)

- Se comienza con la hipótesis

$$p(k) = Ck^{-\gamma} \quad C = (\gamma - 1) K_{min}^{\gamma-1}$$

- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud.

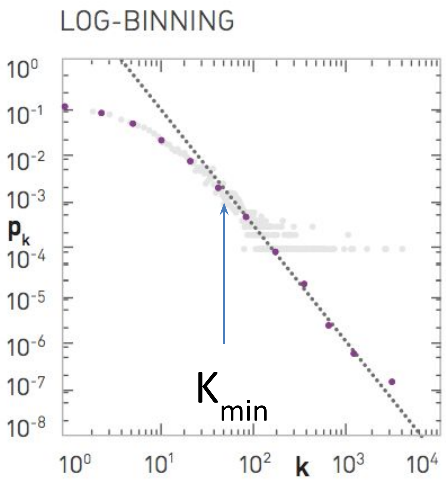
La verosimilitud de un modelo es la prob de observar los datos $(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$ dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}(k|\gamma) = p(k_1)p(k_2)\ldots p(k_N) = \prod_{i=1}^{N} p(k)$$

Aaron Clauset, Cosma R .Shalizi and Mark E.J. Newman: Power-law distributions in empirical data. SIAM Review 51(4):661-703, 2009

Ajustando leyes de potencia

La manera **correcta** de hacerlo



Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation** (**MLE**)

- Se comienza con la hipótesis

$$p(k) = Ck^{-\gamma} \quad C = (\gamma - 1) K_{min}^{\gamma-1}$$

- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud. Prob de observar los datos, dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}(k|\gamma) = \prod_{i=1}^{N} p(k) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\gamma - 1}{K_{min}} \left(\frac{k_i}{K_{min}} \right)^{-\gamma}$$

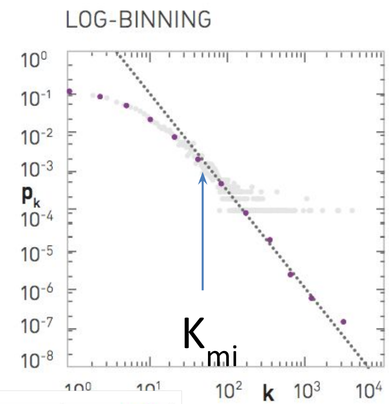
- **Para un dado K_{min}** se estima el exponente minimizando la función de verosimilitud (derivando respecto a γ)

$$\gamma = 1 + N \left[\sum_{i=1}^{N} \ln \frac{k_i}{K_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1} .$$

Como estimar K_{min}?

Ajustando leyes de potencia

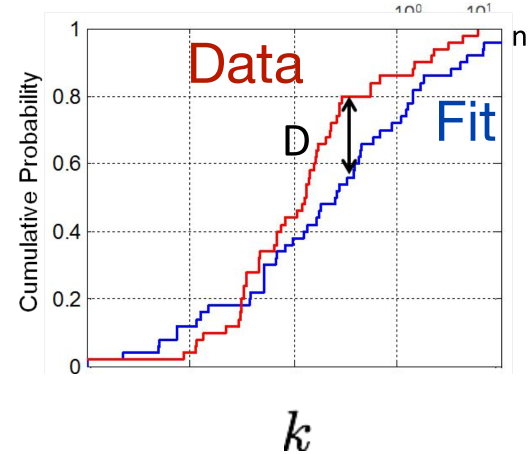
La manera **correcta** de hacerlo



Como estimar K_{min}?

- Se calcula la funcion de probabilidad acumulada
  - de los datos, P_k
  - del ajuste, S_k

$$P_k = C \sum_{k'=K_{min}}^{k} k'^{-\gamma}$$

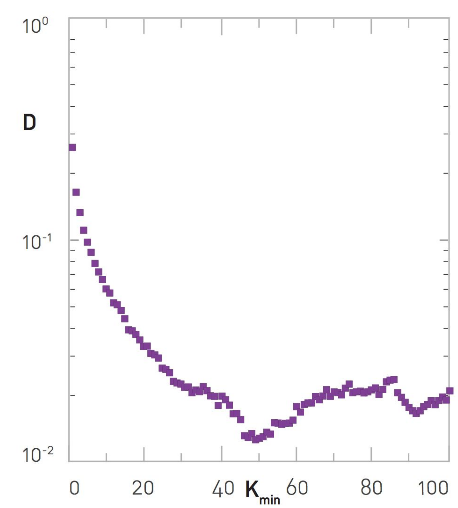


- Se estima la distancia máxima entre ambas distribuciones

$$D = \max_{k \geq K_{min}} |S_k - P_k|$$

- Se elige el K_{min} que minimiza dicha distancia

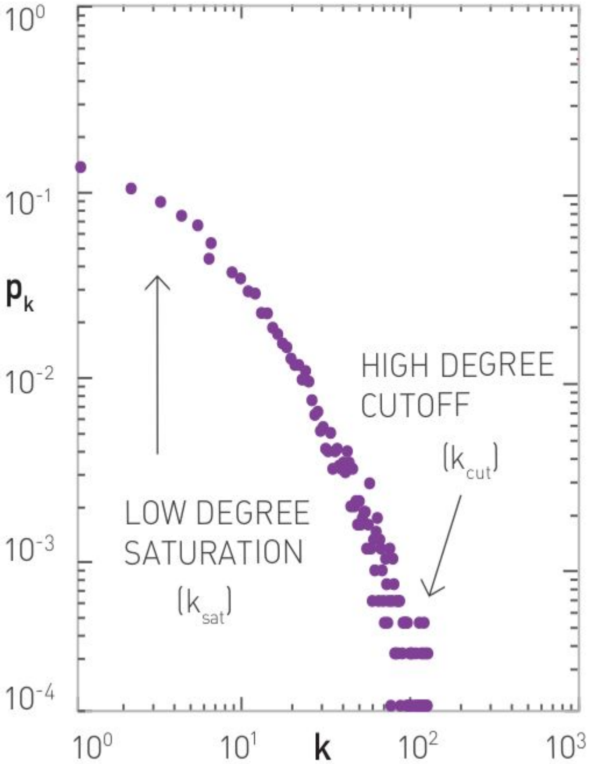
- Esto es lo que hace fits_power_law {igraph} (!)



Aaron Clauset, Cosma R .Shalizi and Mark E.J. Newman: Power-law distributions in empirical data. SIAM Review 51(4):661-703, 2009

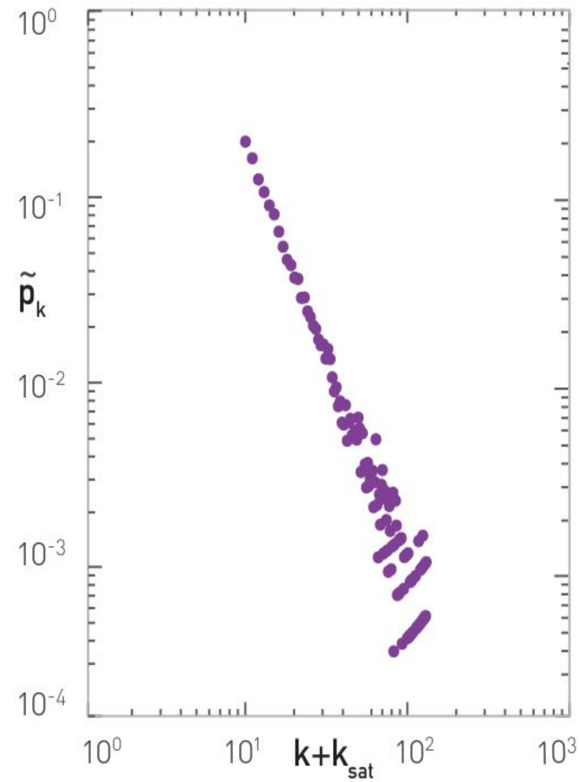
Ajustando leyes de potencia

Efectos *de borde* en redes reales



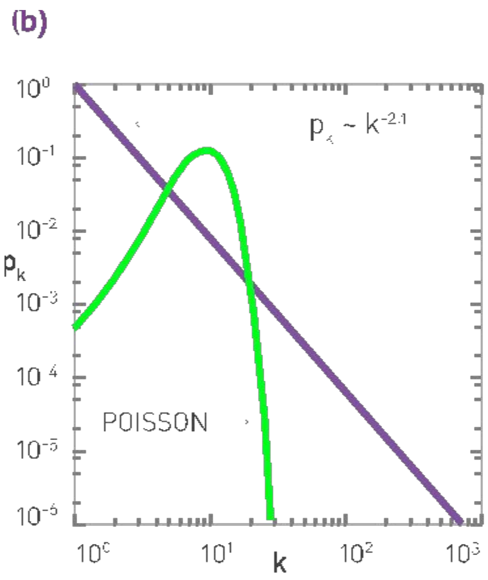
$$p_k \exp\left(\frac{k}{k_{cut}}\right) = a(k + k_{sat})^{-\gamma}$$

$$\boxed{\hat{p}_k \sim (k + k_{sat})^{-\gamma}}$$



$$p_k = a(k + k_{sat})^{-\gamma} \exp\left(-\frac{k}{k_{cut}}\right)$$

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs



Estimación del grado máximo de la red

Nro de nodos de grado mayor o igual que kmax

$$N_{k \geq k_{max}} = N \sum_{k \geq k_{max}}^{\infty} p_k \quad \sim N \int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk$$

Dada una distribucion de grado para una red de N vertices, cual es el valor esperado de kmax?

Vamos a **pedir** que k_{max} cumpla

$$\underbrace{\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk}_{} = \frac{1}{N}$$

probabilidad de encontrar un nodo con grado mayor o igual a k_{max} x

Esto es compatible con que vemos 1 (un) nodo de grado kmax en nuestra red

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado *p(k)*

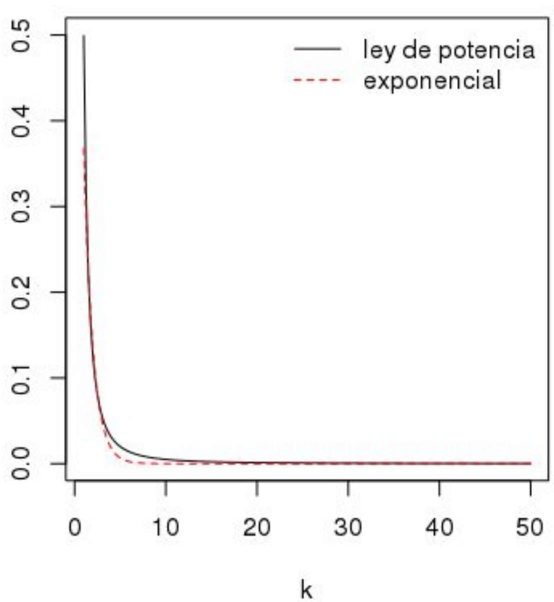
Vamos a pedir que k_{max} cumpla

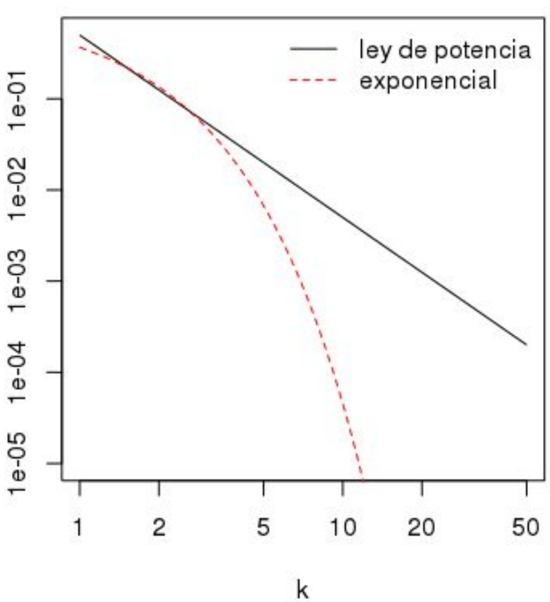
$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

<u>Distribución exponencial</u>

$$p(k) = Ce^{-\lambda k}$$





Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado $p(k)$

Vamos a pedir que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

<u>Distribución exponencial</u>

$$p(k) = \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}\, dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

El hecho de tener un **numero finito de nodos**, impone una **escala** para k_{max}

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado *p(k)*

Vamos a pedir que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} e^{-\lambda k}\, dk = \frac{1}{N\, \lambda e^{\lambda\, k_{min}}}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

Otro ejemplo:

Distribución ley de potencias

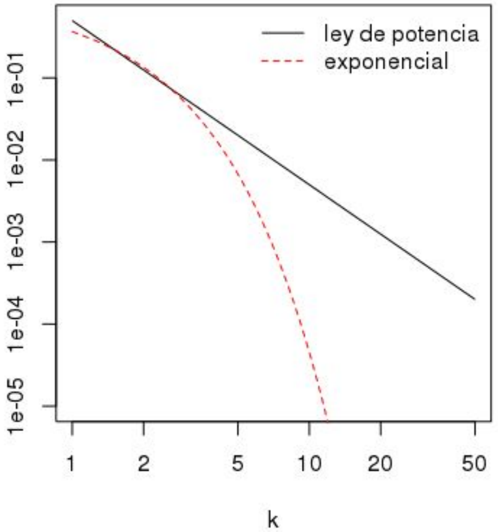
$$p(k) = (\gamma - 1){k_{min}}^{\gamma-1}\, k^{-\gamma}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} k^{-\gamma} dk = \frac{1}{N(\gamma-1){k_{min}}^{\gamma-1}}$$

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

El hecho de tener un **numero finito de nodos**, impone una **escala** para k_{max}

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs



<u>Distribución exponencial</u>

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

k_{max} crece de manera **logarítmica** con el tamaño de la red:

$$k_{max} \sim k_{min}$$

<u>Distribución ley de potencias</u>

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

k_{max} crece de manera **polinómica** con el tamaño de la red: puede ser **ordenes de magnitud mayor** que k_{min}

Efectos de tamaño finito **para leyes de potencia**

Valor esperado para k_{max}

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Para una distribución dada tipo ley de potencia, k_{max} aumenta con el tamaño del sistema

- Si γ > 2, k_{max} crece más lento que *N*
- Si γ = 2, $k_{max} \sim N$. El tamaño del mayor *hub es o(N)*
- Si γ < 2, k_{max} crece más rápido que *N.* El hub atrae para sí una fracción creciente de links (comportamiento anómalo, no se observa si no se admiten multi-links)

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

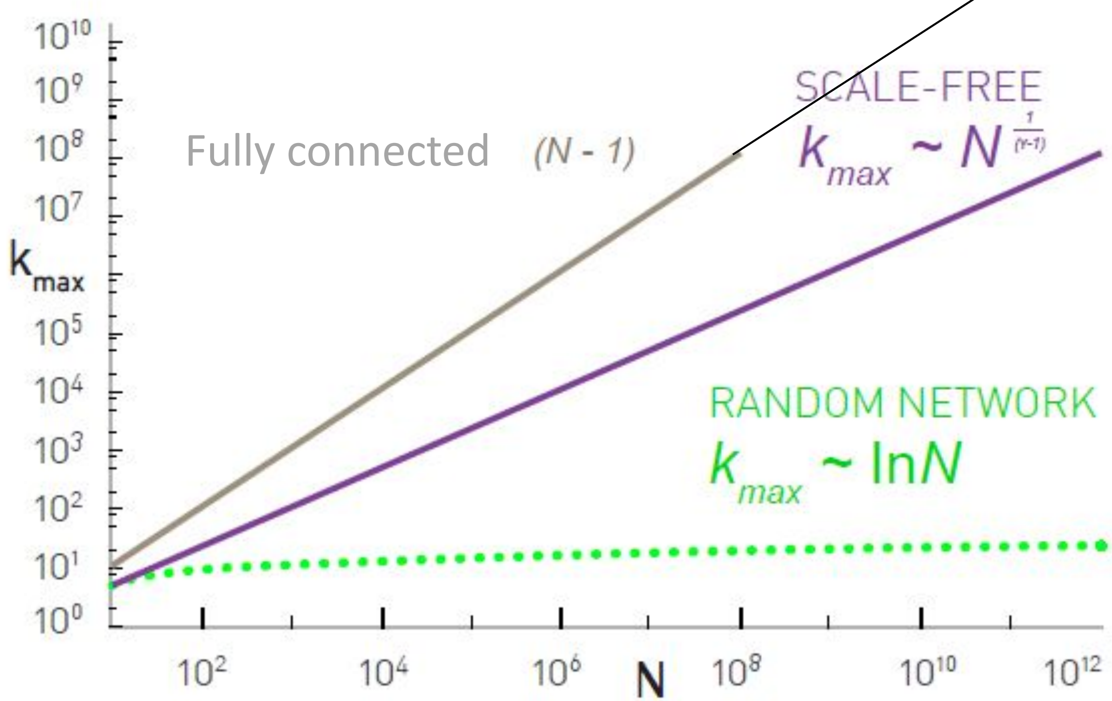
$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\gamma < 2$

$\gamma = 2$

$\gamma > 2$



Que significa *libre de escala*?

$$f(x) \sim x^{\alpha}$$

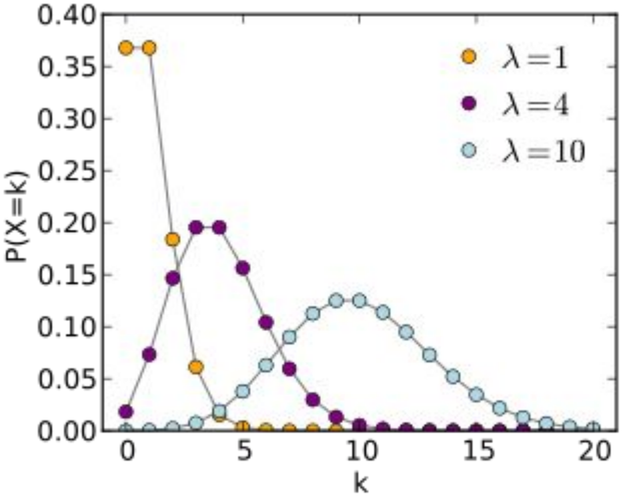
$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} x^{\alpha}$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} f(x)$$

Desde el punto de vista
estadistico…..

Un momentito…

$$p_{k\,\in[k_1,k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k)dk$$



$$p_k$$

$$p_{k\,\geq\,k_2} = \sum_{k_2}^{\infty} p(k)$$

$$p_{k\geq k_2} = \int_{k_2}^{\infty} p(k)dk$$

prob de encontrar un nodo con k ≥ k_2

$$\langle f_k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} f_k\, p(k)$$

$$\langle f(k) \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} f(k)\, p(k)dk$$

valor medio de una funcion *f(k)*

$$\langle k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k\, p(k)$$

$$\langle k \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k\, p(k)dk$$

grado medio

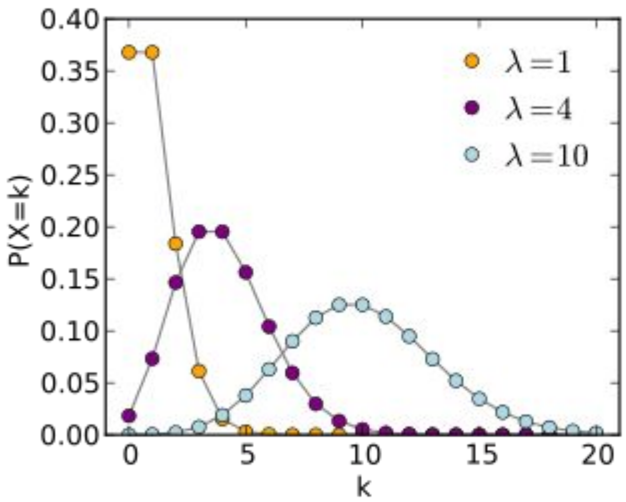
$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k)$$

$$\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k)dk$$

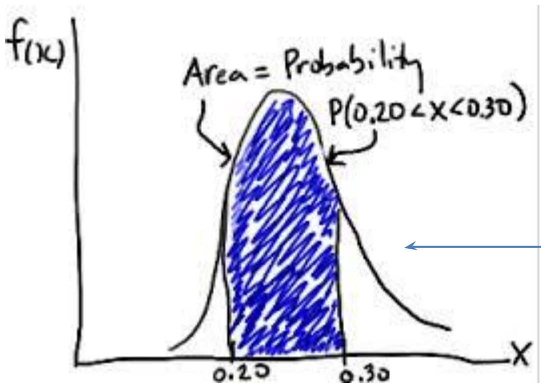
momento orden-m de distr. de grado

Un momentito…

$$p_{k\in[k_1,k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k)dk$$



$$p_k$$



$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k) \qquad \langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k)dk$$

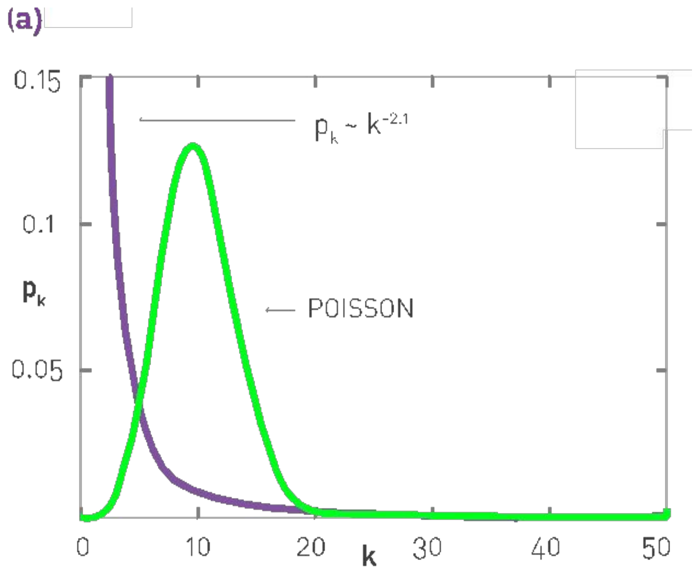
momento orden-m de distr. de grado

Este factor aumenta con *k*, este otro disminuye con *k*

Para que la integral converja $p(k) \to 0$ **lo suficientemente** rapido

$k \to \infty$

Qué significa libre-de-escala?



$$\langle k^m \rangle = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^m \, p(k) \approx \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^m \, p(k) dk$$

- Conocer todos los momentos de la distribución equivale a conocer la distribución
- Los primeros momentos tienen interpretaciones conocidas

- m=1 corresponde al valor medio de la distribución
- m=2 permite calcular la varianza y desviación estándar σ: $var = \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$
- m=3 permite calcular el *skewness* $<(k - <k>)^3>/\sigma^3$
- …

<u>Para una distribución tipo ley de potencia:</u>

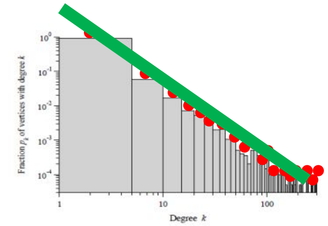
$$\langle k^m \rangle = C \frac{{k_{max}}^{m-\gamma+1} - {k_{min}}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

Para redes grandes ($k_{max} \to \infty$)

- si m-γ+1 ≤0 $<k^m>$ resulta finito
- si m-γ+1 >0 $<k^m>$ diverge.

Los momentos de orden m> γ-1 divergen

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



Distribuciones libre-de-escala

Para una distribución tipo ley-de-potencia los momentos de orden m> γ-1 divergen

Network	Size	$\langle k \rangle$	κ	γ_{out}	γ_{in}
WWW	325 729	4.51	900	2.45	2.1
WWW	4×10^7	7		2.38	2.1
WWW	2×10^8	7.5	4000	2.72	2.1
WWW, site	260 000				1.94
Internet, domain*	3015–4389	3.42–3.76	30–40	2.1–2.2	2.1–2.2
Internet, router*	3888	2.57	30	2.48	2.48
Internet, router*	150 000	2.66	60	2.4	2.4
Movie actors*	212 250	28.78	900	2.3	2.3
Co-authors, SPIRES*	56 627	173	1100	1.2	1.2
Co-authors, neuro.*	209 293	11.54	400	2.1	2.1
Co-authors, math.*	70 975	3.9	120	2.5	2.5
Sexual contacts*	2810			3.4	3.4
Metabolic, *E. coli*	778	7.4	110	2.2	2.2
Protein, *S. cerev.**	1870	2.39		2.4	2.4
Ythan estuary*	134	8.7	35	1.05	1.05
Silwood Park*	154	4.75	27	1.13	1.13
Citation	783 339	8.57			3
Phone call	53×10^6	3.16		2.1	2.1
Words, co-occurrence*	460 902	70.13		2.7	2.7
Words, synonyms*	22 311	13.48		2.8	2.8

- Muchas redes reales γ<3
- $<k^2>$ diverge en el limite N□∞ !!

$$\langle k^m \rangle = C\,\frac{{k_{max}}^{m-\gamma+1} - {k_{min}}^{m-\gamma+1}}{m-\gamma+1}$$

$$\langle k^2 \rangle = C\,\frac{{k_{max}}^{3-\gamma} - {k_{min}}^{3-\gamma}}{3-\gamma}$$

La variabilidad (fluctuación cuadrática media) tambien diverge $\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$

Distribuciones libre-de-escala

Para una distribución tipo ley-de-potencia los momentos de orden m> γ-1 divergen

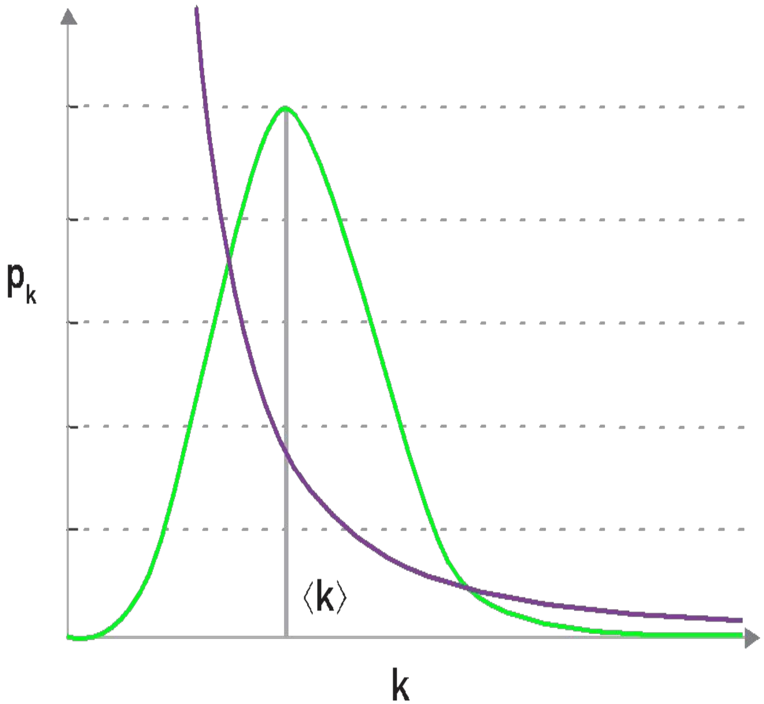
NETWORK	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
Science Collaboration	23,133	93,439	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
Citation Network	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03**	4.00*	-
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*

- Muchas redes reales γ<3
- $<k^2>$ diverge en el limite N□∞ !!

Rango donde encontrar valores tìpicos

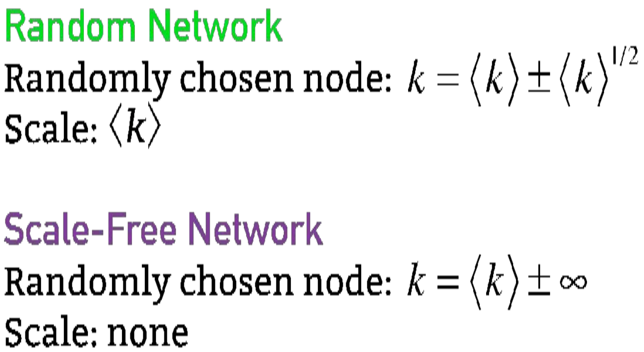
$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

Distribuciones libre-de-escala



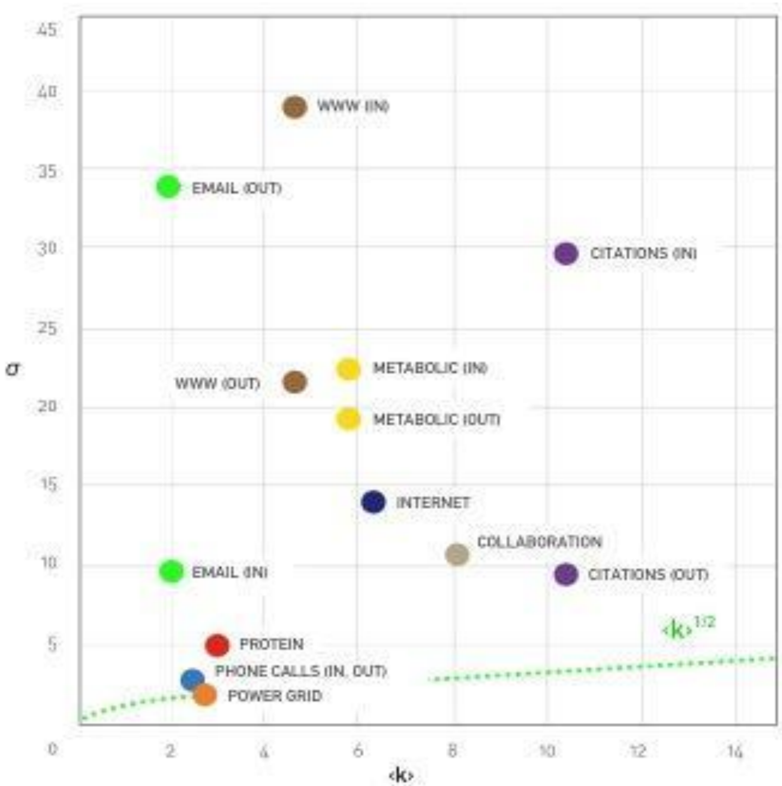
Rango donde encontrar valores tìpicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$



Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con γ<3 puede tener valores muy alejados de <*k*>. No existe una escala característica para la conectividad.

Distribuciones libre-de-escala en redes finitas



Rango donde encontrar valores tìpicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

Random Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

Scale: $\langle k \rangle$

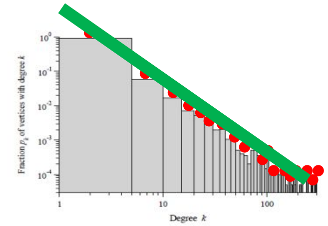
Scale-Free Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$

Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con γ<3 puede tener valores muy alejados de <*k*>. No existe una escala característica para la conectividad.

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



Habiamos visto…

De acuerdo a la distribución de grado las redes pueden clasificarse en

Redes acotadas exponencialmente:

- distribución decae para altos valores de *k* exponencialmente o más rapido
- Ausencia de grandes fluctuaciones en el grado $[\langle k^2 \rangle < \langle k \rangle]$

Redes de cola pesada:

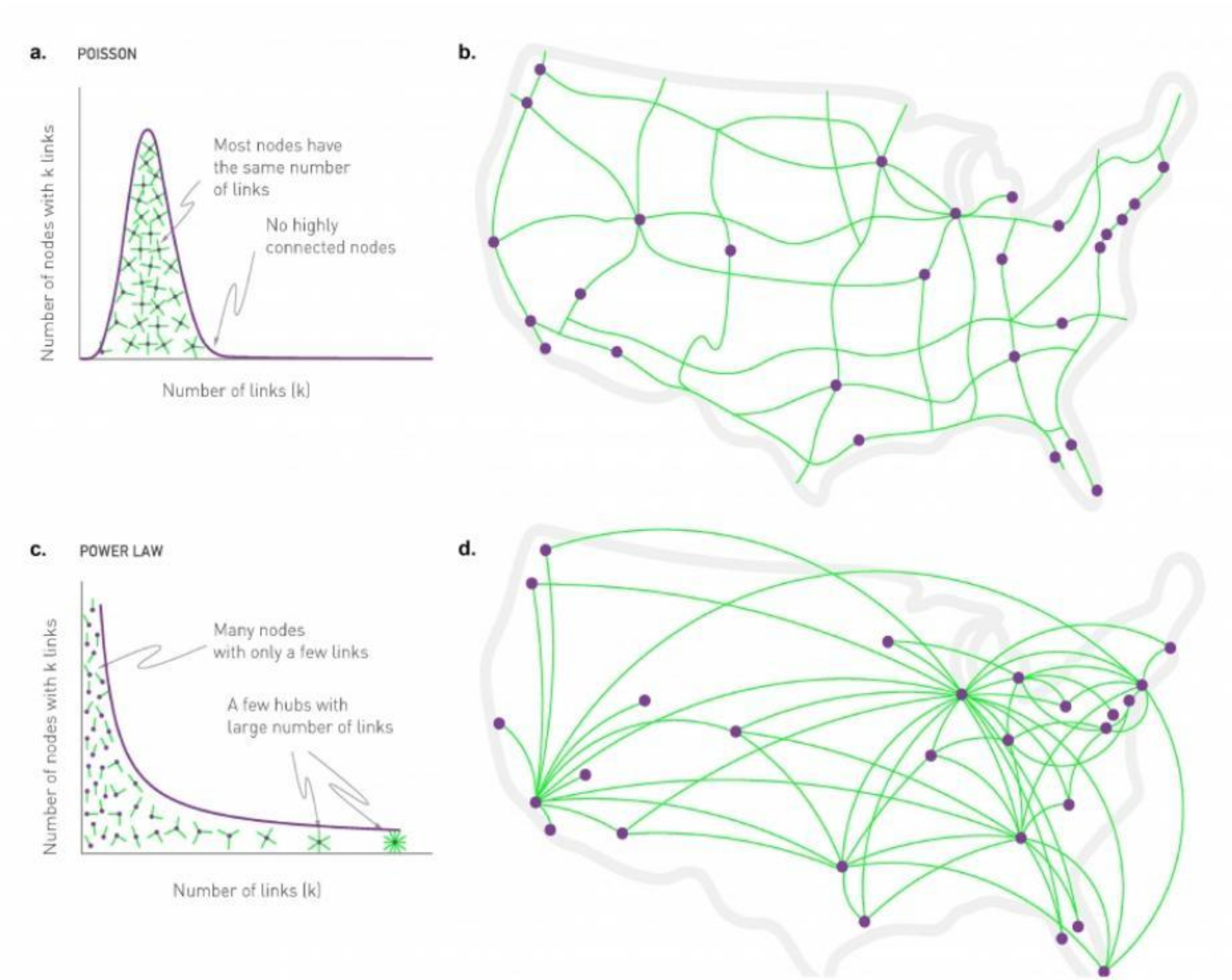
- redes cuya distribución decae como ley de potencia para altos valores de *k*
- Pueden presentarse grandes fluctuaciones en el grado $[\langle k^2 \rangle \gg \langle k \rangle]$
- Típicamente presentan outliers (hubs)

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

	$\langle k \rangle$	$\langle k^2 \rangle$
$2<\gamma<=3$	finito	**infinito**
$\gamma>3$	finito	finito

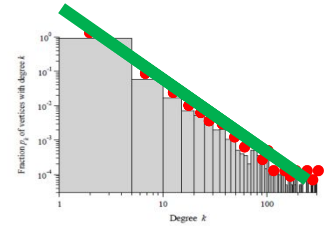
Cual es el efecto de tener **hubs** en una red?

Efecto de hubs sobre distancias



La presencia de hubs crea **atajos**

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



Habiamos visto...

De acuerdo a la distribución de grado las redes pueden clasificarse en

Redes acotadas exponencialmente:

- distribución decae para altos valores de *k* exponencialmente o más rapido
- Ausencia de grandes fluctuaciones en el grado [$\langle k^2\rangle < \langle k\rangle$]

Redes de cola pesada:

- redes cuya distribución decae como ley de potencia para altos valores de *k*
- Pueden presentarse grandes fluctuaciones en el grado [$\langle k^2\rangle \gg \langle k\rangle$]
- Típicamente presentan outliers (hubs)

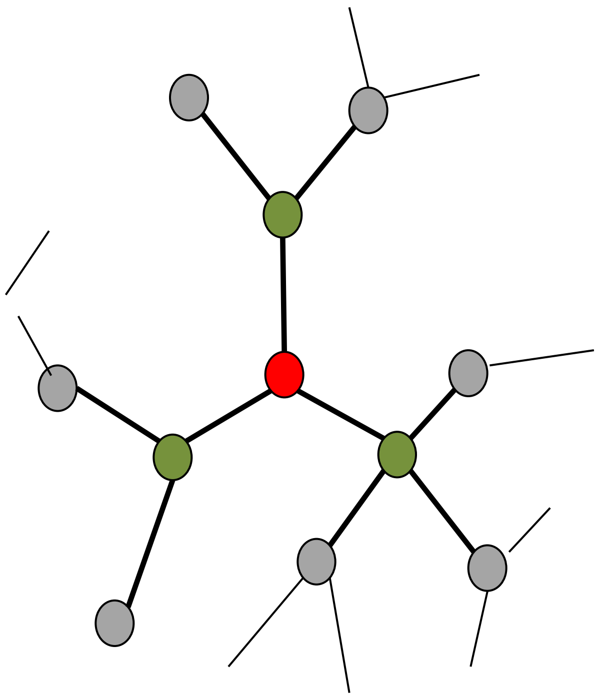
$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

	$\langle k\rangle$	$\langle k^2\rangle$
$2<\gamma\le 3$	finito	**infinito**
$\gamma>3$	finito	finito

$$\langle d\rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma=2 \\ \ln\ln N & 2<\gamma<3 \\ \dfrac{\ln N}{\ln\ln N} & \gamma=3 \\ \ln N & \gamma>3 \end{cases}$$

Distancias y **mundo-pequeñ**o en redes aleatorias (idea)

En redes aleatorias (distribución Poisson) los nodos tienden a tener $k \sim \langle k \rangle$.



- Nro primeros vecinos $\sim \langle k \rangle$
- Nro segundos vecinos $\sim \langle k \rangle^2$
- Nro de vecinos a distancia $s \sim \langle k \rangle^l$

El nro de nodos hasta una distancia *s* resulta

$$N(l) = 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \cdots + \langle k \rangle^l = \frac{\langle k \rangle^{l+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

Como máximo $N(l_{max})=N$

$$N \sim \langle k \rangle^{l_{max}}$$

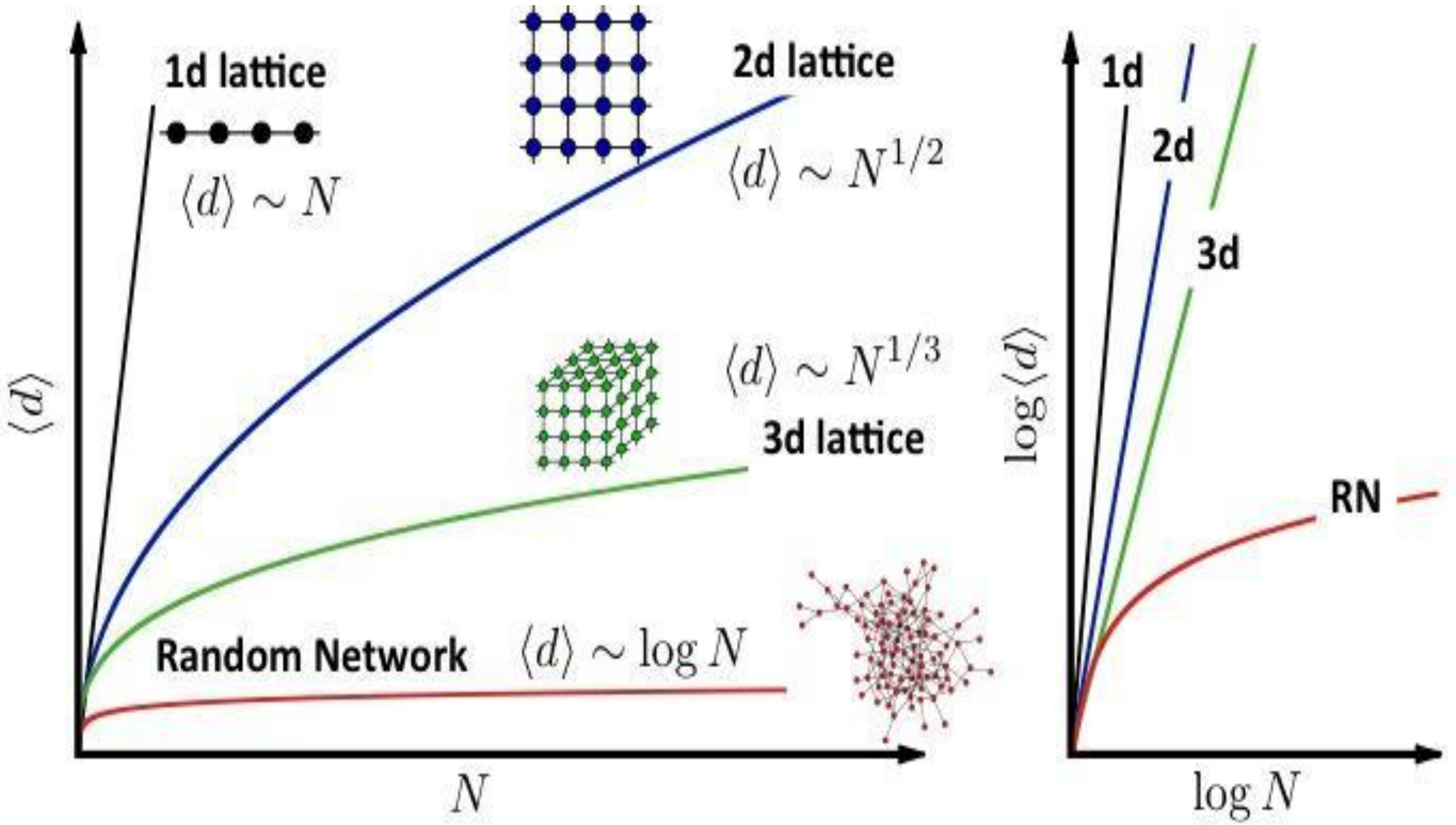
$$l_{max} \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

Efecto mundo pequeño

Chung 2001 PNAS Avg distance and expected degree

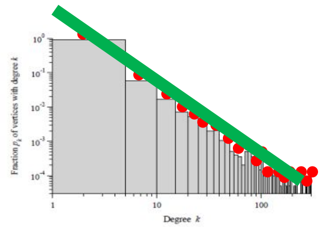
Topología de mundos-pequeños

$l_{max} \sim \log N$



Distancias en redes libres de escala

$p_k = C\, k^{-\gamma}$



$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2 \\ \ln \ln N & 2 < \gamma < 3 \\ \dfrac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3 \\ \ln N & \gamma > 3 \end{cases}$$

Tamaño hub o(N). Estructura tipo *spoke*. Camino medio independiente del tamaño del sistema

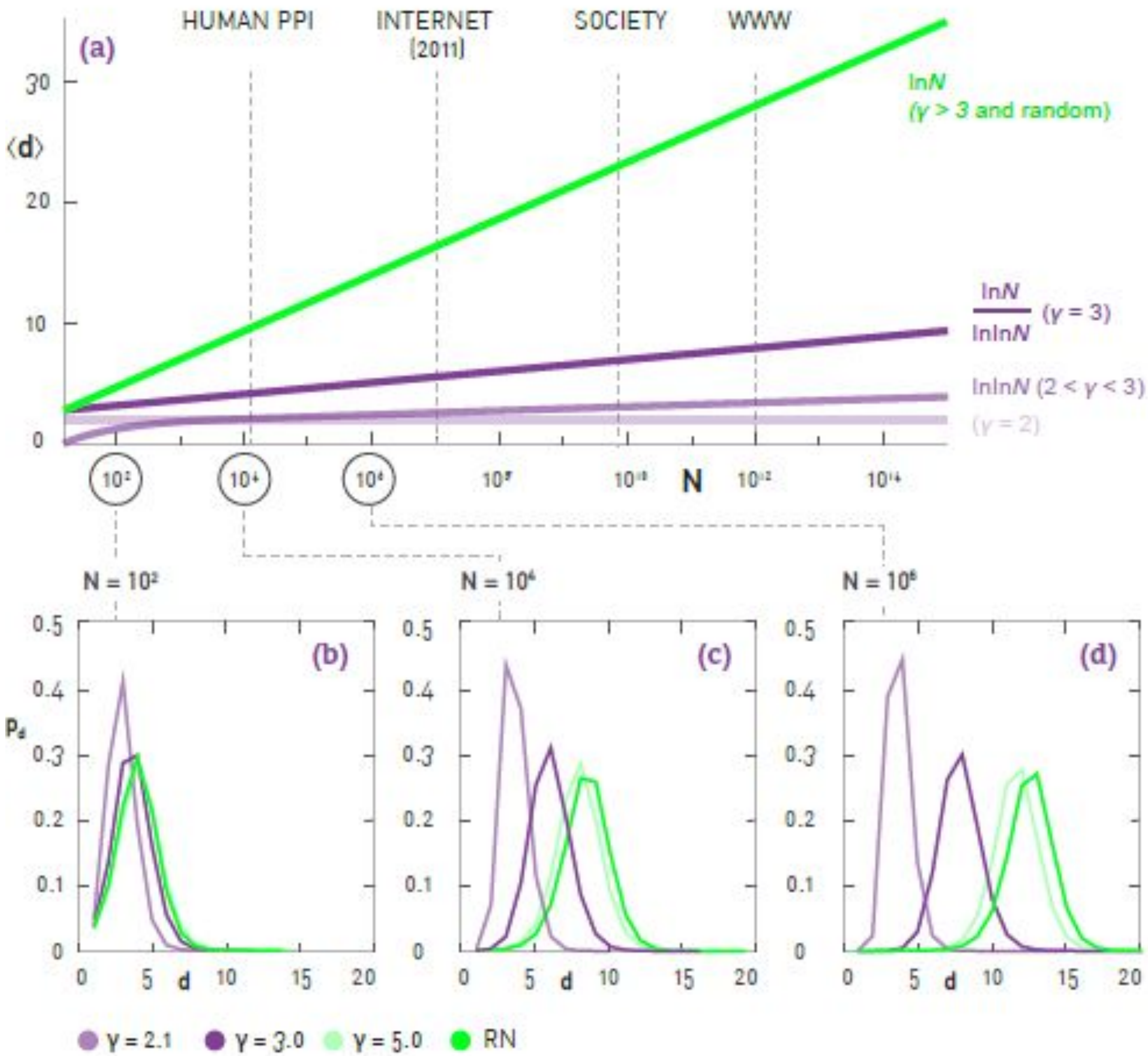
Longitud media aumenta mas lento que log (!) **Ultra-small-world** debido a hubs.

Valor crítico de γ para el cual $\langle k^2 \rangle$ deja de diverger.

$\langle k^2 \rangle$ es finito. No hay suficientes hubs, ni son tan gdes. Se comporta como **small-world r**andom network.

Cohen, Havlin Phys. Rev. Lett. 90, 58701(2003); Cohen, Havlin and ben-Avraham, in Handbook of Graphs and Networks, Eds. Bornholdt and Shuster (Willy-VCH, NY, 2002) Chap. 4; Confirmed also by: Dorogovtsev et al (2002), Chung and Lu (2002); (Bollobas, Riordan, 2002; Bollobas, 1985; Newman, 2001

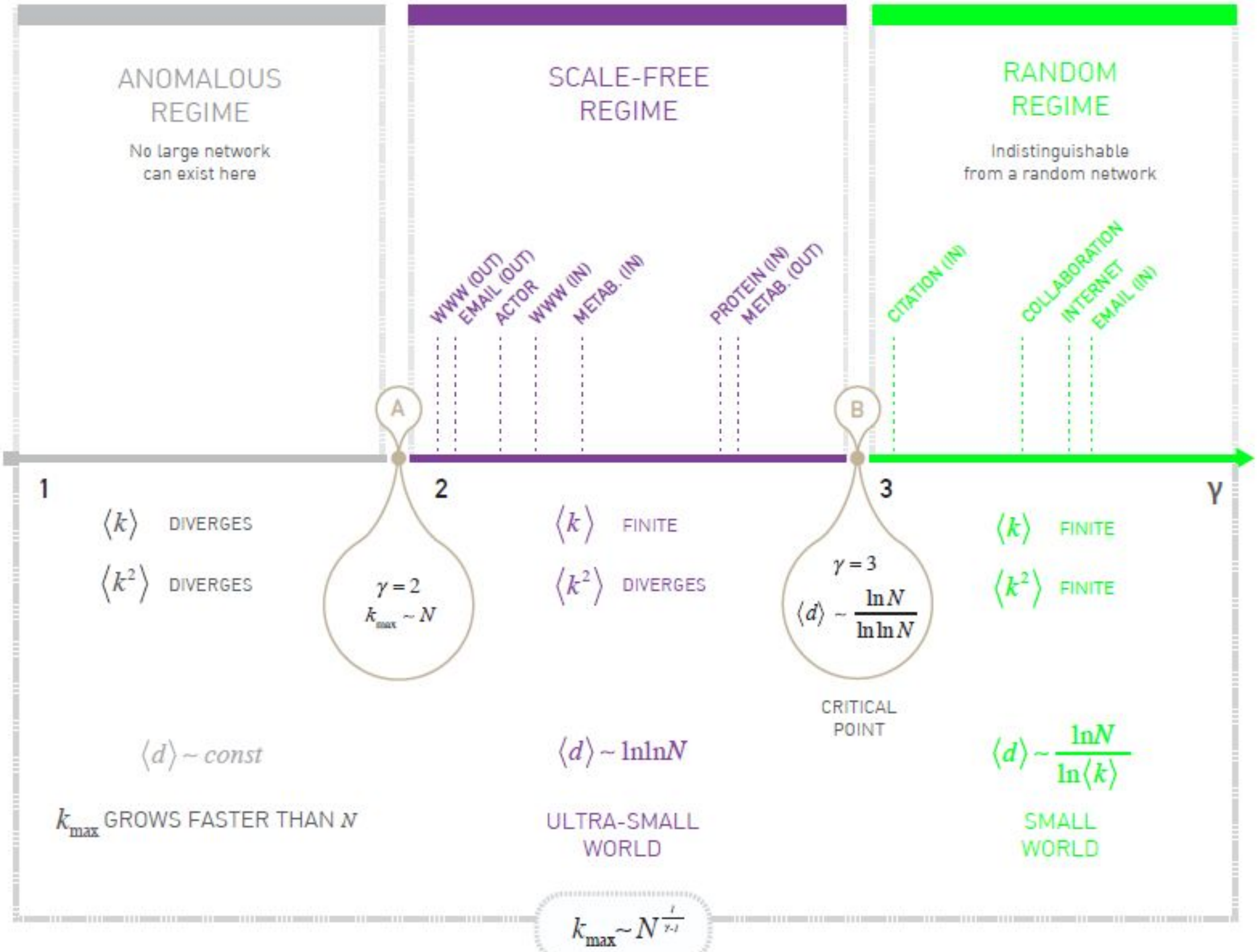
Distancias en redes libres de escala



$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2, \\ \dfrac{\ln \ln N}{\ln(\gamma - 1)} & 2 < \gamma < 3, \\ \dfrac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3, \\ \ln N & \gamma > 3. \end{cases}$$

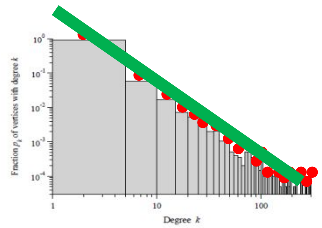
Las diferencias entre diferentes tipos de *escaleo* para las distancias se ponen de manifiesto en redes grandes.

Exponente crítico



Leyes de potencia en régimen logN

$p_k = C\, k^{-\gamma}$



Es dificil encontrar redes reales con distribución de grado ley de potencia con $\gamma>3$

- Se necesita observar nodos con grados que varíen en al menos 2 (o mejor 3) ordenes de magnitud: $k_{min} \sim 1$, $k_{max} \sim 10^2$

- Pero entonces

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$N = \left(\frac{k_{max}}{k_{min}}\right)^{\gamma-1} = 10^{2(\gamma-1)}$$

Para reconocer una red con distrib. de grado de exponente $\gamma=5$ necesitaría que la misma tuviera al menos $N \sim 10^8$ nodos (!)