Guia 0 - Matrices

1. Notación de índices.

   a) Escribir explícitamente los elementos de las siguientes matrices de 3x3:

$$A_{ij} = \begin{cases} 5 & si \quad i = j \\ 2 & si \quad i < j \\ -2 & si \quad i > j \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j+1 \\ 0 & si \qquad no \end{cases} \qquad C_{ij} = j+3\,(i-1)$$

   b) Decidir si las siguientes expresiones son o no iguales siendo $\bar{\bar{A}}$ y $\bar{\bar{B}}$ dos matrices de $N \times N$ y $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores columna de N elementos. Corregir las expresiones incorrectas.

   1)
$$\sum_{i=1}^{N} A_{ij} x_i = \bar{\bar{A}}\vec{x}$$

   2)
$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \vec{x}^T \vec{y}$$

   3)
$$\sum_{l=1}^{N} A_{lj} B_{il} = \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$$

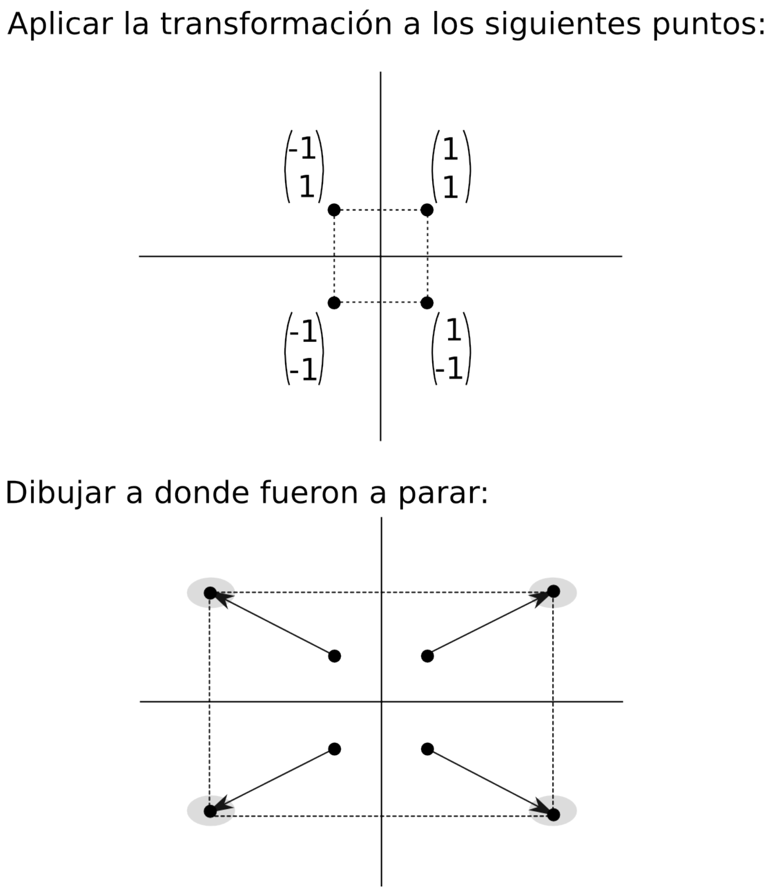
   4)
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} y_i x_j = \vec{x}^T \bar{\bar{A}}\vec{y}$$

   c) Escribir alguna expresión que describa a las siguientes matrices a partir de sus índices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Transformaciones Lineales

a) Mostrar graficamente el efecto de cada una de las transformaciones lineales representadas por las matrices que aparecen más abajo. Para esto:



(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcular el área de la figura que se forma luego de aplicar la transformación

c) Calcular el determinante de la matriz y comparar con el ítem anterior.

d) Decidir cuales operaciones pueden volverse para atrás (invertirse). Relacionar con el ítem anterior.

3. Diagonalización

a) Calcular los polinomios característicos de las matrices del ejercicio anterior y obtener sus raíces. ¿Cuántos autovalores distintos se obtienen en cada caso?

b) Calcular el producto de todos los autovalores y comparar con el valor del determinante.

c) Calcular la suma de todos los autovalores y compararlas con la suma de los elementos de la diagonal (la traza de la matriz)

d) Calcular todos los autovectores que sea posible para cada matriz y dibujar sus direcciones en los gráficos construidos para el ejercicio anterior. Interpretar.

e) ¿Qué ocurre si permitimos a las raices del polinomio característico ser complejas? ¿Pueden diagonalizarse matrices que antes no?