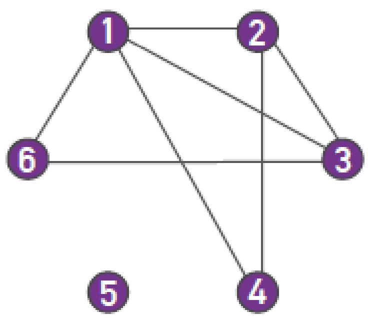
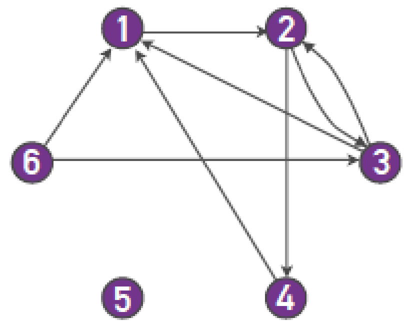
# Introducción a Redes Complejas en Biología de Sistemas

## Guía 2 – Conceptos Básicos

1) Sea **A** una matriz de adyacencia de N x N de una red no-dirigida, sin auto-loops. Sea **1** el vector columna de *N* elementos, todos igual a 1. $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)^T$ Usando el formalismo matricial escriba expresiones para
   a. El vector **k** cuyos elementos son los grados $k_i$ de todos los nodos $i=1,\ldots,N$
   b. El número total de enlaces *L*, de la red
   c. El número de triángulos *T* (i.e. tripletes de nodos conectados entre sí) de la red [hint: puede usar la traza de la matriz]
   d. El vector $\mathbf{k_{nn}}$ cuyo elemento i-ésimo es la suma de los grados de los vecinos del nodo-i.
   e. El vector $\mathbf{k_{nnn}}$ cuyo elemento i-ésimo es la suma de los segundos vecinos del nodo-i

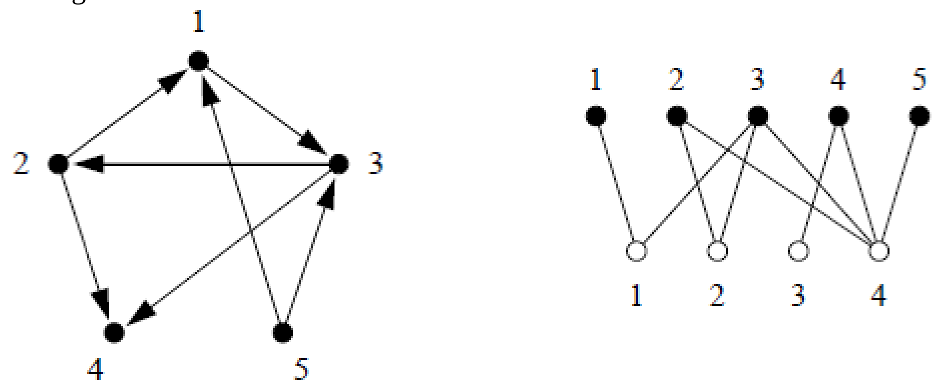
2) Dadas las redes de la figura




Encuentre:
   a. Las correspondientes matrices de adyacencia. Si en la red (a) se permutan las etiquetas 5 y 6, cómo se altera dicha matriz?
   b. El coeficiente de *clustering* medio de la red (a)
   c. Cuántos caminos existen en la red 1.a de longitud 3, que comiencen en el nodo-1 y terminen en el nodo-3?
   d. Determine el número de ciclos de longitud 4 que existen en ambas redes.

3) Considere las siguientes redes

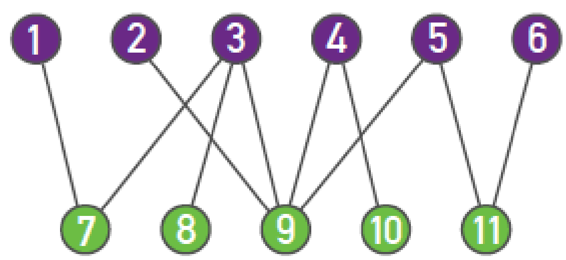



(a) (b)

Escriba

a. La matriz de adyacencia de la red (a)
b. La matriz de co-citas de la red (a)
c. La matriz de incidencia de la red (b)
d. La matriz proyección de la red (b) en los vértices oscuros.

4) Considere la siguiente red bipartita




a. Construya la matriz de adyacencia correspondiente. Explique por qué es diagonal en bloques.
b. Construya la matriz de adyacencia de sus dos posibles proyecciones.
c. Calcule el grado medio de cada tipo de nodos.
d. Calcule el grado medio en cada una de las redes proyectadas obtenidas previamente.

5) Considere una red bipartita de $N_1$ nodos tipo-1 y $N_2$ nodos tipo-2.

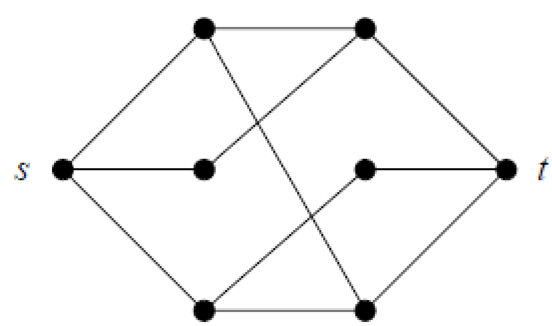
a. Cuál es el máximo número de enlaces $L_{max}$ que la red puede tener
b. Cúantos enlaces no pueden ocurrir si se lo compara con una red monopartita de $N= N_{1+} N_2$ nodos?
c. Si $N_1 << N_2$ qué sería posible afirmar respecto a la densidad de la red?
d. Muestre que los grados medios de los distintos tipos de nodos están relacionados según $\langle k_1 \rangle \, N_1 = \langle k_2 \rangle \, N_2$

6) Considere el conjunto de todos los caminos entre el nodo-i y el nodo-j en un grafo no dirigido de matriz de adyacencia **A.** Asigne a cada camino un peso $\alpha^r$ donde *r* es la longitud del camino.
   a. Muestre que la suma de los pesos de todos los caminos que conectan el nodo-i con el nodo-j está dada por $Z_{ij}$, el elemento ij de la matriz $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})^{-1}$
   b. Qué condición debe satisfacer α para que la suma converja?
   c. Muestre que la longitud del camino geodésico que separa al nodo-i del nodo-j, si existe, es: $l_{ij} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial \log(Z_{ij})}{\partial \log(\alpha)}$

7) Explique cuál es la diferencia entre un 2-componente y un 2-core. Esquematice una red pequeña que tenga un único 2-core y dos 2-componentes.

8) Considere el nivel trófico, $x_i$, de una especie en una red trófica (red dirigida), como el valor medio de los niveles tróficos de sus presas, más uno.
   a. Mostrar que $x_i$ resulta el elemento i-esimo del vector: $\mathbf{x} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}\,\mathbf{1}$
   b. La definición anterior no contempla correctamente el caso de especies que no posean presas, ya que el elemento correspondiente del vector **x** diverge. Usualmente se les suele asignar un valor trófico unidad. Sugiera una modificación al cálculo anterior para que asigne correctamente el nivel trófico a todas las especies.

9) Cuál es el tamaño *k* del conjunto de vértices de corte minimal entre los nodos *s* y *t* de la red?




Pruebe su resultado encontrando un posible conjunto de corte de tamaño *k* y un posible conjunto de *k* caminos independientes entre *s* y *t*. Por qué esto demuestra que el conjunto minimal de corte tiene tamaño *k*?