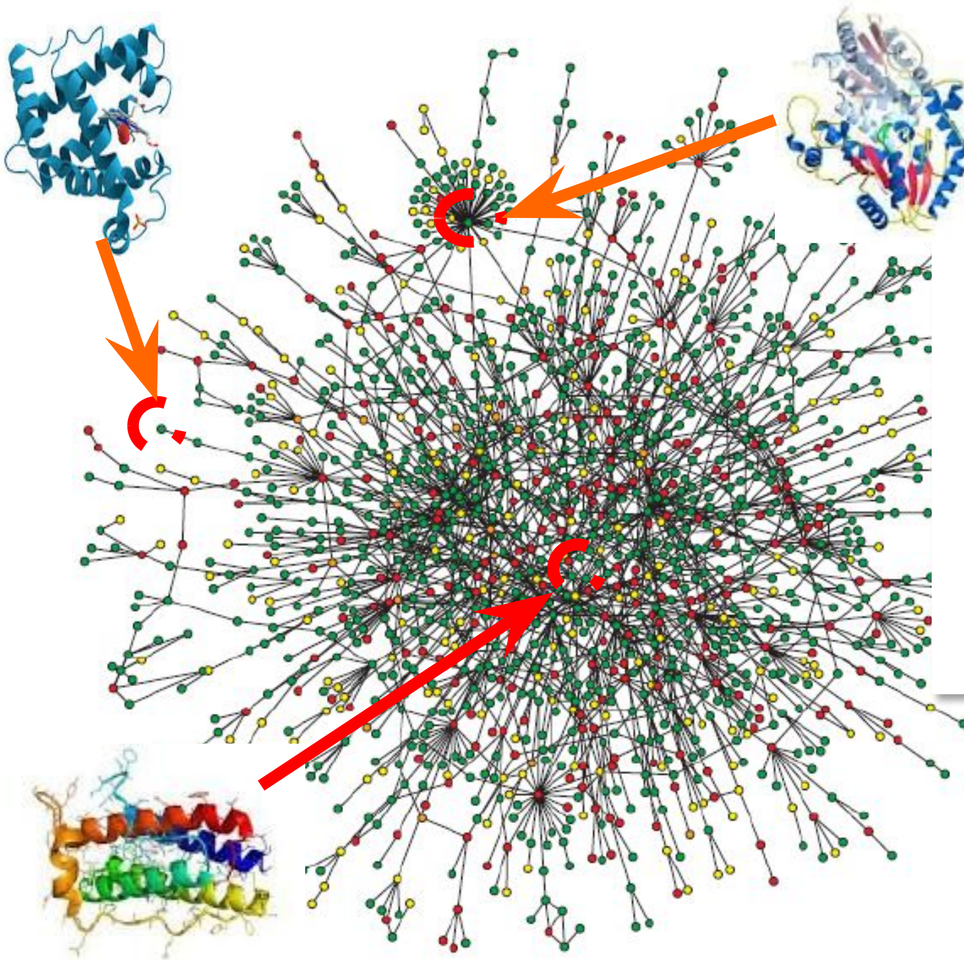
Centralidad

¿Qué tan *relevante* es un nodo de la red?

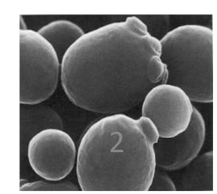
v1.2

Topológia y rol biológico



Redes Complejas		**Biologia**
Degree		Essentiality
Eccentricity		Phenotypic variability
Closeness	⟺	Biological function
Betweenness		Cancer related
Bridging centrality		Disease Related
Eigenvalue centrality		…
Random walk centralities		
….		

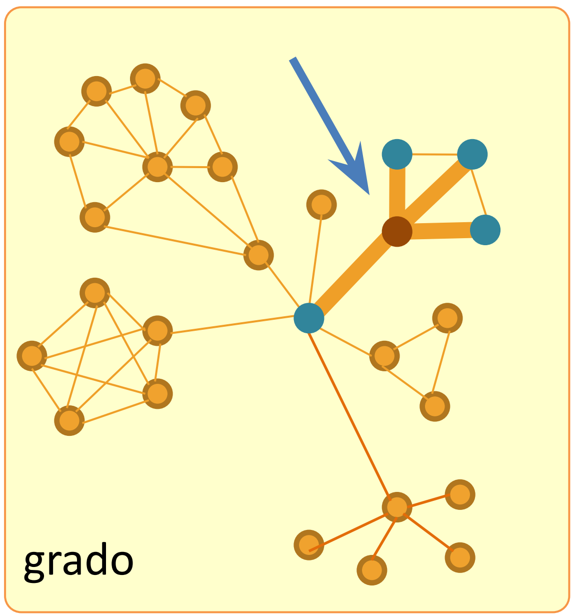
Protein-protein interaction in yeast *S. cerevisiae*, (N=1870 and L=2240).
Jeong et al., Nature, 411, 41 (2001).

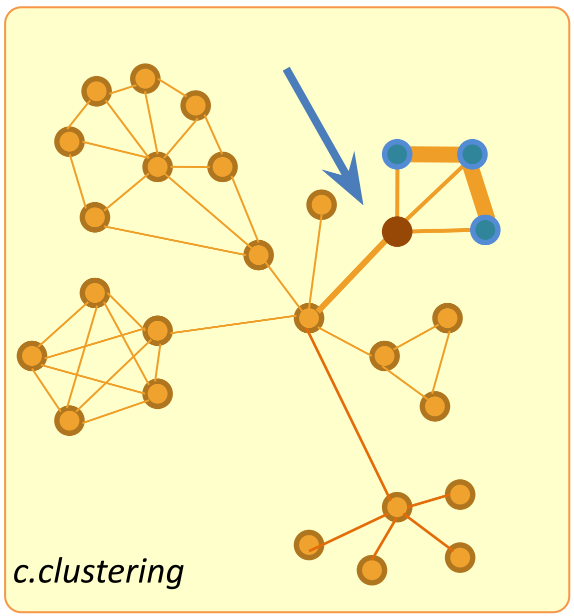


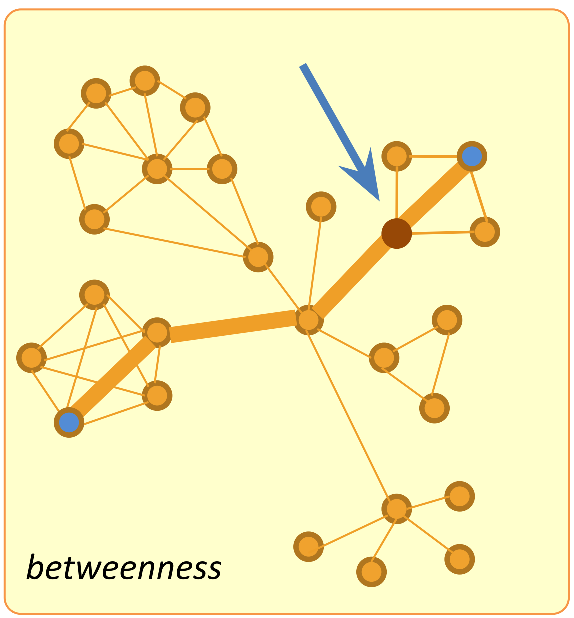
Propiedades topológicas: entorno local/global

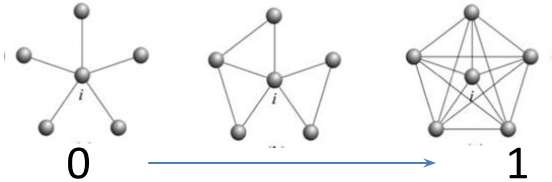
Propiedades Locales
grado
coef. Clustering
centralidad 'random walk'
…

Propiedades Globales
betweenness
centralidad de autovalores adyacencia
cercania
…









$$be(v) = \sum_{s \neq t \neq v} \frac{\sigma_{s,t}^{shortest-path}(v)}{\sigma_{s,t}^{shortest-path}}$$

Centralidad

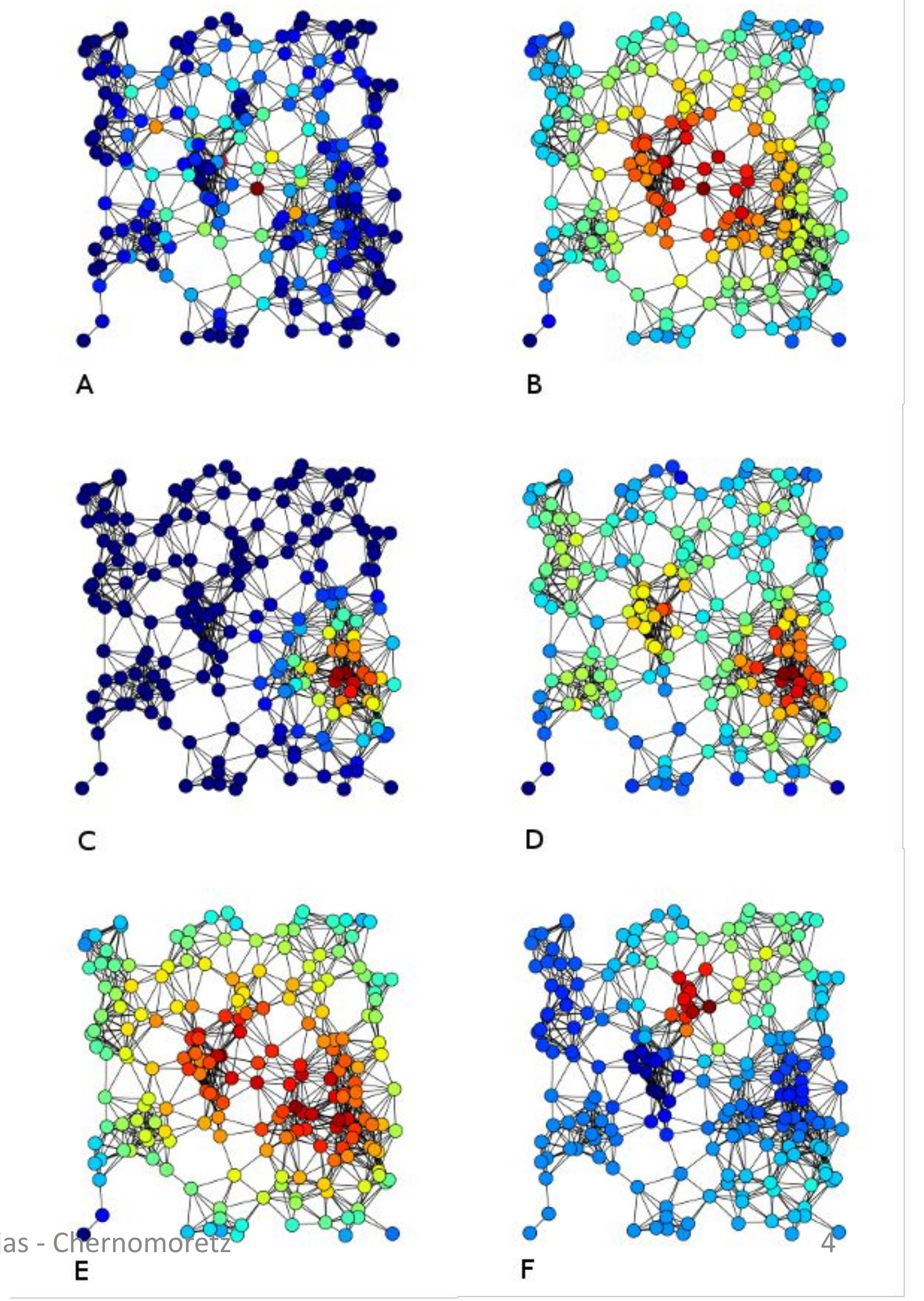
Dime qué modelas con tu red y te diré **qué es ser importante**

Dos dimensiones que pueden ser relevantes:

. Noción de **flujo** sobre la red

. Noción de **cohesividad** sobre la red

a. intermediatez
b. cercanía
c. autovalor
d. grado
e. centralidad armónica
f. centralidad de Katz



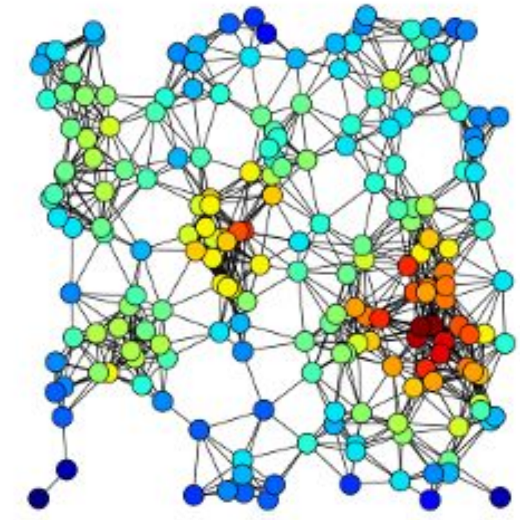
Centralidad y flujos

Dime qué modelas con tu red y te diré qué significa ser importante

- Flujo de ítems indivisibles que están en un único lugar a un dado tiempo. Su difusión es por transferencia. Puede haber casos en que:
  - Billetes, libros: se mueven por el grafo **sin restricciones** acerca de repetir enlaces o nodos ya visitados (i.e. *walks*)
  - Ropa usada, *re-gifting:* se mueven por el grafo **sin repetir enlaces** (i.e *trails*)
  - correo, gps: se mueven por el grafo desde un nodo origen hacia uno destino minimizando distancia recorrida (i.e. geodésicas).

- Flujo de entidades que pueden estar en varios lugares a la vez. Difusión por replicación.
  - Chismes: Transmisión boca-a-boca, en general no repite enlaces, pero si vértices (i.e. *trails*)
  - Campaña mailing: Transmisión por emisora (*broadcasting),* suele ser simultánea.
  - Ideas, creencias, modas, actitudes: influencia que se transmite boca-a-boca por replicación. Puede repetir enlaces (i.e. *walks*)
  - Procesos infecciosos, con inmunidad. Procede por replicación, pero sin revisitar vértices (i.e. *paths*).

Centralidad de **grado**



Utiliza directamente el **grado** de un nodo como medida de su importancia:

$$\mathrm{Cent}(n_i)=k_i$$

En términos de flujo:

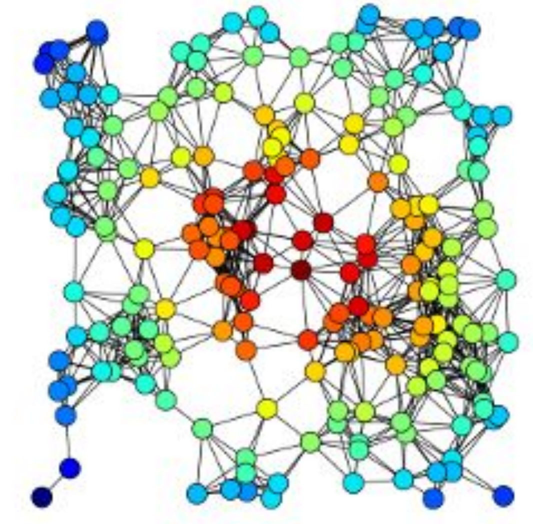
- \+ caracteriza efectos de influencia inmediata
- \+ razonable por ejemplo para aplicar en procesos de duplicación paralela (prob de recibir algo que está distribuido aleatoriamente por la res es proporcional al nro de contactos) o de caminatas al azar

Asume linealidad: un nodo con el **doble** de **vecinos** que otro tiene el **doble de importancia**

Sólo utiliza información **local**

Centralidad de **cercanía**

- Asume que los nodos más importantes son aquellos que pueden alcanzar fácilmente a más vecinos (están **cerca** de todos)



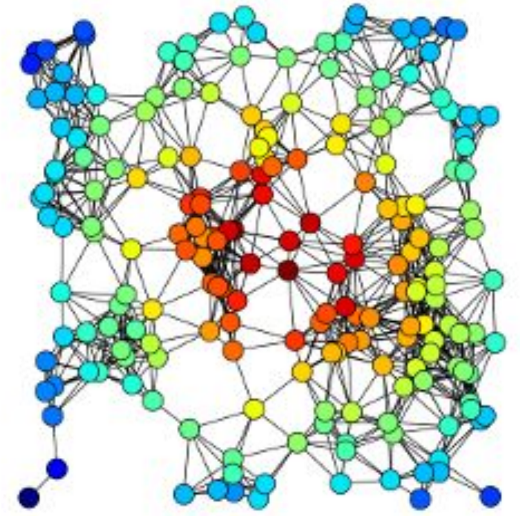
$$Closeness\ Centrality(n_i) = \left[\frac{\sum_{j \neq i} d_{geod}(n_i, n_j)}{N-1}\right]^{-1}$$

(sin vecinos) *0 ≤ ClosensessCentrality ≤ 1* (vecino de todos)

- nodos que en promedio reciben flujo transmitido por la red rápidamente:
  - red de flujo de información: ubicaciones ventajosas
  - red de contactos sexuales : ubicaciones riesgosas
  - en gral para flujos a lo largo de geodésicas o por duplicación en paralelo
  - no seria un buen indice para identificar, por ejemplo, quién recibirá info antes si el proceso de transmisión es tipo rumor (no va por caminos mas cortos)

Centralidad de **cercanía**

- Asume que los nodos más importantes son aquellos que pueden alcanzar fácilmente a más vecinos (están **cerca** de todos)



$$Closeness\ Centrality(n_i) = \left[\frac{\sum_{j \neq i} d_{geod}(n_i, n_j)}{N-1}\right]^{-1}$$

(sin vecinos) $0 \leq ClosensessCentrality \leq 1$ (vecino de todos)

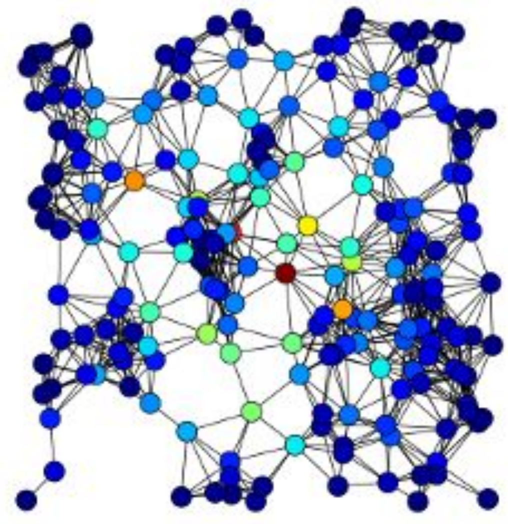
- En general tiene un rango dinamico chico (distancias geodésicas son chicas 1< d_{geod}< o(log N))
- No está bien definido para redes con más de una componente.
- Aún si calcularamos cada componente por separado no es trivial dar un ordenamiento global (centralidad en componentes más chicas tiende a ser mayor)

$$Harmonic\ Closeness\ Centrality(n_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \frac{1}{d_{geod}(n_i, n_j)}$$

- Bien definido aún para redes con más de una componente.
- Se le da más peso a entorno local

Centralidad de **intermediatez (*betweenness*)**

Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intecambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.



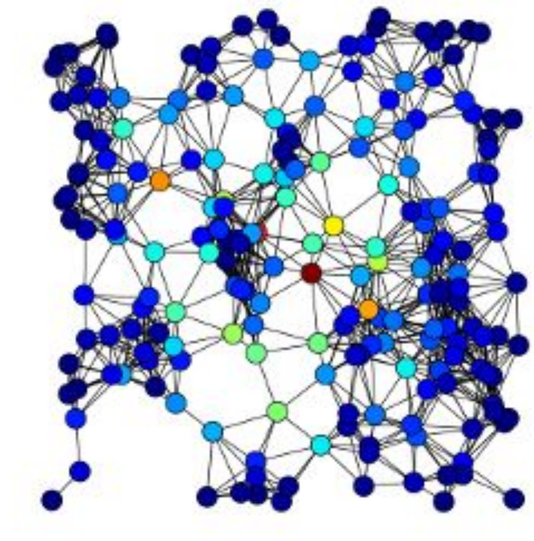
$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x^{i}{}_{rs}}{x_{rs}}$$

nro de geodésicas entre *r* y *s* que pasan por *i*

nro de geodésicas entre *r* y *s*

Centralidad de **intermediatez (*betweenness*)**

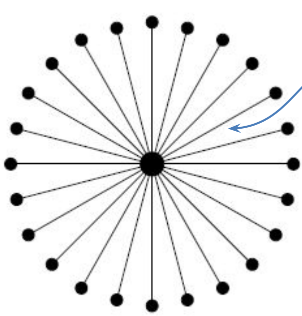
Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intecambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.



$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x^i{}_{rs}}{x_{rs}}$$

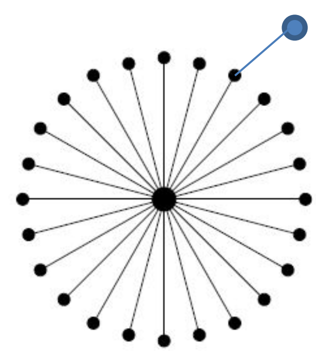
nro de geodésicas entre *r* y *s* que pasan por *i*

nro de geodésicas entre *r* y *s*



$$bet_{max} = n^2 - (n-1)$$

Participa en la geodesica de todos los pares menos en la de los n-1 perifericos consigo mismos

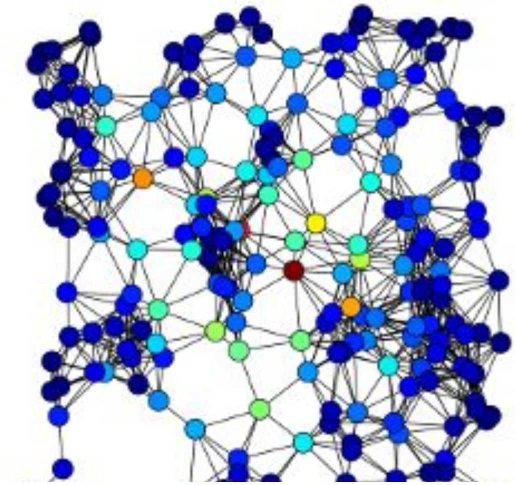


$$bet_{min} = 2n - 1$$

Participa en las geodesicas (ida y vuelta) del azul con el resto 2(n-1) mas la del azul consigo mismo.

Centralidad de **intermediatez (*betweenness*)**

Si hay un intercambio global de mensajes entre **todos los pares** de nodos de la red y si la información se intecambia por **geodésicas**: el nodo por el que pasarán más mensajes es aquél por el que pasan la mayor cantidad de geodésicas de la red.



$$bet(n_i) = \sum_{r,s} \frac{x^i{}_{rs}}{x_{rs}}$$

nro de geodésicas entre *r* y *s* que pasan por *i*

nro de geodésicas entre *r* y *s*

$$bet_{min} = 2n - 1$$

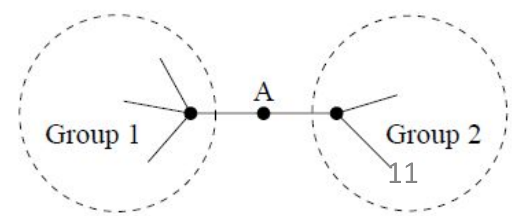
$$bet_{max} = n^2 - (n-1)$$

$$\frac{bet_{max}}{bet_{min}} \sim \frac{1}{2} n$$

(amplio rango dinámico)

Es una medida global

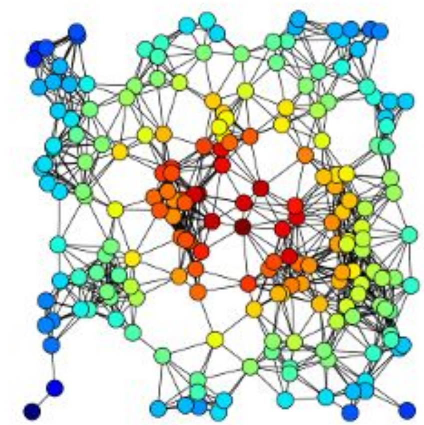
Es una medida de intermediatez más que de conectividad



Centralidad de **autovalor**

Nodos importantes tienen **vecinos** importantes

- Importancia de nodo-i (x_i) depende de importancia de nodo-j vecino (x_j).
- La importancia se *transmite* por la red asumiendo linealidad



$$x_i \sim \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$ es un autovector de $\boldsymbol{A}$ $\lambda \boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{x} = 0$$

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Ec autovalores de *A*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$$

$\mathbf{U}$ matriz de autovectores como columnas

$\boldsymbol{\Lambda}$ matriz autovalores en diagonal

Pero… la matriz A tiene N autovalores/autovectores… **cual de todos** ellos me da el campo de centralidad que busco?

$$\lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = A \boldsymbol{v}_\alpha$$

$\alpha = 1, \ldots, N$

Otra manera de encontrar **direcciones especiales**

$$\lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = A\boldsymbol{v}_\alpha$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

Pensemos iterativamente…

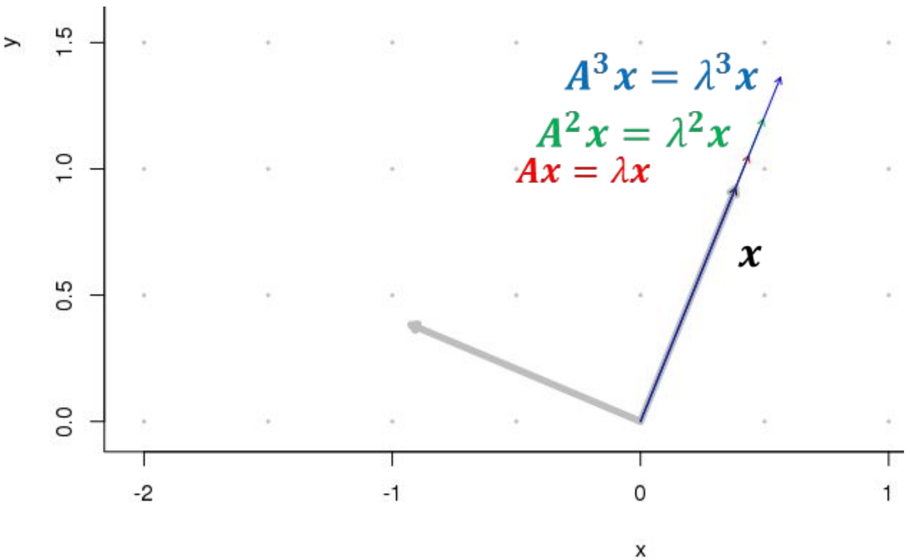
si $\boldsymbol{x}$ inicial fuera justo un **autovector**, por ejemplo $\boldsymbol{v}_i$, de la matriz de adyacencia $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}(s) = \overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\dots\boldsymbol{A}}^{s}\,\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}^s\boldsymbol{x}(0)$$



Si $x(0) = \boldsymbol{v}_\alpha$

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\lambda}_\alpha^S \boldsymbol{v}_\alpha$$

Otra manera de encontrar **direcciones especiales**

$$\lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = A\boldsymbol{v}_\alpha$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

Sea x un vector cualquiera:

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}^s \boldsymbol{x}(0)$$

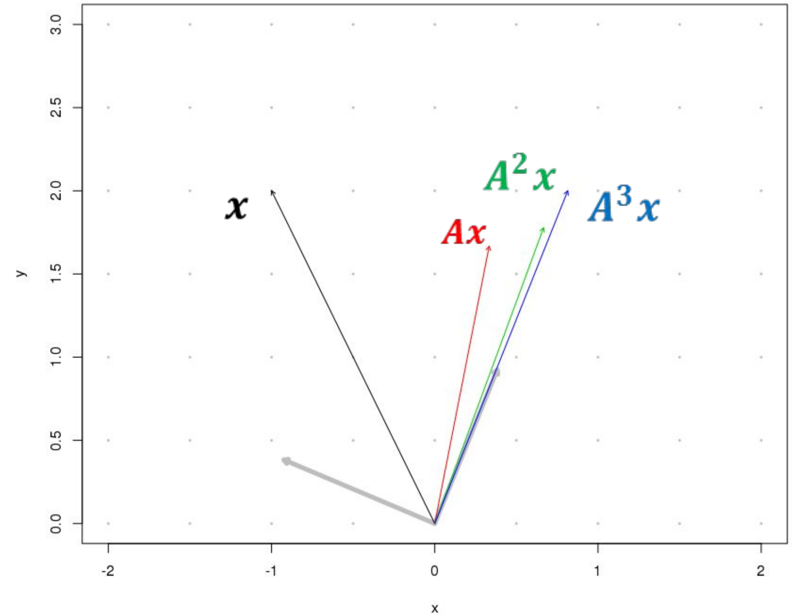
En el caso general ***x(0)*** no coincide con una dirección privilegiada asociada con ***A*** ….

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \boldsymbol{A}^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i {\lambda_i}^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

$$= {\lambda_*}^s \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_*}\right)^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

Autovalor dominante



$$\boldsymbol{x}(s) = {\lambda_*}^s \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_*}\right)}^{<1}{}^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(s) \sim {\lambda_*}^s c_i \boldsymbol{v}_*}$$

$$s \to \infty$$

Todo campo inicial x(0) converge a $\boldsymbol{v}_*$ asintoticamente…este es el que estamos buscando !

Centralidad de **autovalor**

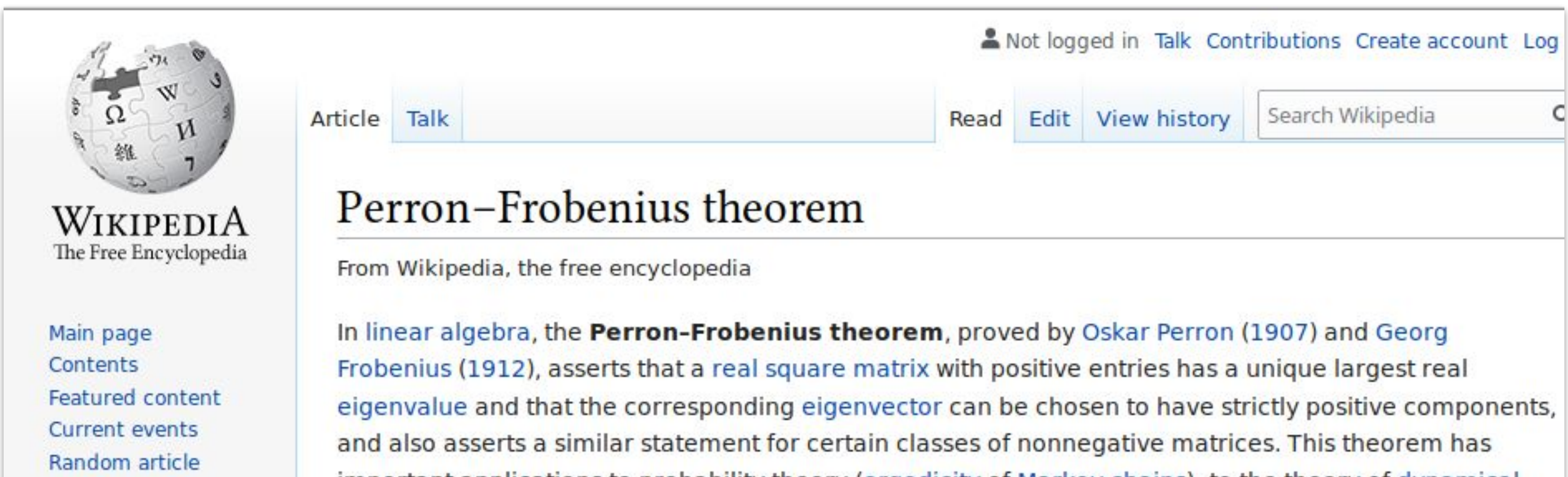
$$\boxed{\boldsymbol{A x^*} = \lambda_* \, \boldsymbol{x}^*}$$

x se conoce como **centralidad de Bonacich**

$$x_i{}^* = \frac{1}{\lambda_*} \sum_i A_{ij} \, x_j{}^*$$

La centralidad de un nodo depende de la de sus vecinos.

Es ***x**** una buena centralidad? Quien me asegura que sus componentes sean todas positivas, por ejemplo? o que el subespacio asociado al mayor autovalor no este degenerado?


Not logged in Talk Contributions Create account Log

Article Talk Read Edit View history Search Wikipedia

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Main page
Contents
Featured content
Current events
Random article

Perron–Frobenius theorem

From Wikipedia, the free encyclopedia

In linear algebra, the **Perron-Frobenius theorem**, proved by Oskar Perron (1907) and Georg Frobenius (1912), asserts that a real square matrix with positive entries has a unique largest real eigenvalue and that the corresponding eigenvector can be chosen to have strictly positive components, and also asserts a similar statement for certain classes of nonnegative matrices. This theorem has important applications to probability theory (ergodicity of Markov chains); to the theory of dynamical

Centralidad de **autovalor**

$$\boldsymbol{Ax}^* = \lambda_* \, \boldsymbol{x}^*$$

x se conoce como **centralidad de Bonacich**

$$x_i{}^* = \frac{1}{\lambda_*} \sum_i A_{ij} \, x_j{}^*$$

La centralidad de un nodo depende de la de sus vecinos.

Es ***x**** una buena centralidad? Quien me asegura que sus componentes sean todas positivas, por ejemplo? o que el subespacio asociado al mayor autovalor no este degenerado?

<u>Teorema de Perron-Frobenius</u>

Sea ***A*** una matriz de N x N con elementos no negativos. Entonces:

- ***A*** tiene **un unico** autovalor real dominante: $\lambda_1 > |\lambda_i|$ para $i = 2, \ldots, N$
- λ_1 corresponde a un autovalor para el que se puede elegir un autovector cuyas **componentes son no-negativas**
- Además vale que λ_1 está acotado por la mínima y máxima suma por columna de ***A***

$$min_j \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \right) \leq \lambda_1 \leq max_j \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \right)$$

Centralidad de **autovalor**

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \lambda_* \, \boldsymbol{x}^*$$

x se conoce como **centralidad de Bonacich**

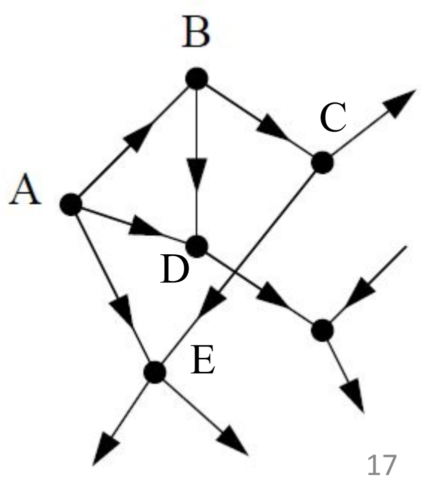
$$x_i{}^* = \frac{1}{\lambda_*}\sum_i A_{ij}\, x_j{}^*$$

La centralidad de un nodo depende de la de sus vecinos.

Para redes dirigidas (***A*** matriz no simétrica) se usa la misma definición de centralidad. Esto equivale a considerar el autovector-por-derecha de mayor autovalor.

Sin embargo puede haber problemas:

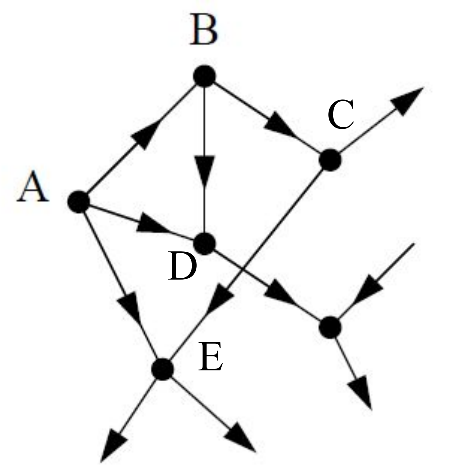
- x_A no tiene vecinos, entonces $x_A=0$
- pero también $x_B=0, x_C=0, x_D=0, x_E=0$



Sólo nodos de una **componente fuertemente conexa** de dos o más vértices (o la **out-component** de dicha componente) pueden tener centralidad de Bonacich no nula. Potencial problema (!)

Centralidad de **Katz**

centralidad de base.
Gran diferencia para nodos
con $k_{in}=0$



$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + \beta$$

Matricialmente

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \beta \boldsymbol{1}$$

$$(\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \beta \boldsymbol{1}$$

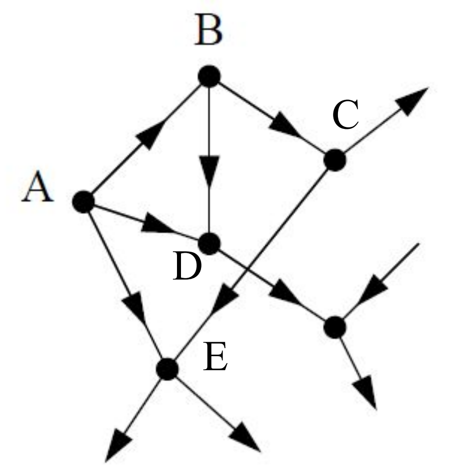
$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \beta \boldsymbol{1}$$

Usualmente se toma β=1 y se debe especificar α, que controla la importancia relativa del primer término respecto del segundo

Centralidad de **Katz**

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + 1$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \mathbf{1}$$



Se debe especificar α , como lo elijo?

- α =0 resulta en distribución uniforme de centralidad
- α>0 le doy más peso al primer término
- **PERO OJO:** para algún α > 0 la matriz ***I***- *α* ***A*** puede no ser invertible. Esto sucede cuando $det(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{A}) = 0$, o lo que es lo mismo, cuando:

$$det(\boldsymbol{A} - \alpha^{-1}\boldsymbol{I}) = 0 \xrightarrow{\alpha^{-1} = \lambda} det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

La condición para identificar α problematicos esta **asociada** a la ecuación de autovalores para ***A*** (!)

Para α creciente el *primer* problema lo encuentro cuando $\alpha^{-1} = \lambda_*$

Por lo tanto, se suele elegir α en el rango $0 < \alpha < 1/\lambda_*$

Centralidad de **Katz**

Estimación de centralidad

	Algebraica:	Iterando:	
	$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \beta \mathbf{1}$	$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta$	
Costo computacional	$o(n^3)$	o(M.r)	M:#enlaces, i.e. items no nulos de ***A*** r: #iteraciones

Centralidad de **Katz generalizada**

Asignamos una relevancia-a-priori, que puede ser diferente para cada nodo, utilizando **información externa a la red**

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$$

$$x_i{}^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j{}^{(t)} + \beta_i \qquad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

Centralidad **PageRank**

Katz generalizado:

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

Un posible problema: nodos con **alta centralidad** distribuyen ese valor (**alto**) a todos sus contactos k_{out}. Quizas no sea eso lo que uno quiere.

'diluye' la contribución del nodo-j

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

Centralidad **PageRank sin bias**

$$x_i^{(t+1)} = \cancel{\alpha} \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \cancel{\beta_i}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x} \qquad [\boldsymbol{D}^{-1}]_{ii} = 1/k_i^{out}$$

- Estoy buscando el autovector de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}$ asociado a *λ=1*
- Para redes no-dirigidas es fácil ver que $x_j = k_j$ es la solución autoconsistente buscada. $k_i = \sum_j \frac{1}{k_j} A_{ij} k_j = \sum_j A_{ij}$ ✔
- O sea PageRank sin bias equivale a centralidad de grado.

Nota:

- para redes no dirigidas se puede demostrar (practica) que el autovalor dominante de AD^{-1} es 1, con autovector (k1,k2,…,kn)
- para redes dirigidas no. pero resulta o(1)

Centralidad **PageRank**

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta} \qquad \left[\boldsymbol{D}^{-1}\right]_{ii} = 1/k_i^{out}$$

$$(\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{x} = (\underline{\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}})^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

deja de ser
invertible cuando

$$det\left(\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\right) = 0$$

$$det\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\right) = 0$$

$$det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\right) = 0$$

$$\lambda = 1/\alpha$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1})^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

$$= (\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-1} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1})^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

$$= \left[(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-1}\right]^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\beta}}$$

razonando como antes $\alpha < 1/\lambda_{dominante}$ de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}$.
Pero vimos que $\lambda_{dominante} = 1$
$0 < \alpha < 1$....se suele usar $\alpha = 0.85$

Centralidades de recurrencia (resumen)

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\boldsymbol{x} = \lambda_*^{-1} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

Eigenvector (Bonacich) centrality

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

Katz centrality

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{x}$$

Degree centrality

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

PageRank centrality

Conectores (*hubs*) y Autoridades

- Hasta ahora, en **redes dirigidas**, los algoritmos que vimos asignaban más nivel de **centralidad** a aquellos nodos que **recibían** muchas conecciones

- Puede ser de interés, sin embargo, identificar nodos que actúen como buenos *reviews.* Implica idea de centralidad asociada con k_{out} hacia nodos relevantes (e.g. página con links hacia otras páginas relevantes)

Idea [Kleinberg, Authoritative Sources in a Hyperlinked Environment, 1999 10122 citas)]: Generalizar la centralidad de Bonacich y permitir que cada nodo tenga dos atributos

1. **Autoridad**: que tanto conocimiento, información, etc, tiene un nodo respecto a un tema
2. **Conectividad (*hubiness*)**: que tanto un nodo es capaz de encontrar información sobre un tema

En este esquema:

- Los nodos son caracterizados <u>simultáneamente</u> como **conectores** y **autoridades**
- Los mejores conectores apuntan a las mejores autoridades
- Algoritmo HITS (*Hyperlink-induced topic search*)

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j \qquad\qquad y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$$

pero entonces

$$\boldsymbol{x} = (\alpha\beta) \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = (\alpha\beta) \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \lambda\, \boldsymbol{y}$$

con $\lambda=\alpha\beta$

fijarse ademas que:

- $\boldsymbol{AA^T}$ es la matriz de co-citas, por lo que la **centralidad de autoridad** puede verse como **centralidad de autovector de la red de co-citas**

- $\boldsymbol{A^TA}$ es la matriz bibliográfica, por lo que la **centralidad de conectividad** puede verse como **centralidad de autovector de la red bibliográfica**

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j \qquad\qquad y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$$

pero entonces

$$\boldsymbol{x} = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{y}$$

con $\lambda=\alpha\beta$

fijarse ademas que:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}\right) = \lambda(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x})$$

por lo que $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x})$ o sea, basta con resolver la ecuacion de autovalores de $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}$

Conectores (*hubs*) y Autoridades

Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j \qquad\qquad y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$$

pero entonces

$$\boldsymbol{x} = (\alpha\beta) \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = (\alpha\beta) \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \lambda\, \boldsymbol{y}$$

con $\lambda=\alpha\beta$

- $\boldsymbol{AA^T}$ es una matriz simétrica, semi-definida positiva, por lo que sus autovalores son mayores que cero.
- De hecho, sus autovalores son los valores-singulares de ***A*** elevados al cuadrado
- Perron-Frobenius: el autovector del autovalor dominante tiene componentes no-negativas

Conectores (*hubs)* y Autoridades

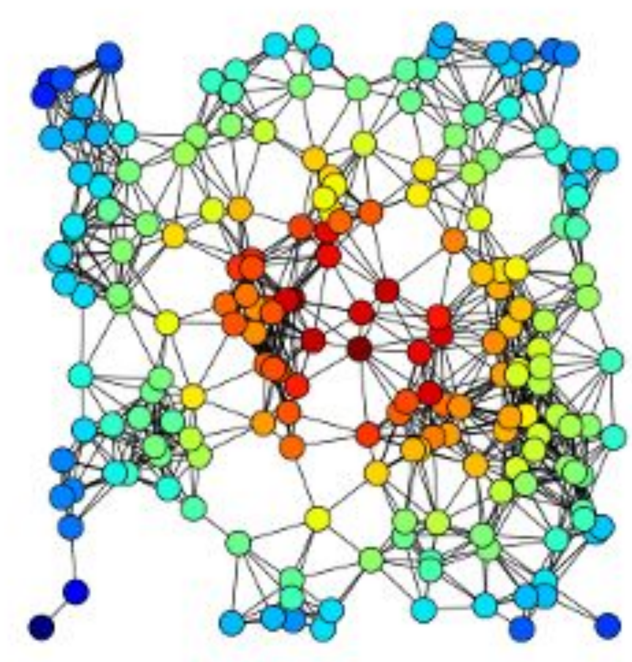
Para un nodo, dos centralidades: x_i (autoridad), y_i (conector)

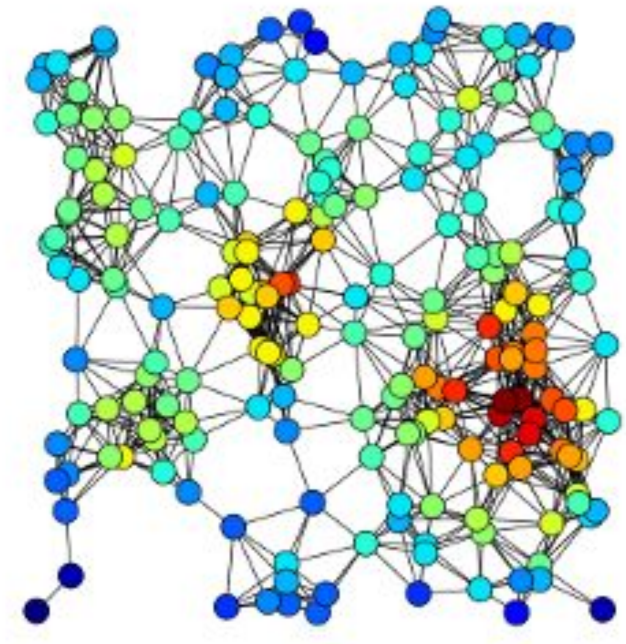
$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} y_j \qquad\qquad y_i = \beta \sum_j A_{ji} x_j$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$$

Esta generalización admite modificaciones como las que vimos: un termino aditivo, dividir por el grado, etc…

Que significa ser **importante**?





Noción de **flujo** sobre la red

Noción de **cohesividad** sobre la red

Dime qué modelas con tu red y te diré qué es ser importante

	Transferencia	Duplicación	
		serial	paralela
Walks	billete		creencias
Trail	ropa vieja	rumor	campaña email
Path	viajante comercio	infección viral	
Geodésica	correo		-

Centralidad de **autovalor**

Nodos importantes tienen **vecinos** importantes

- x_i (importancia de nodo-i) depende de x_j (importancia de nodo-j vecino). La importancia se *transmite* por la red.
- la manera más simple es asumir linealidad

$$x_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- el nivel de importancia se establece recursivamente en la red

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\vdots$$

Despues de ***s*** iteraciones: $\boldsymbol{x}(s) = \overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\ldots.\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{s}}\,\boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}^{s}\boldsymbol{x}(0)$$

Centralidad de **autovalor**

- **Nodos** importantes tienen **vecinos** importantes

- x_i (importancia de nodo-i) depende de x_j (importancia de nodo-j vecino). La importancia se *transmite* por la red.
- la manera más simple es asumir linealidad

$$x_i{}' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- el nivel de importancia se establece recursivamente en la red

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\vdots$$

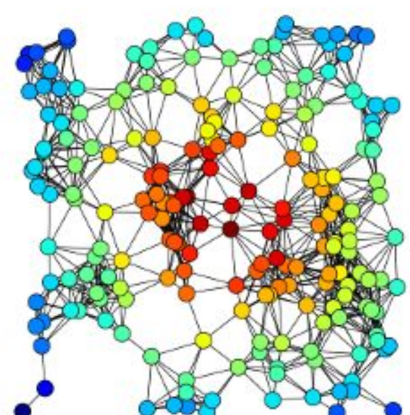
Despues de ***s*** iteraciones: $\boldsymbol{x}(s) = \overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\ldots.\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{s}}\,\boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}^s \boldsymbol{x}(0)$$

$\boldsymbol{x}$ solución autoconsitente

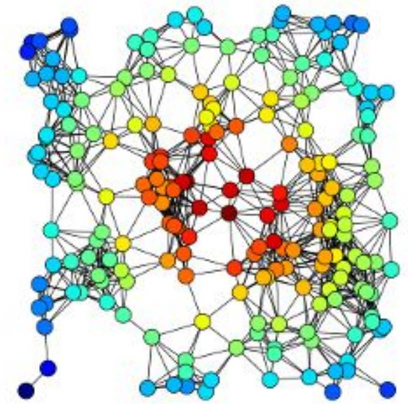
$$\boldsymbol{\lambda x} = \boldsymbol{A}^s \boldsymbol{x}$$

s>>1



$\boldsymbol{x}$ es un autovector de $\boldsymbol{A^s}$

Centralidad de **autovalor**



Busco x solución autoconsitente

$$x(s) = A^s x(0)$$

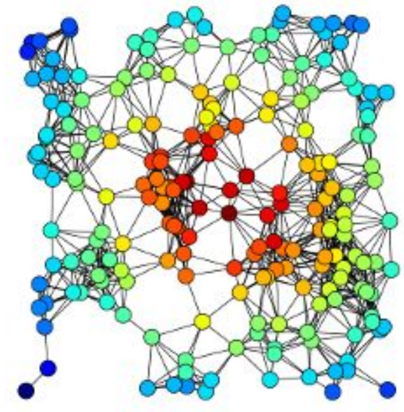
$$\lambda x = A^s x$$

$x \epsilon \mathbb{R}^N$ es un autovector de A^s de autovalor λ

Para ganar (recordar) intuicion geometrica…caso 2D

mathlets.org/mathlets/matrix-vector

Centralidad de **autovalor**



Busco $\boldsymbol{x}$ solución autoconsitente

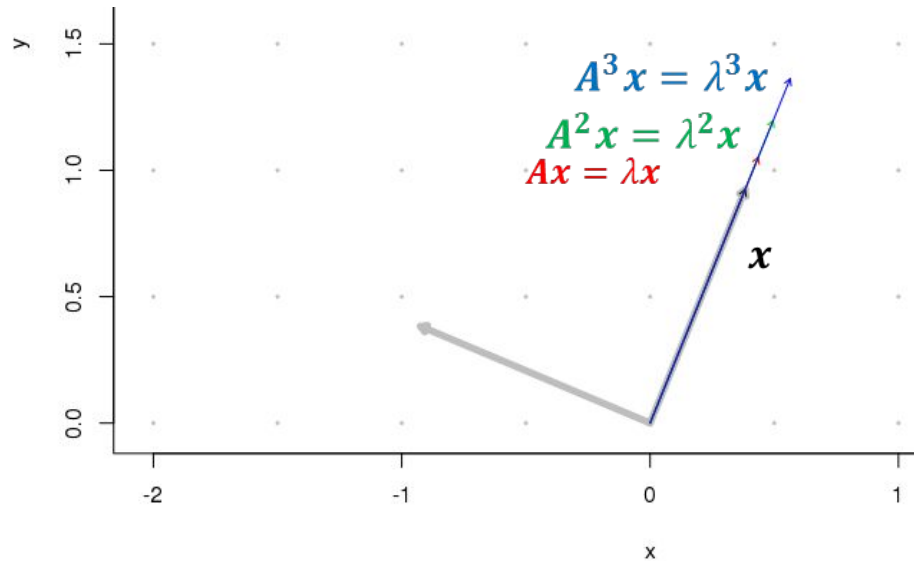
$$\boldsymbol{x(s) = A^s x(0)}$$

Si inicialmente arranco de un autovector: $x(0)=\boldsymbol{v}_k$

$$\boldsymbol{x}(s) = \overbrace{\boldsymbol{AA\,....\,A}}^{\boldsymbol{s-1}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \overbrace{\boldsymbol{AA\,....\,A}}^{\boldsymbol{s-1}}\ \boldsymbol{v}_k$$

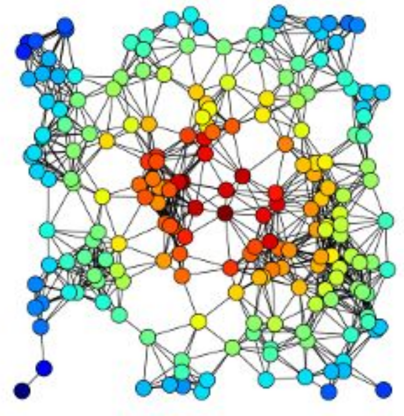
si $\boldsymbol{x}$ inicial fuera justo un **autovector**, por ejemplo $\boldsymbol{v}_k$, de la matriz de adyacencia $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{x}(s) = {\lambda_k}^{s}\ \boldsymbol{v}_k$$



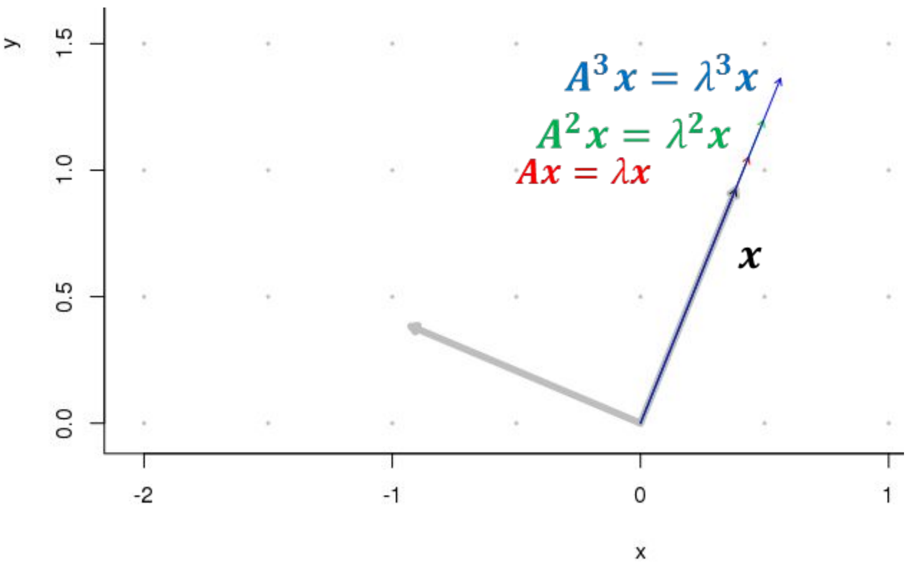
Por lo que la **importancia relativa** de cada nodo se podría inferir de las componentes de $\boldsymbol{v}_k$

Centralidad de **autovalor**

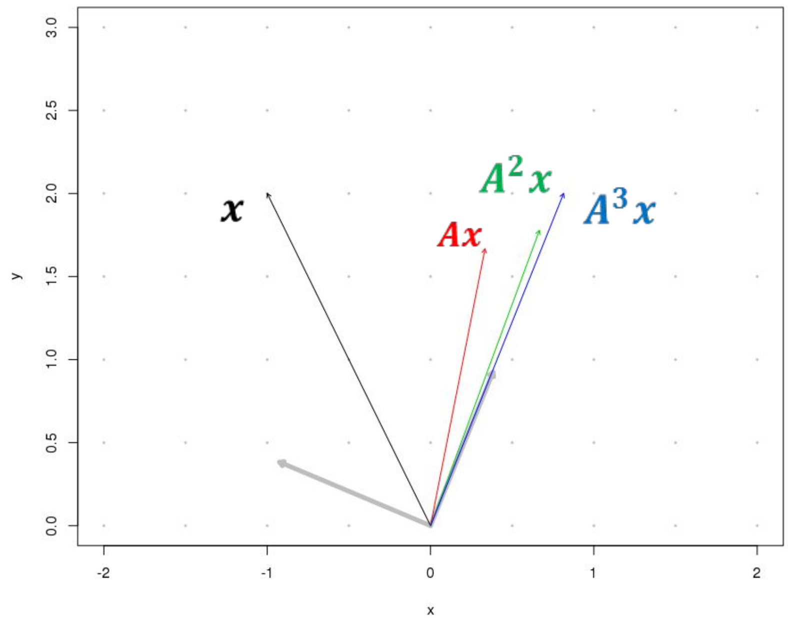


$$x(s) = A^s x(0)$$

si ***x*** inicial fuera justo un **autovector**, por ejemplo $\boldsymbol{v}_k$, de la matriz de adyacencia ***A***

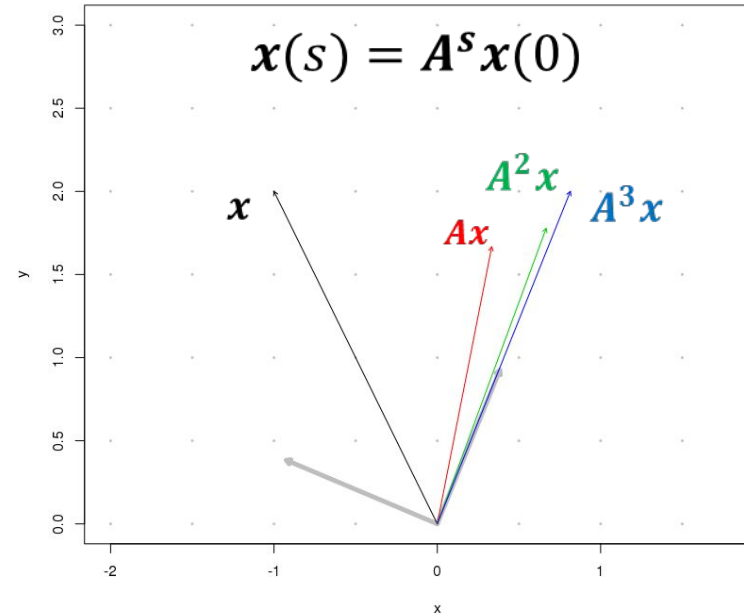


En el caso general ***x(0)*** no coincide con una dirección privilegiada asociada con ***A*** ….



Centralidad de **autovalor**

Para ver como una **matriz** transforma vectores es útil pensar en término de sus **autovectores** $\boldsymbol{v}_i$ (se transforman muy fácil: **A v**$_i$=λ_i **v**$_i$). El vector $\boldsymbol{x}(0)$ puede ser escrito como combinación lineal de los $\{\boldsymbol{v}_i\}$



$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \boldsymbol{A}^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} c_i {\lambda_i}^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = {\lambda_*}^s \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_*}\right)^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

mayor autovalor

$$\boldsymbol{x}(s) = {\lambda_*}^s \sum_{\boldsymbol{i}} c_i \Big(\overbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_*}}^{<1}\Big)^s \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$$

encontrar $\boldsymbol{x}$ autoconsistente se reduce a encontrar el autovector de $\boldsymbol{A}$ asociado al mayor autovalor

$$\boldsymbol{x}(s) \sim {\lambda_*}^s c_i\, \boldsymbol{v}_*$$
$$s \to \infty$$

$$\boxed{\boldsymbol{Ax} = \lambda_*\, \boldsymbol{x}}$$

Retomando…

- Centralidad de autovalor

Nodos importantes tienen **vecinos** importantes

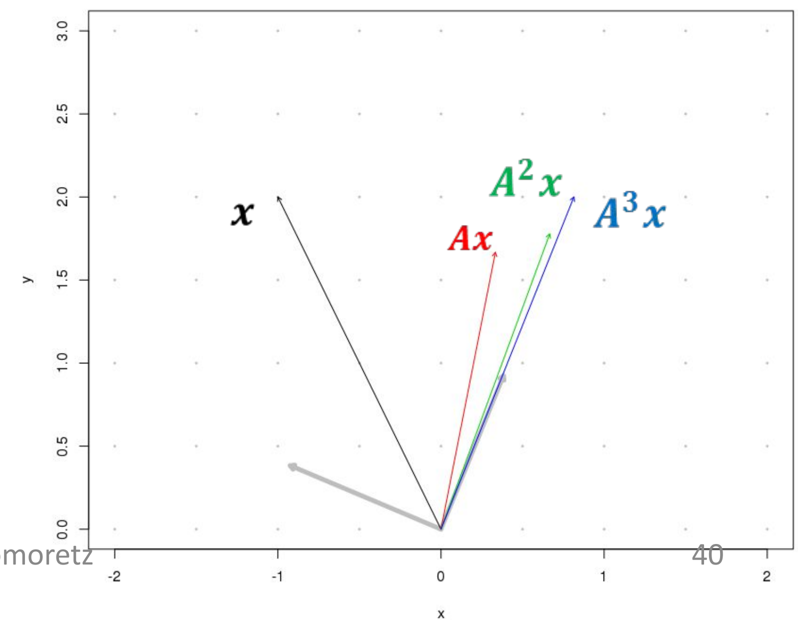
- x_i (importancia de nodo-i) depende de x_j (importancia de nodo-j vecino).
- La importancia se *transmite* por la red.
- la manera más simple es asumir linealidad

$$x_i{}' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \lambda_* \, \boldsymbol{x}^*}$$

Autovector del autovalor dominante de ***A***

X* se conoce como **centralidad de Bonacich**



Retomando…

- Centralidad de autovalor (Bonacich)

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \lambda_* \, \boldsymbol{x}^*}$$

- Centralidad de Katz generalizada

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i \qquad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$0 < \beta_i < 1$

$0 < \alpha < 1/\lambda_*$

Centralidad **PageRank**

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta} \qquad\qquad [\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}]_{ii} = 1/k_i^{out}$$

$$(\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\beta}$$

$$= (\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}} - \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\beta}$$

$$= \left[(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\right]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\beta}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\beta}}$$

razonando como antes $\alpha < 1/\lambda_{dominante}$ de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}$.
igual….se suele usar α=0.85

Centralidades de recurrencia (resumen)

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j^{\,out}} A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

PageRank centrality

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j \frac{1}{k_j^{\,out}} A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{x}$$

Degree centrality

$$x_i^{(t+1)} = \alpha \sum_j A_{ij} x_j^{(t)} + \beta_i$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

Katz centrality

$$x_i^{(t+1)} = \sum_j A_{ij} x_j^{(t)}$$

$$\boldsymbol{x} = \lambda_*^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

Eigenvector (Bonacich) centrality