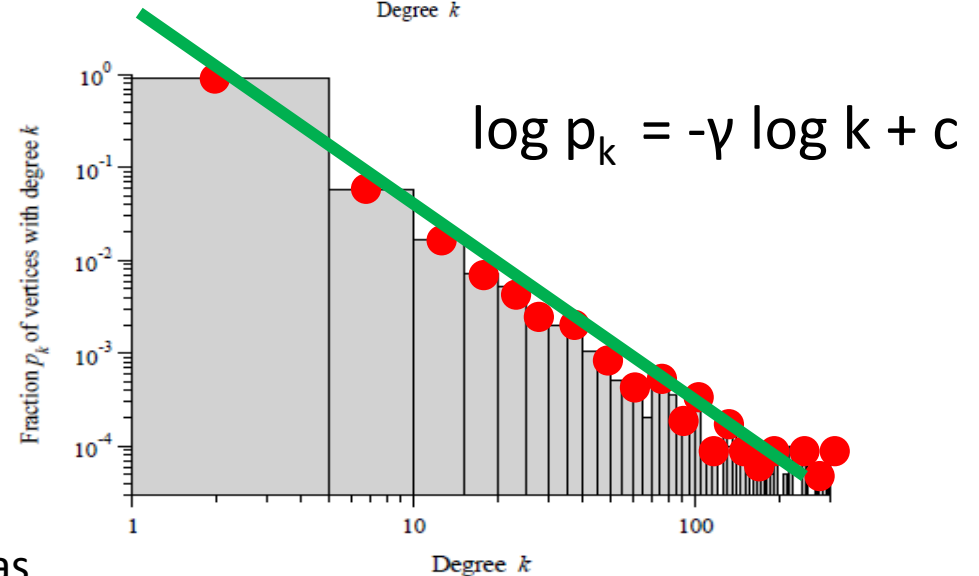
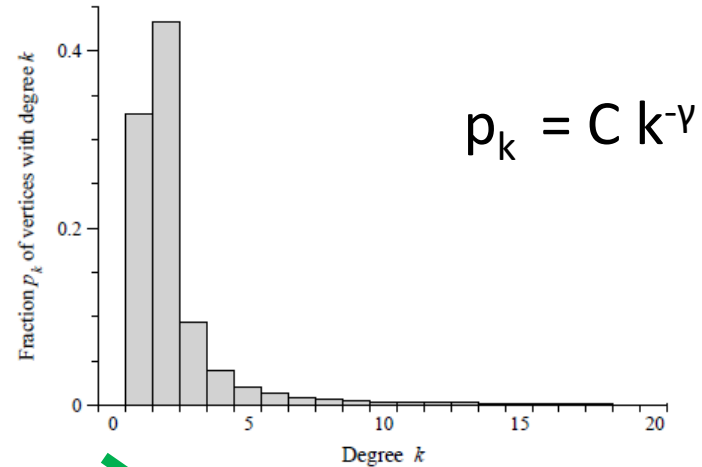
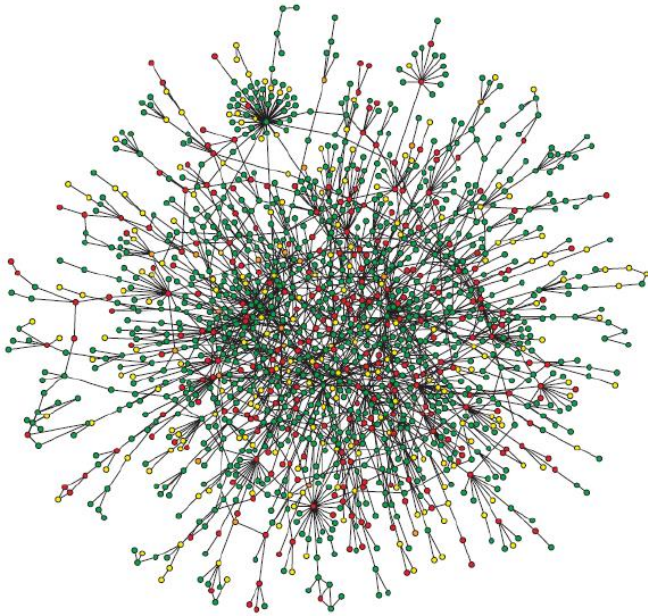


Propiedades de escala

Distribucion de grado



$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$

$$e^{\log p_k} = e^{-\gamma \log k + c}$$

$$p_k = k^{-\gamma} e^c$$

$$p_k = C k^{-\gamma} \quad \text{Ley de potencias}$$

Libre de escala

$$p_k = C k^{-\gamma}$$

$$f(x) \sim x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha f(x)$$

3A.

s, a predom-
rions (see ar-
ation of the
rapid drop
at has been
LO barriers,
t is obtained
y by d-char-
igin of this
tively small
ned. This is
dependence
ig effects on
; calculation
re Co-ALO
; also shown
rop can be
waves.

and in sev-
onstrate the
ecture of the
ng the spin
ns. The neg-
nterface has
cts between
is similar to

Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási* and Réka Albert

Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a **scale-free power-law distribution**. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary **scale-free distributions**, which indicates that the development of large networks is governed by **robust self-organizing phenomena** that go beyond the particulars of the individual systems.

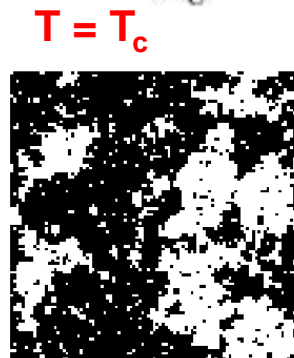
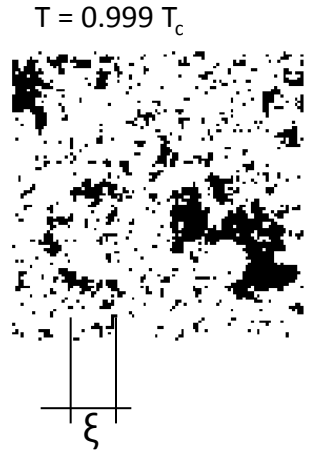
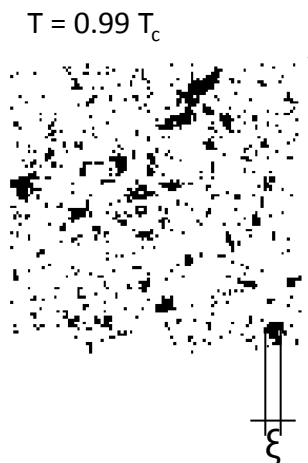
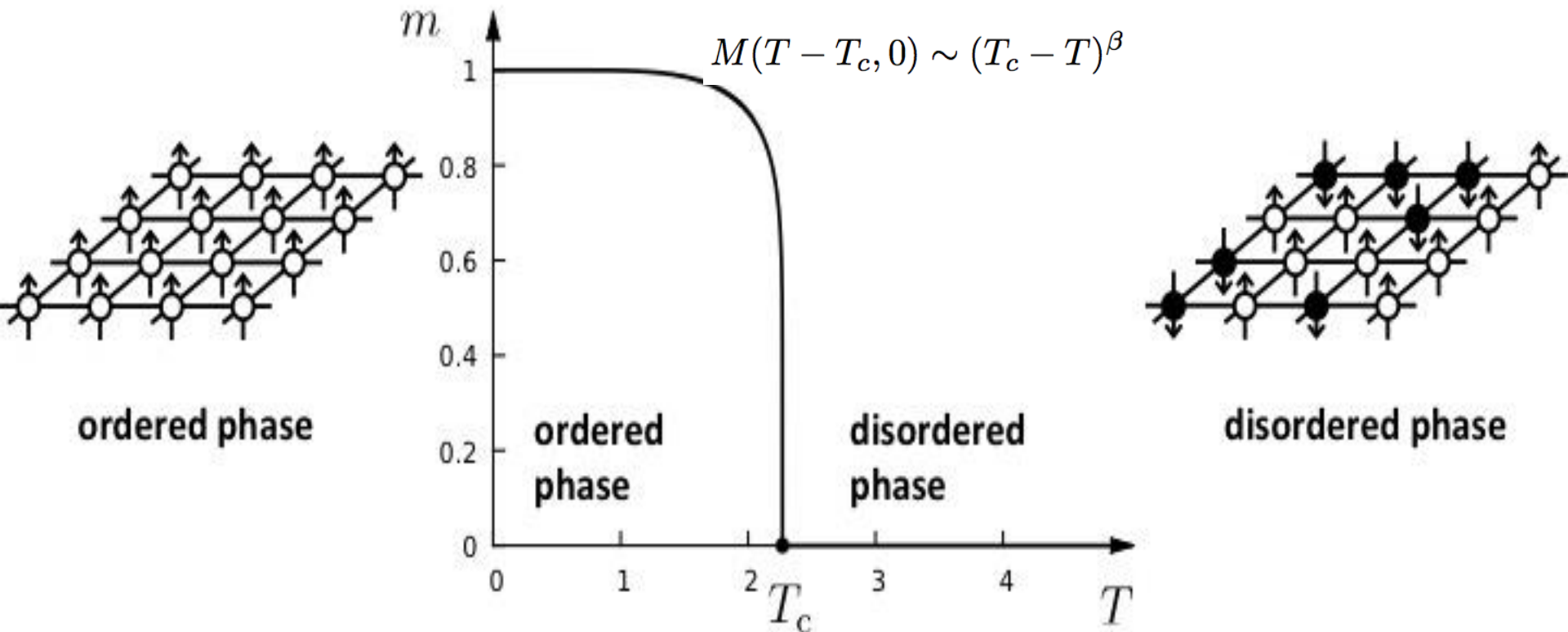
The inability of contemporary science to describe systems composed of nonidentical elements that have diverse and nonlocal inter-

Department of Physics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: alb@nd.edu

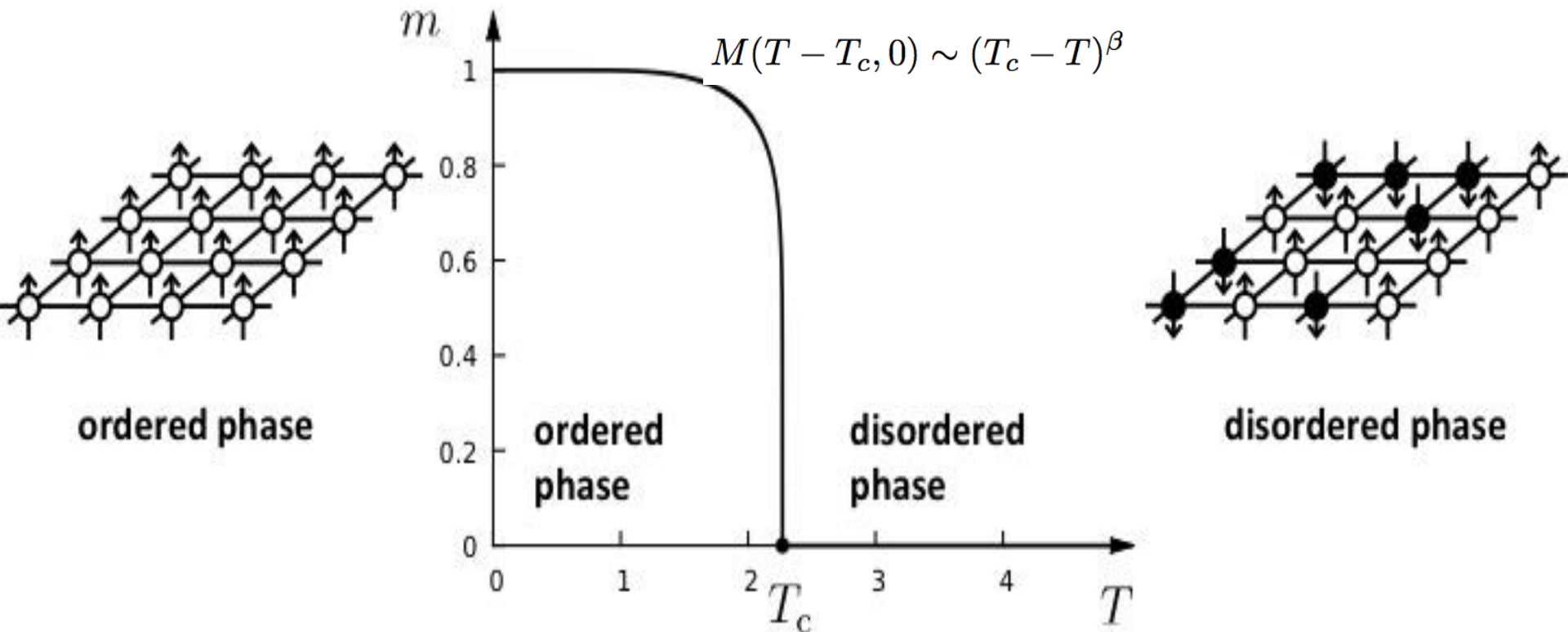
actions currently limits advances in many disciplines, ranging from molecular biology to computer science (*1*). The difficulty of describing these systems lies partly in their topology: Many of them form rather complex networks whose vertices are the elements of the system and whose edges represent the interactions between them. For example, liv-

Fenómenos críticos: materiales magnéticos

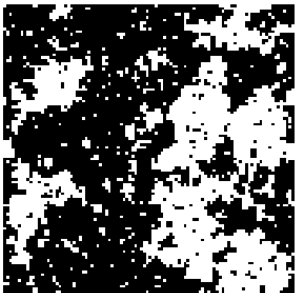


$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

Fenómenos críticos: materiales magnéticos



$T = T_c$

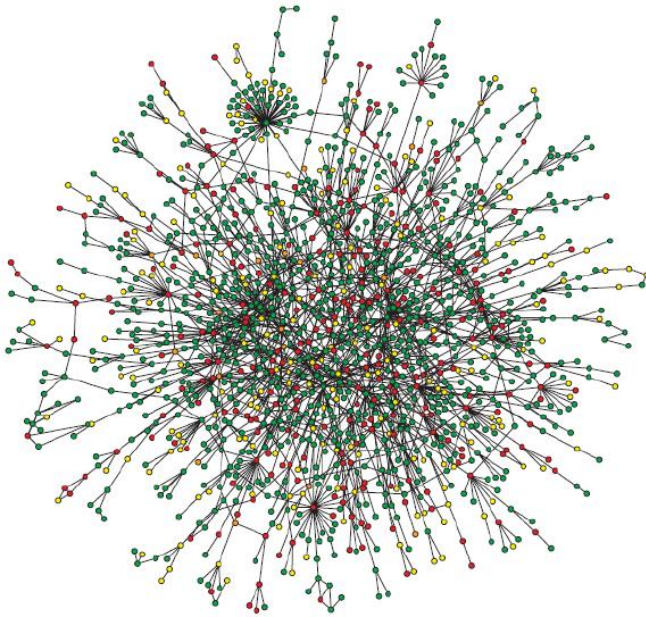


$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

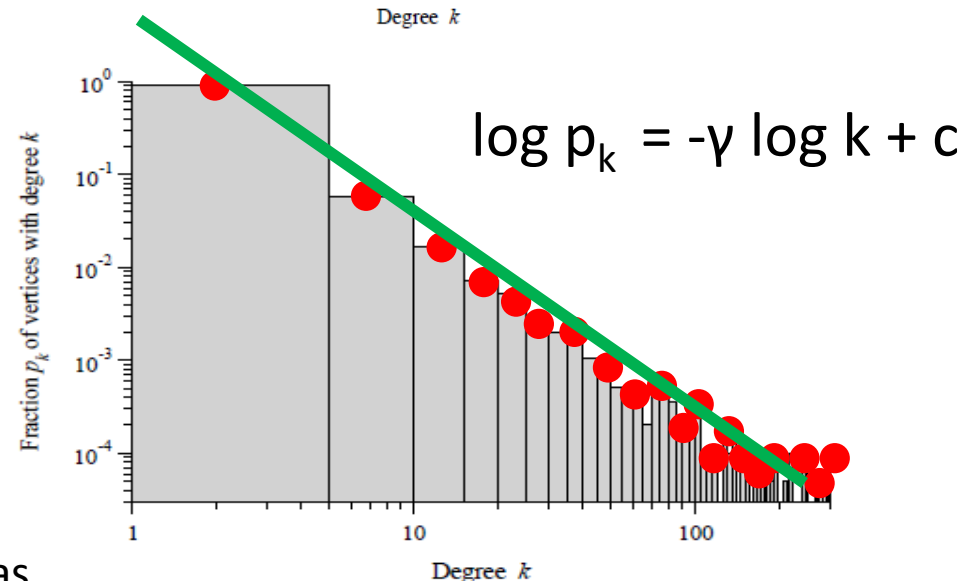
- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala:** distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad:** exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones

Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási* and Réka Albert



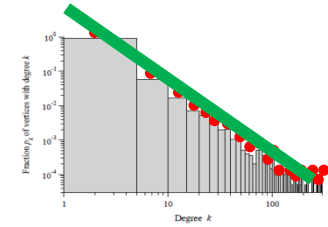
Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.



$$p_k = C k^{-\gamma} \quad \text{Ley de potencias}$$

Formalismo

$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



Discreto

Probabilidad de que un nodo tenga grado k

$$p_k = Ck^{-\gamma}.$$

Condición de normalización:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

$$C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} = 1$$

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}} = \frac{1}{\zeta(\gamma)},$$

$$p_k = \frac{k^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)}$$

Función zeta de Riemann ($\gamma > 1$)

Continuo

Para avanzar analíticamente asumimos que el grado de un nodo puede ser un número real

$$p(k) = Ck^{-\gamma}.$$

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} p(k) dk = 1$$

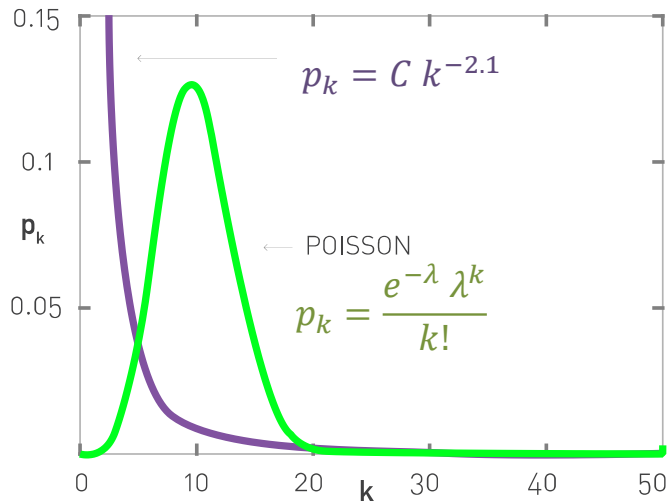
$$C = \frac{1}{\int_{k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma} dk} = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}$$

$$p(k) = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1} k^{-\gamma}.$$

Grado a partir del cual se observa ley de potencia

Diferencias entre ley de potencias y Poisson

(a)

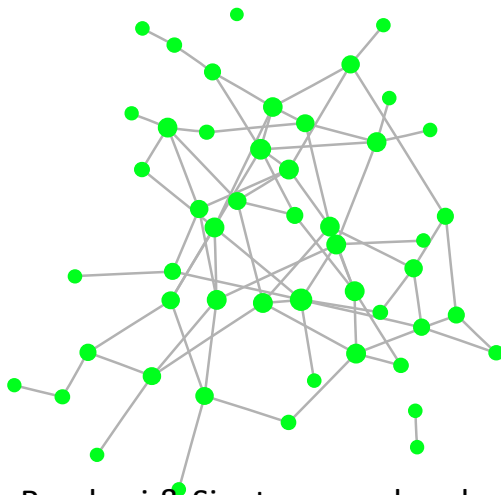


diferencias:

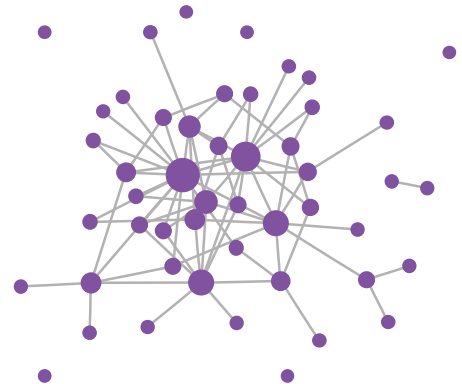
Exceso de nodos k
bajos y altos en LP

Exceso de nodos
 $k \sim \langle k \rangle$ en Poisson

(c)

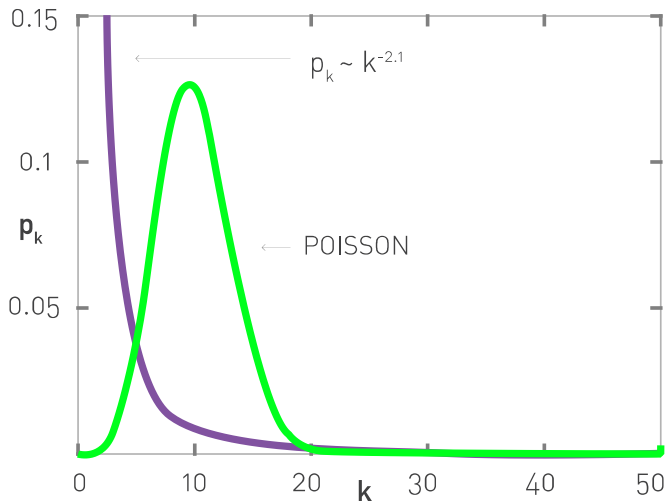


(d)

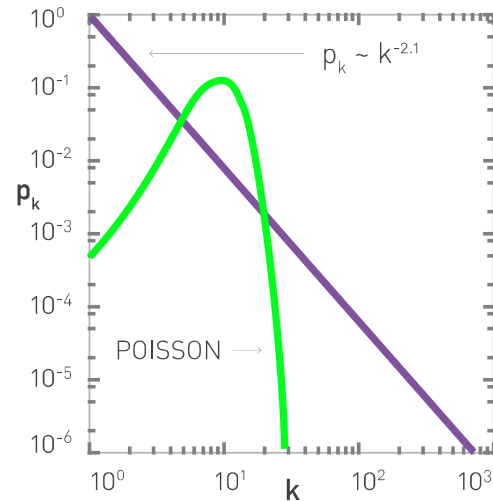


Diferencias entre ley de potencias y Poisson

(a)



(b)



Diferencias:

- Exceso de nodos k bajos y altos en LP
- Exceso de nodos $k \sim \langle k \rangle$ en Poisson

Sea una red Poisson: $p_k = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$

Si $\langle k \rangle = \mu = 4.6$ y hay en total $N = 10^{12}$ (WWW) nodos la prob de encontrar un nodo con $k \geq 100$

$$N_{k \geq 100} = 10^{12} \sum_{k \geq 100}^{\infty} \frac{4.6^k e^{-4.6}}{k!} \sim 10^{-82}$$

Esperaría ver **0** hubs

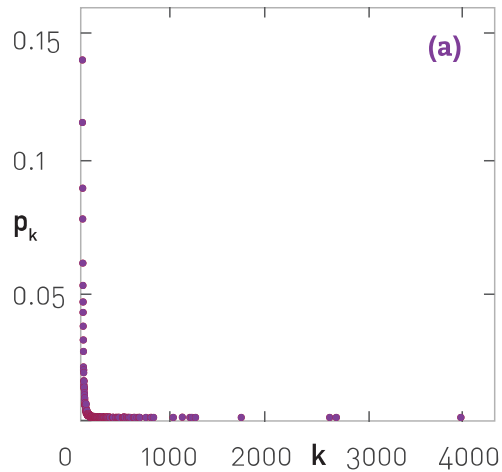
Si fuera una red Ley de Potencia ($\gamma = 2.1$)

$$N_{k \geq 100} = 10^{12} \sum_{k \geq 100}^{\infty} \frac{k^{-2.1}}{\zeta(2.1)} \sim 10^9$$

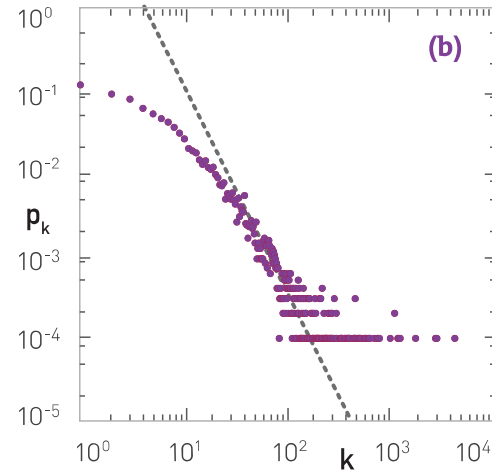
Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

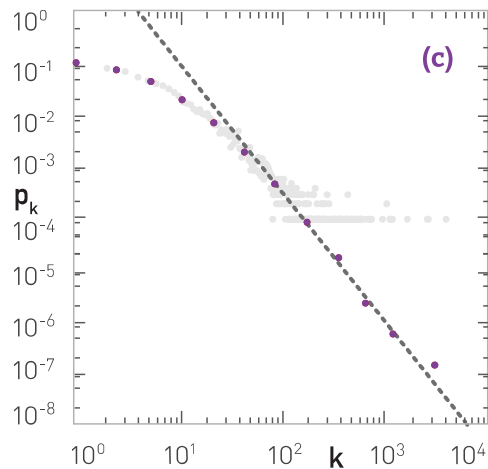
LINEAR SCALE



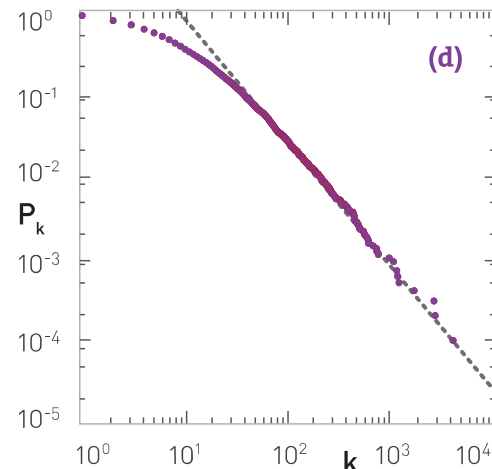
LINEAR BINNING



LOG-BINNING



CUMULATIVE



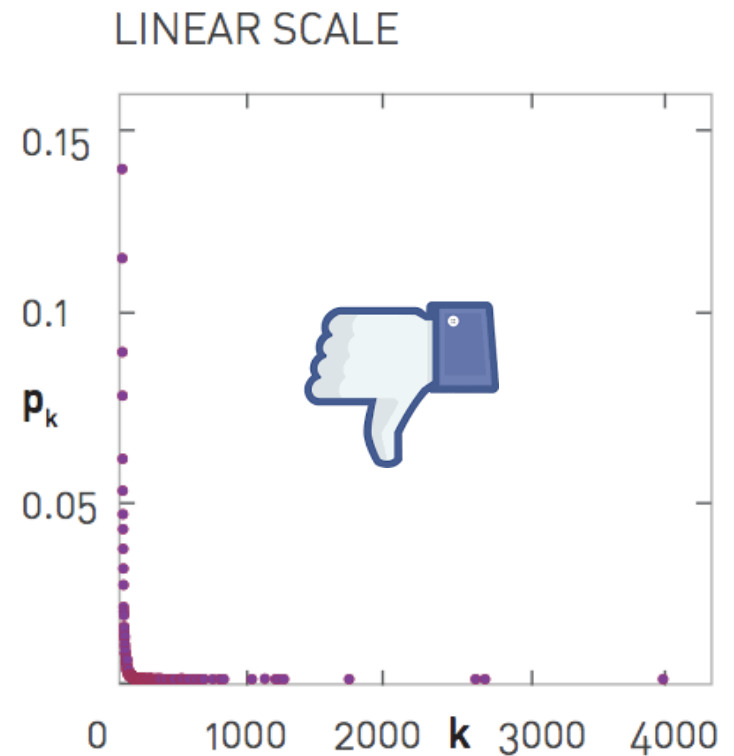
Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

1. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

El rango de valores posibles de grado hace que se pierda todo detalle



Visualizando leyes de potencias

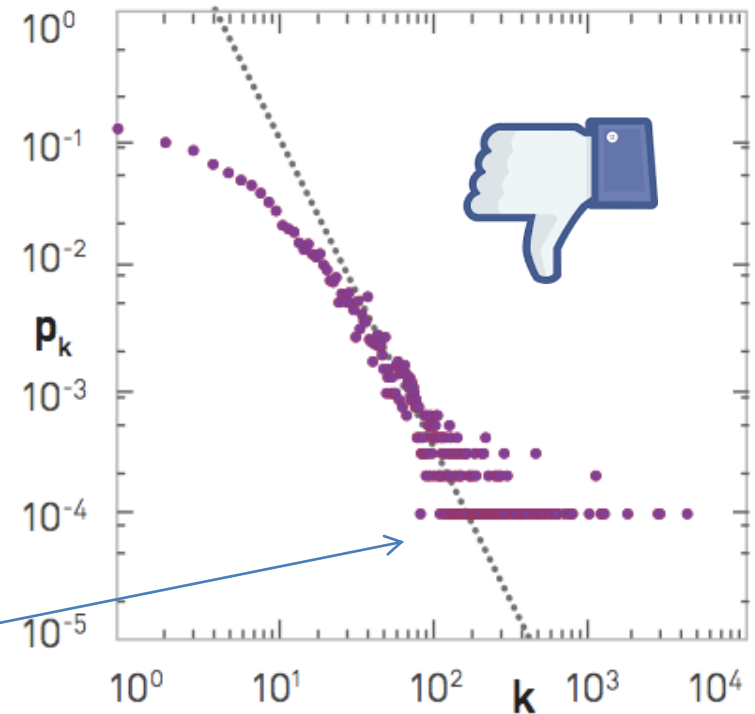
$$(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$$

2. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

utilizando escalas Log-Log

LINEAR BINNING ($\Delta k = 1$)



Al usar un Δk fijo (y chico) típicamente aparece un único ejemplo de un dado grado en la región de k -alto, dando lugar a la meseta de eventos $1/N$ (tenemos 1 o 0 cluster de tamaño $k \gg 1$)

Visualizando leyes de potencia

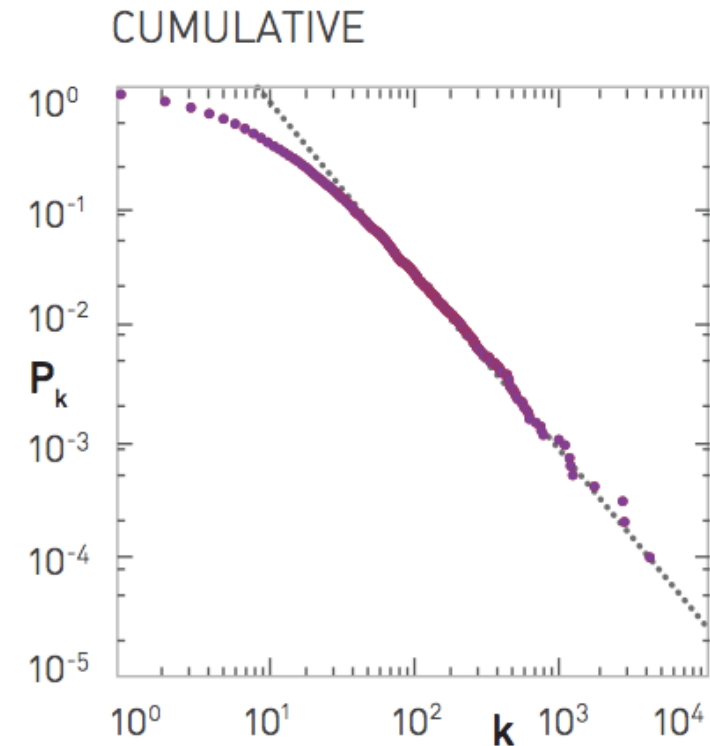
3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma-1} k^{-(\gamma-1)}$$



Visualizando leyes de potencia

3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

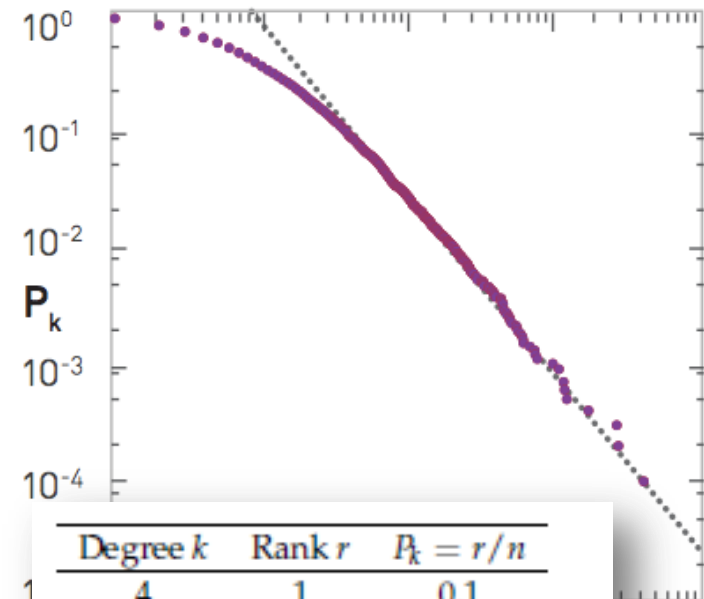
Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma-1} k^{-(\gamma-1)}$$

- P_k es fácil de calcular (no hay que binnear)
 - ranking r de un nodo: nro de nodos con grado mayor o igual que el
 - $P_k = r_k/N$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado r_k

CUMULATIVE



Degree k	Rank r	$P_k = r/n$
4	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.3
2	4	0.4
2	5	0.5
2	6	0.6
2	7	0.7
1	8	0.8
1	9	0.9
0	10	1.0

Visualizando leyes de potencia

3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

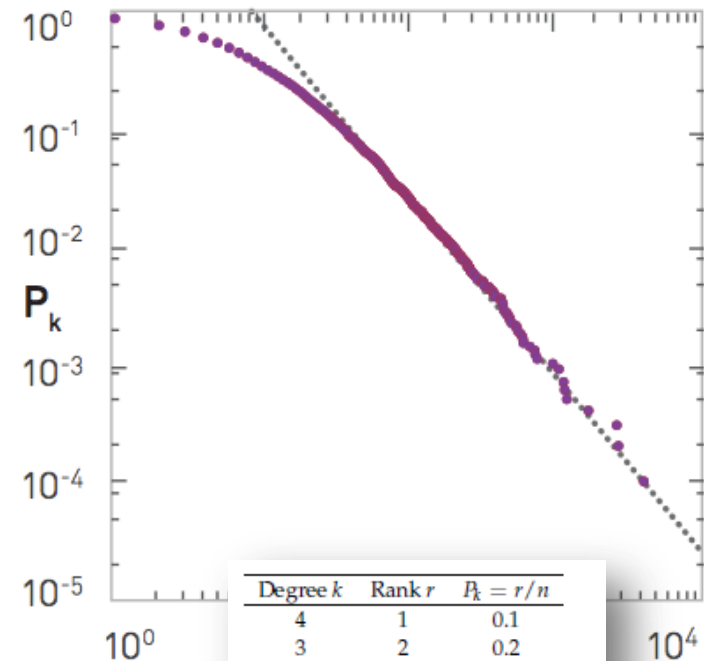
- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma} dk' = \frac{C}{\gamma-1} k^{-(\gamma-1)}$$

- P_k es fácil de calcular (no hay que binnear)
 - ranking r de un nodo: nro de nodos con grado mayor o igual que el
 - $P_{k=r_k/N}$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado r_k
 - Graficamos para cada nodo- i

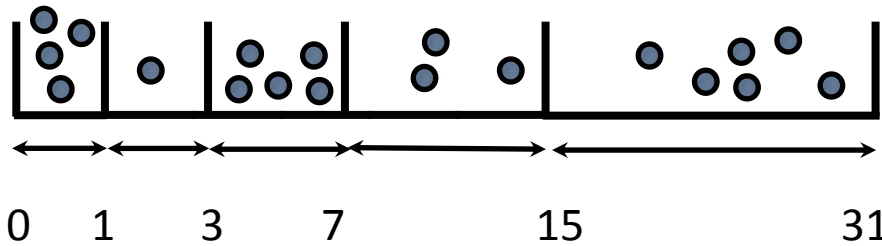
$$P_{k_i} = \frac{r_{k_i}}{N} \quad \text{en función de } k_i$$

CUMULATIVE



Visualizando leyes de potencias

4. Bineo logaritmico



$$b_0 = 1$$

$$b_i = b_{i-1} + 2^i \quad i > 0$$

$$\Delta b_i = 2^i$$

$$\Delta b_{i+1} = 2\Delta b_i$$

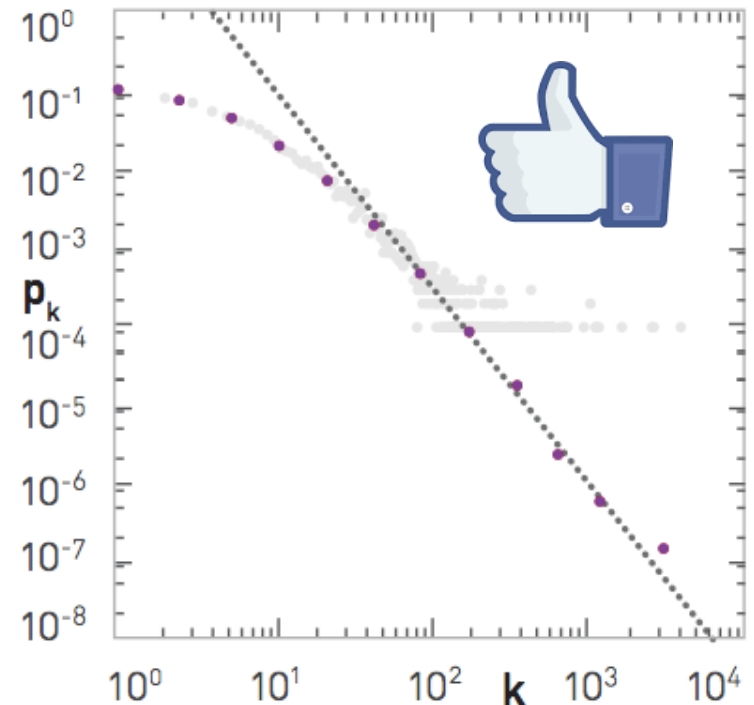
Celdas equiespaciadas en
escala logaritmica
 $\log \Delta b_{i+1} = \log \Delta b_i + \log 2$

Distribución de grado dada por

$$p(\langle k_i \rangle) = \frac{N_i}{\Delta b_i}$$

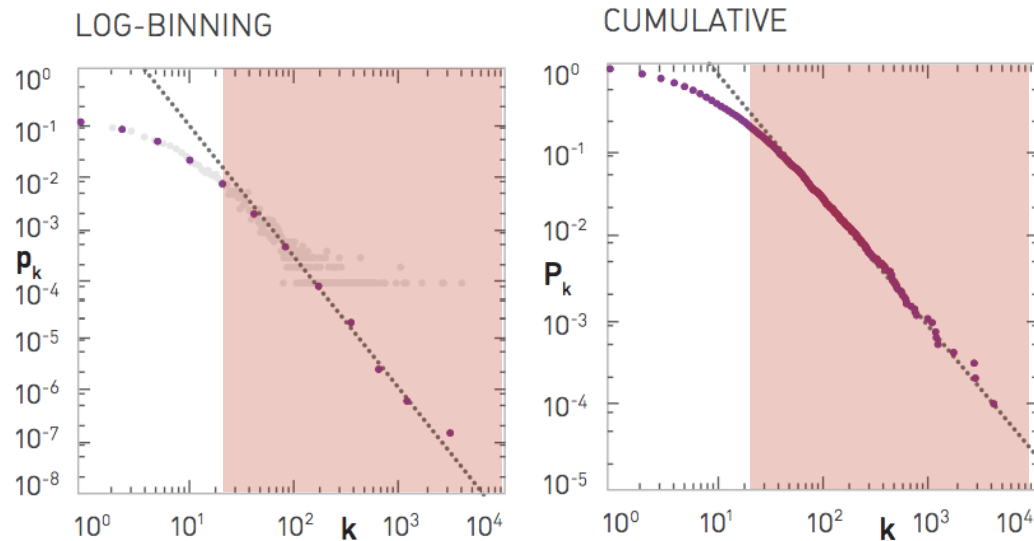
Bin crece con k: se
equaliza el nro de nodos

LOG-BINNING



Ajustando leyes de potencia

La manera **incorrecta** de hacerlo



- Ajuste por mínimos cuadrados de la parte del grafico que **parece** lineal en log-log

$$\log p_k = -\gamma \log k + \text{constant}$$

$$\log P_k = (-\gamma + 1) \log k + \text{constant}$$

Ajustando leyes de potencia

La manera **incorrecta** de hacerlo

Por qué esta **mal**?

- Las probabilidades tienen que estar normalizadas. Ajustar una línea en un gráfico nunca puede dar una distribución válida.
- Muchas funciones **parecen** lineales en log-log
- Discrepancias en la cola son más relevantes a la hora del ajuste
- El “método de los 5 puntos basculantes” no es de lo más recomendable en ciencia

Ajustando leyes de potencia

La manera **correcta** de hacerlo

Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation (MLE)**

- Se comienza con la hipótesis

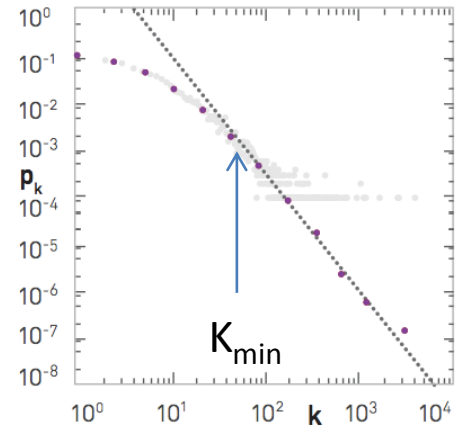
$$p(k) = Ck^{-\gamma} \quad C = (\gamma - 1) K_{min}^{\gamma-1}$$

- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud. Prob de observar los datos, dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}(k|\gamma) = \prod_{i=1}^N p(k) = \prod_{i=1}^N \frac{\gamma - 1}{K_{min}} \left(\frac{k_i}{K_{min}} \right)^{-\gamma}$$

- Para un dado K_{min}** se estima el exponente minimizando la función de verosimilitud (derivando respecto a γ)

LOG-BINNING



← Nota: aca es donde *falla* usar la cumulative distribution function



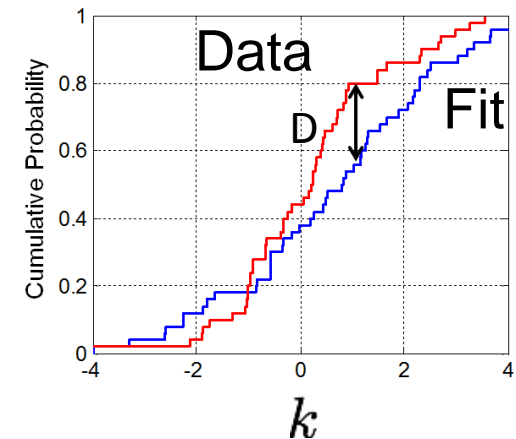
$$\gamma = 1 + N \left[\sum_{i=1}^N \ln \frac{k_i}{K_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1}$$

Ajustando leyes de potencia

La manera **correcta** de hacerlo

Como estimar K_{\min} ?

- Se calcula la función de probabilidad acumulada
 - de los datos, P_k
 - del ajuste, S_k



- Se estima la distancia máxima entre ambas distribuciones

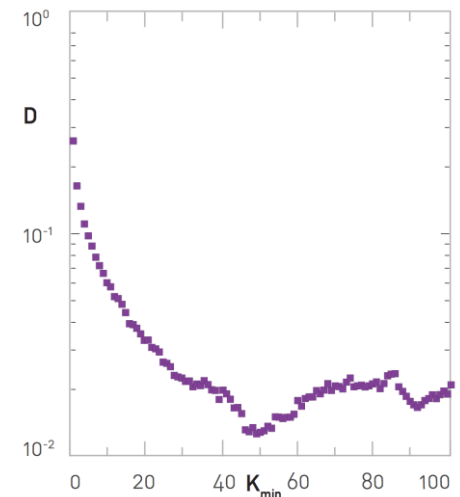
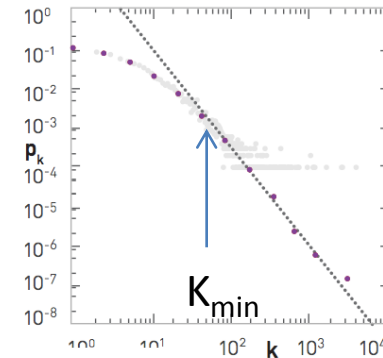
$$D = \max_{k \geq K_{\min}} |S_k - P_k|$$

- Se elige el K_{\min} que minimiza dicha distancia

- Esto es lo que hace `fits_power_law {igraph}` (!)

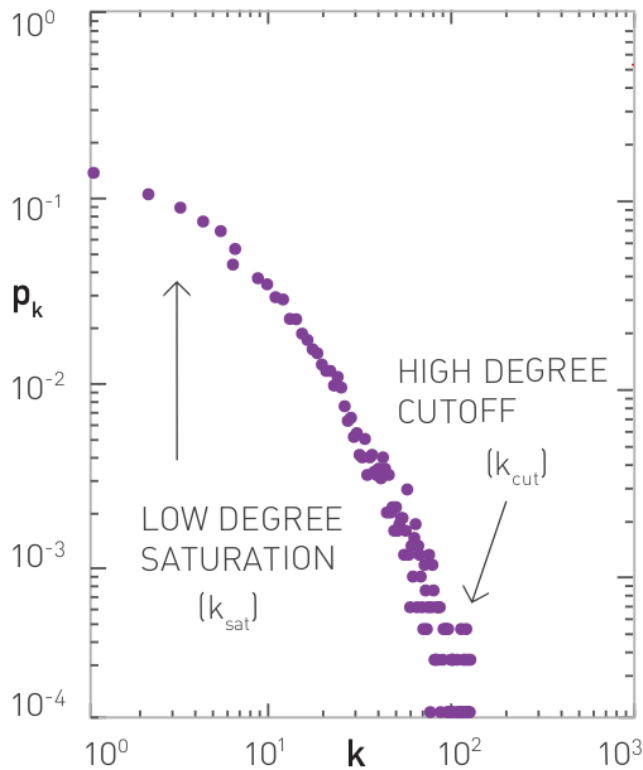


LOG-BINNING



Ajustando leyes de potencia

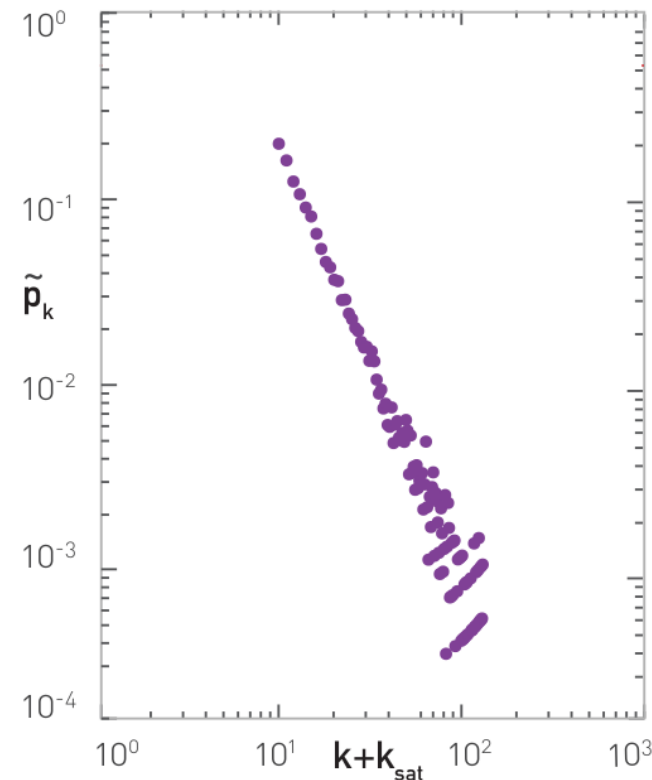
Efectos *de borde* en redes reales



$$\tilde{p}_k = p_k \exp\left(\frac{k}{k_{\text{cut}}}\right)$$

$$\tilde{k} = k + k_{\text{sat}}$$

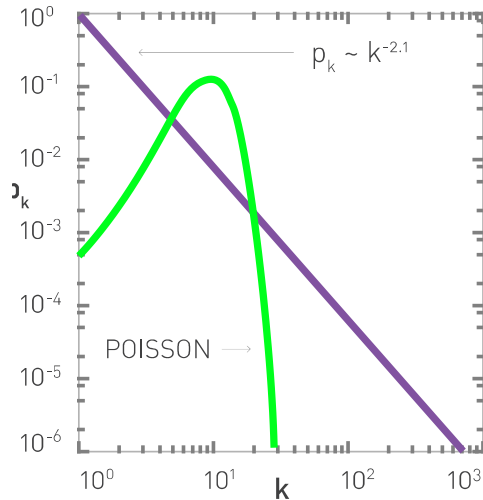
$$\tilde{p} \sim \tilde{k}^{-\gamma}$$



$$p_x = a(k + k_{\text{sat}})^{-\gamma} \exp\left(-\frac{k}{k_{\text{cut}}}\right)$$

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

(b)



Estimación del grado máximo de la red

Nro de nodos de grado mayor o igual que k_{max}

$$N_{k \geq k_{max}} = N \sum_{k \geq k_{max}} p_k \sim N \int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk$$

Asumimos que tenemos una red cuya distribución de grado sigue una ley dada

Vamos a **pedir** que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk = \frac{1}{N}$$

probabilidad de encontrar un nodo con grado mayor a k_{max}

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado $p(k)$

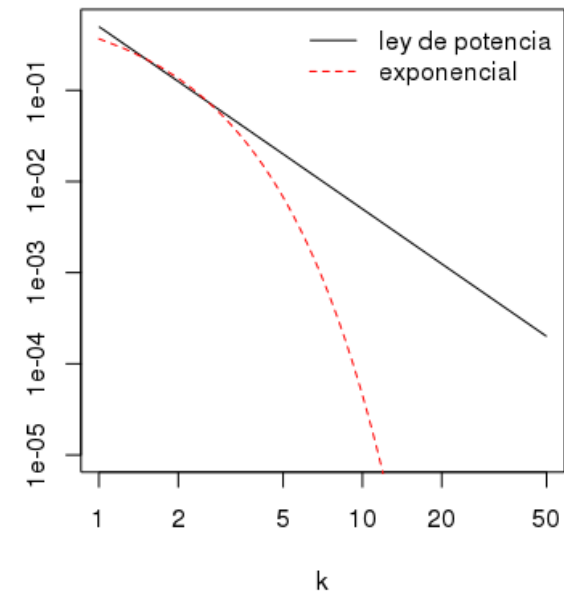
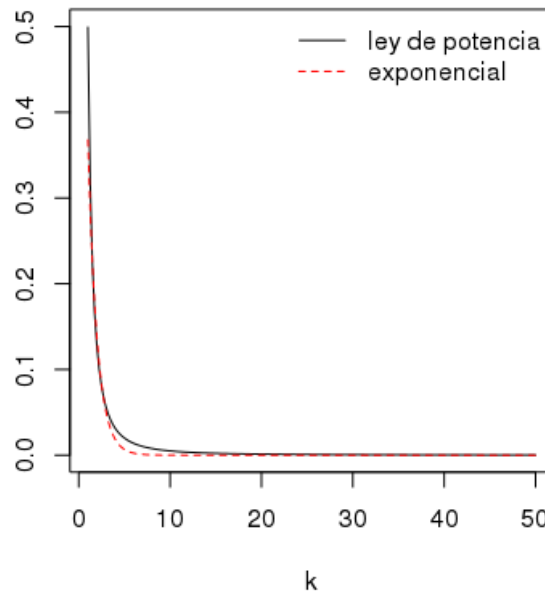
Vamos a pedir que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Distribución exponencial

$$p(k) = Ce^{-\lambda k}$$



Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado $p(k)$

Vamos a pedir que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k} dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

El hecho de tener un número finito de nodos, impone una escala para k_{max}

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado $p(k)$

Vamos a pedir que k_{max} cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k) dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Otro ejemplo:

Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda k_{min}} e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} e^{-\lambda k} dk = \frac{1}{N \lambda e^{\lambda k_{min}}}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

Distribución ley de potencias

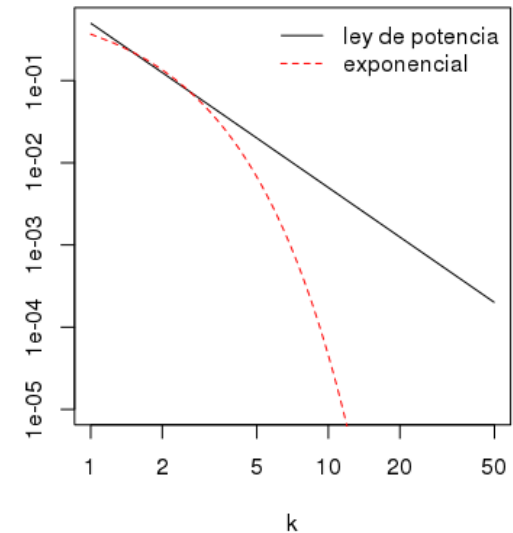
$$p(k) = (\gamma - 1) k_{min}^{\gamma-1} k^{-\gamma}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} k^{-\gamma} dk = \frac{1}{N(\gamma - 1) k_{min}^{\gamma-1}}$$

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

El hecho de tener un número finito de nodos, impone una escala para k_{max}

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs



Distribución exponencial

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

k_{max} crece de manera **logarítmica** con el tamaño de la red:

$$k_{max} \sim k_{min}$$

Distribución ley de potencias

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

k_{max} crece de manera **polinómica** con el tamaño de la red: puede ser **ordenes de magnitud mayor** que k_{min}

Efectos de tamaño finito para leyes de potencia

Valor esperado para k_{max}

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Para una distribución dada tipo ley de potencia, k_{max} aumenta con el tamaño del sistema

- Si $\gamma > 2$, k_{max} crece más lento que N
- Si $\gamma = 2$, $k_{max} \sim N$. El tamaño del mayor *hub* es $o(N)$
- Si $\gamma < 2$, k_{max} crece más rápido que N . El hub atrae para sí una fracción creciente de links (comportamiento anómalo, no se observa si no se admiten multi-links)

Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

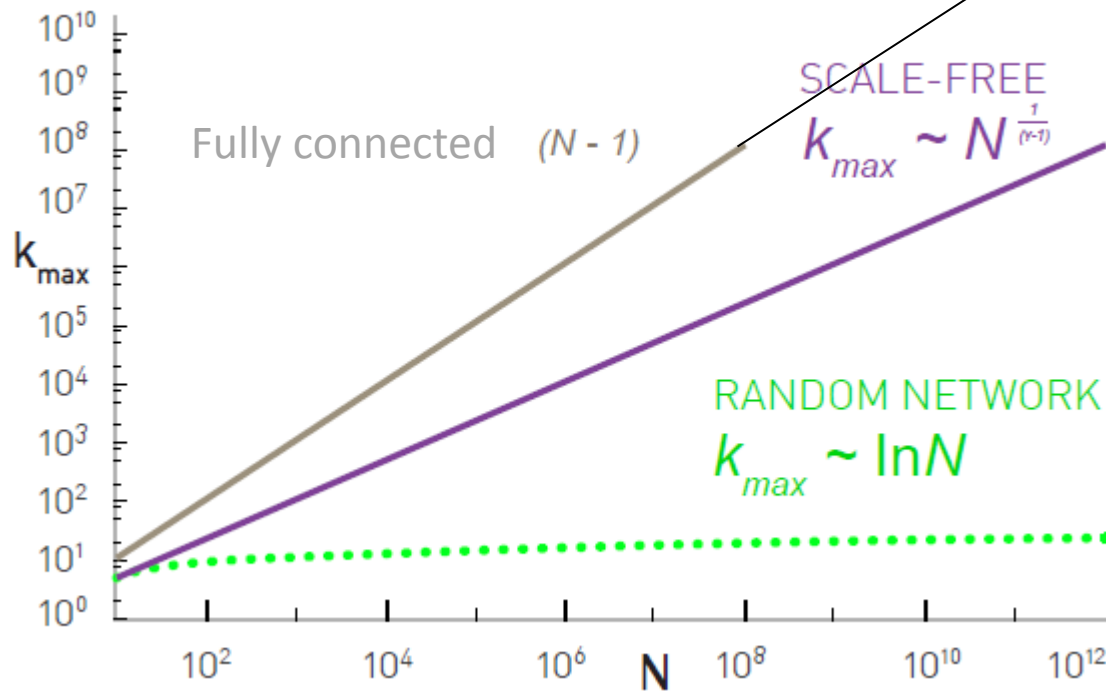
$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\gamma < 2$

$\gamma = 2$

$\gamma > 2$



Que significa *libre de escala*?

$$f(x) \sim x^\alpha$$

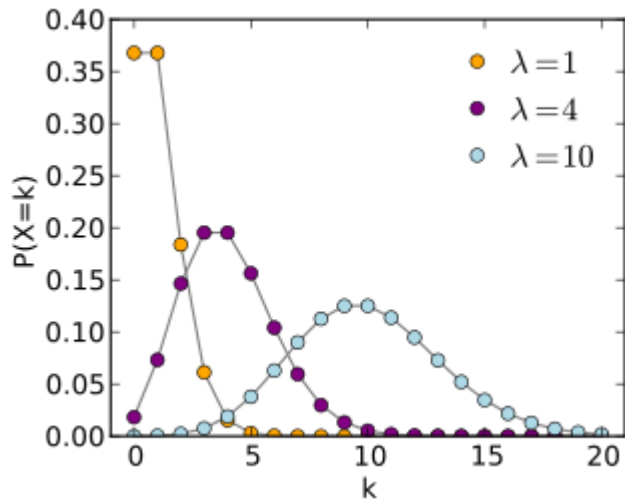
$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha x^\alpha$$

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha f(x)$$

Desde el punto de vista estadístico.....

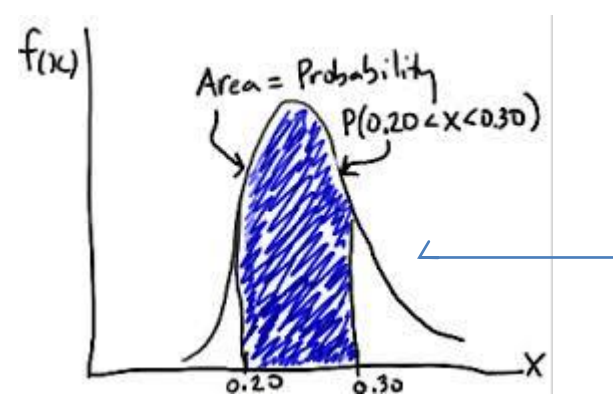


Un momentito...



$$p_{k \in [k_1, k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k) dk$$

p_k



$$p_{k \geq k_2} = \sum_{k_2}^{\infty} p(k)$$

$$p_{k \geq k_2} = \int_{k_2}^{\infty} p(k) dk$$

prob de encontrar un nodo con $k \geq k_2$

$$\langle f_k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} f_k p(k)$$

$$\langle f(k) \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} f(k) p(k) dk$$

valor medio de una funcion $f(k)$

$$\langle k \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k p(k)$$

$$\langle k \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k p(k) dk$$

grado medio

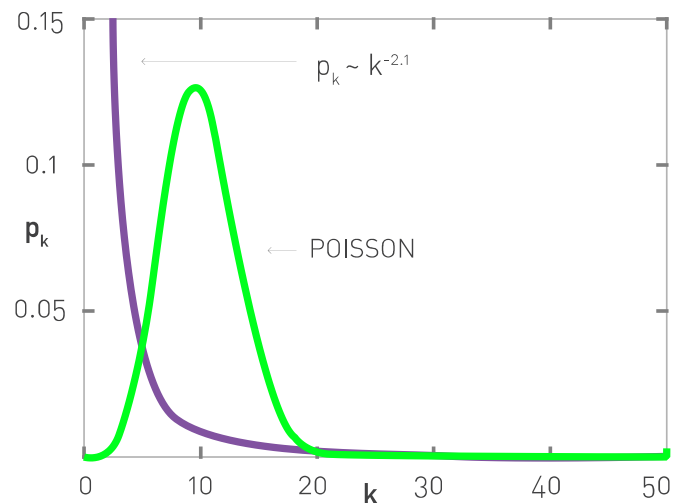
$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m p(k)$$

$$\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m p(k) dk$$

momento orden-m de distr. de grado

Qué significa libre-de-escala?

(a)



$$\langle k^m \rangle = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^m p(k) \approx \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^m p(k) dk$$

- Conocer todos los momentos de la distribución equivale a conocer la distribución
- Los primeros momentos tienen interpretaciones conocidas

- $m=1$ corresponde al valor medio de la distribución
- $m=2$ permite calcular la varianza y desviación estándar σ : $var = \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$
- $m=3$ permite calcular el *skewness* $\langle (k - \langle k \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$
- ...

Para una distribución tipo ley de potencia:

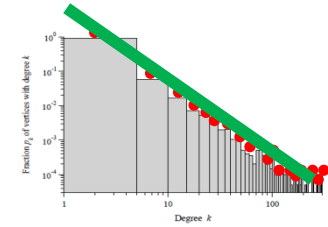
$$\langle k^m \rangle = C \frac{k_{max}^{m-\gamma+1} - k_{min}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

Para redes grandes ($k_{max} \rightarrow \infty$)

- si $m-\gamma+1 \leq 0$ $\langle k^m \rangle$ resulta finito
- si $m-\gamma+1 > 0$ $\langle k^m \rangle$ diverge.

Los momentos de orden $m > \gamma - 1$ divergen

$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



Distribuciones libre-de-escala

Para una distribución tipo ley-de-potencia los momentos de orden $m > \gamma - 1$ divergen

Network	Size	$\langle k \rangle$	κ	γ_{out}	γ_{in}
WWW	325 729	4.51	900	2.45	2.1
WWW	4×10^7	7		2.38	2.1
WWW	2×10^8	7.5	4000	2.72	2.1
WWW, site	260 000				1.94
Internet, domain*	3015–4389	3.42–3.76	30–40	2.1–2.2	2.1–2.2
Internet, router*	3888	2.57	30	2.48	2.48
Internet, router*	150 000	2.66	60	2.4	2.4
Movie actors*	212 250	28.78	900	2.3	2.3
Co-authors, SPIRES*	56 627	173	1100	1.2	1.2
Co-authors, neuro.*	209 293	11.54	400	2.1	2.1
Co-authors, math.*	70 975	3.9	120	2.5	2.5
Sexual contacts*	2810			3.4	3.4
Metabolic, <i>E. coli</i>	778	7.4	110	2.2	2.2
Protein, <i>S. cerev.</i> *	1870	2.39		2.4	2.4
Ythan estuary*	134	8.7	35	1.05	1.05
Silwood Park*	154	4.75	27	1.13	1.13
Citation	783 339	8.57			3
Phone call	53×10^6	3.16		2.1	2.1
Words, co-occurrence*	460 902	70.13		2.7	2.7
Words, synonyms*	22 311	13.48		2.8	2.8

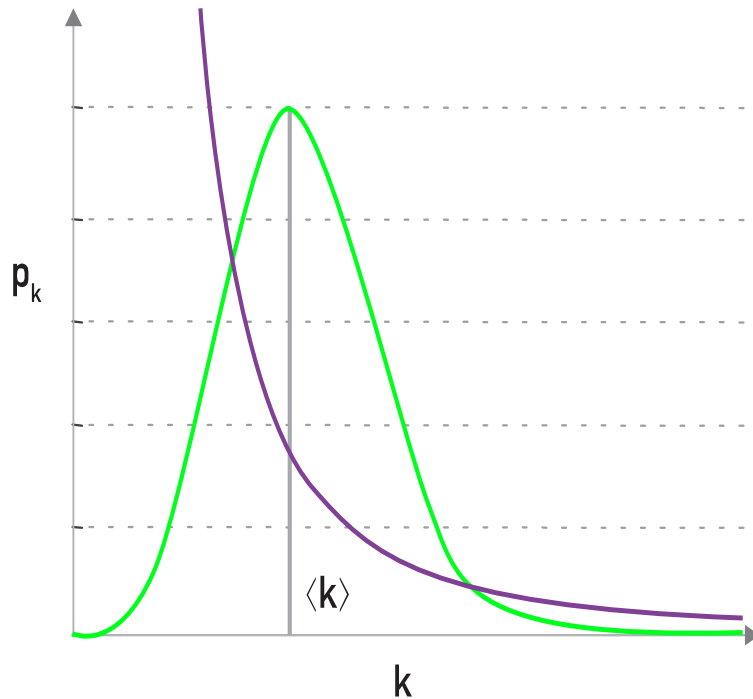
- Muchas redes reales $\gamma < 3$
- $\langle k^2 \rangle$ diverge en el limite $N \rightarrow \infty$!!

$$\langle k^m \rangle = C \frac{k_{max}^{m-\gamma+1} - k_{min}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

$$\langle k^2 \rangle = C \frac{k_{max}^{3-\gamma} - k_{min}^{3-\gamma}}{3 - \gamma}$$

La variabilidad (fluctuación cuadrática media) también diverge $\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$

Distribuciones libre-de-escala



Rango donde encontrar valores típicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

Random Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

Scale: $\langle k \rangle$

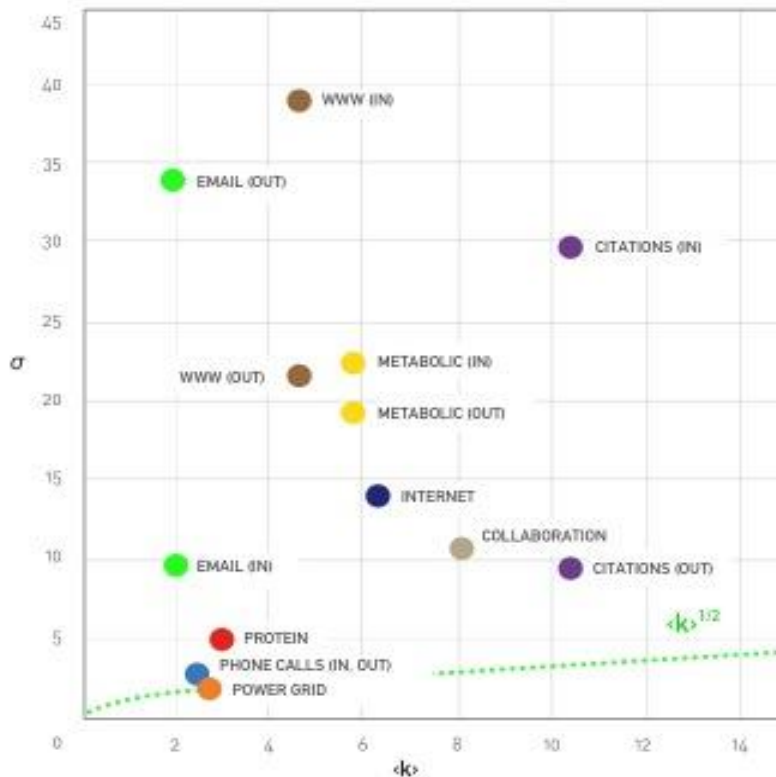
Scale-Free Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$

Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con $\gamma < 3$ puede tener valores muy alejados de $\langle k \rangle$. No existe una escala característica para la conectividad.

Distribuciones libre-de-escala en redes finitas



Rango donde encontrar valores típicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

Random Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

Scale: $\langle k \rangle$

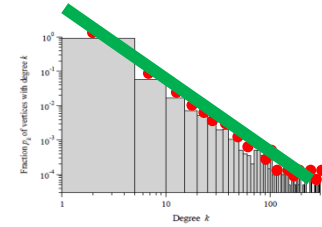
Scale-Free Network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$

Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con $\gamma < 3$ puede tener valores muy alejados de $\langle k \rangle$. No existe una escala característica para la conectividad.

$$\log p_k = -\gamma \log k + c$$



Habiamos visto...

De acuerdo a la distribución de grado las redes pueden clasificarse en

Redes acotadas exponencialmente:

- distribución decae para altos valores de k exponencialmente o más rapido
- Ausencia de grandes fluctuaciones en el grado [$\langle k^2 \rangle < \langle k \rangle$]

Redes de cola pesada:

- redes cuya distribución decae como ley de potencia para altos valores de k
- Pueden presentarse grandes fluctuaciones en el grado [$\langle k^2 \rangle \gg \langle k \rangle$]
- Típicamente presentan outliers (hubs)

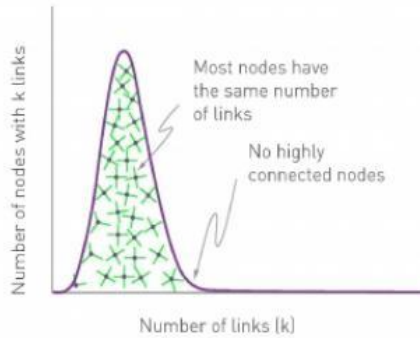
$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

	$\langle k \rangle$	$\langle k^2 \rangle$
$2 < \gamma \leq 3$	finito	infinito
$\gamma > 3$	finito	finito

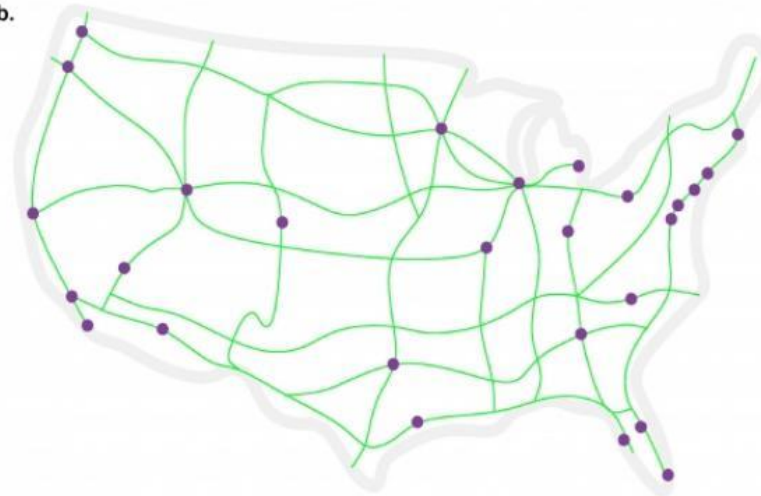
Cual es el efecto de tener **hubs** en una red?

Efecto de hubs sobre distancias

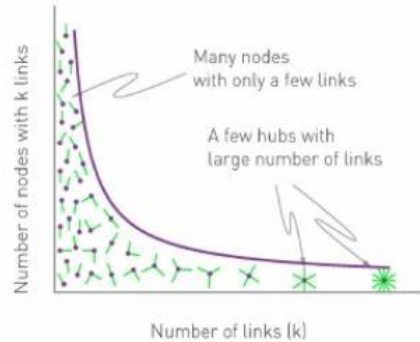
a. POISSON



b.



c. POWER LAW



d.

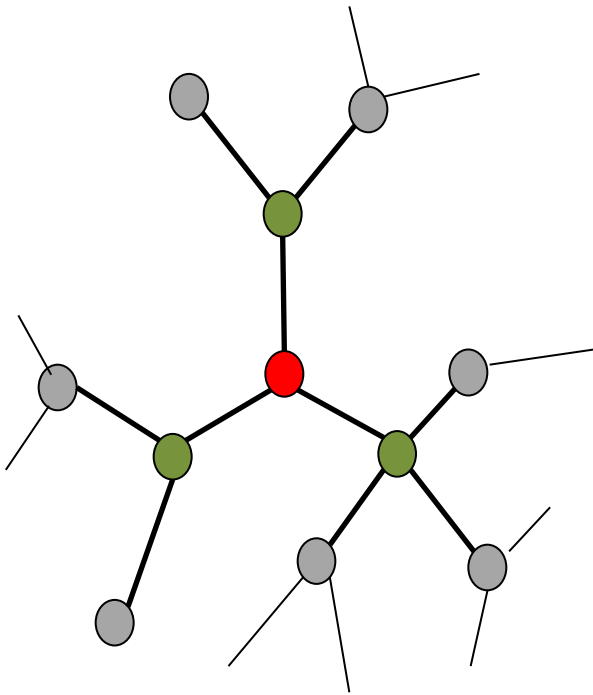


La presencia de hubs crea **atajos**

Distancias y mundo-pequeño en redes aleatorias (idea)

En redes aleatorias (distribución Poisson) los nodos tienden a tener $k \sim \langle k \rangle$.

- Nro primeros vecinos $\sim \langle k \rangle$
- Nro segundos vecinos $\sim \langle k \rangle^2$
- Nro de vecinos a distancia $s \sim \langle k \rangle^s$



El nro de nodos hasta una distancia s resulta

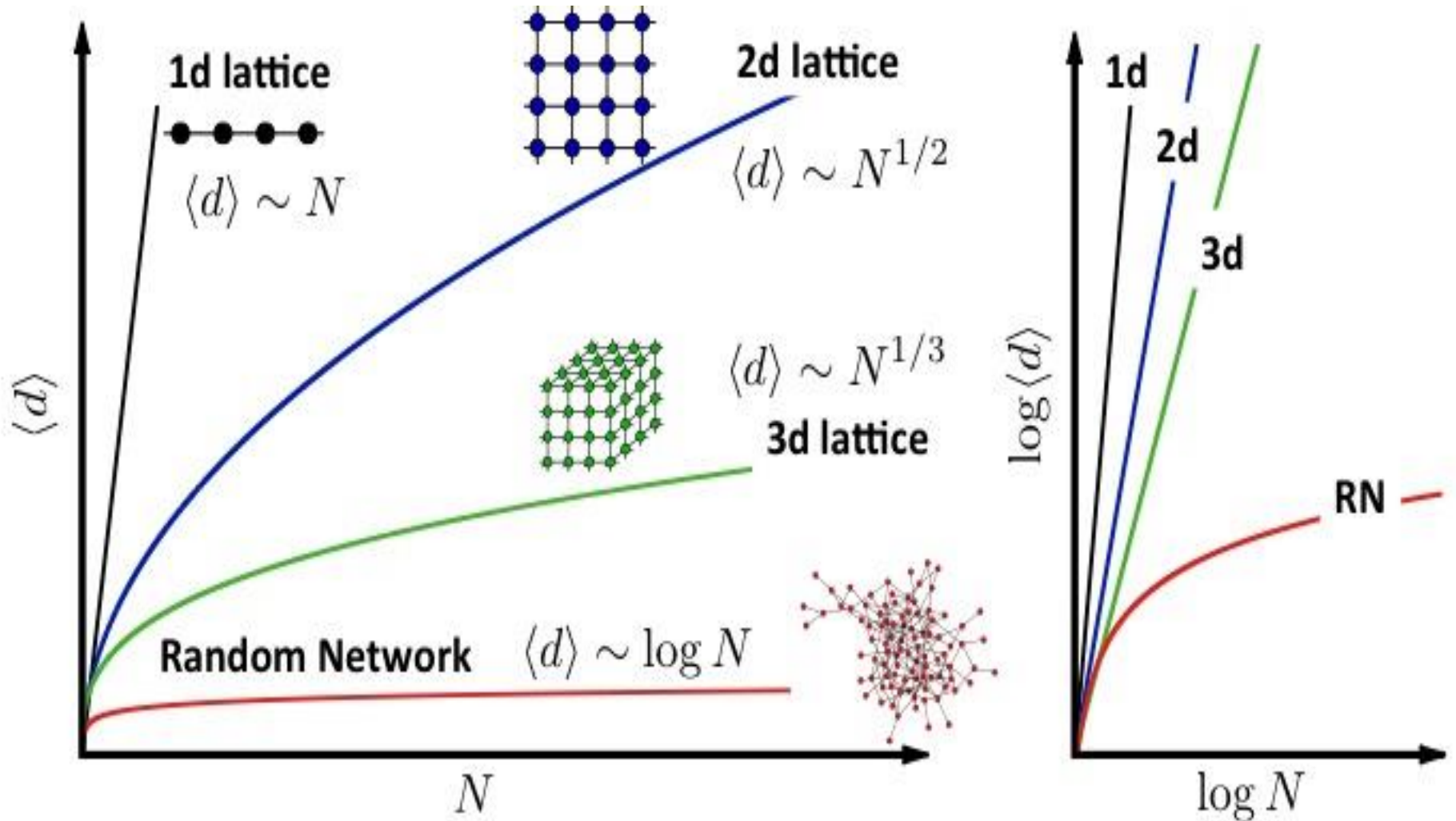
$$N(s) = 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \dots + \langle k \rangle^s = \frac{\langle k \rangle^{s+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

Como máximo $N(l_{max})=N$

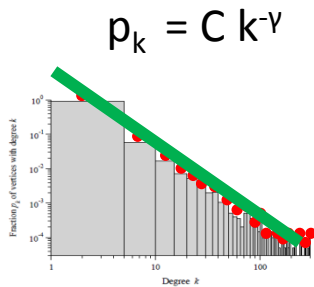
$$N \sim \langle k \rangle^{l_{max}}$$

$$l_{max} \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle} \quad \leftarrow \text{Efecto mundo pequeño}$$

Topología de mundos-pequeños



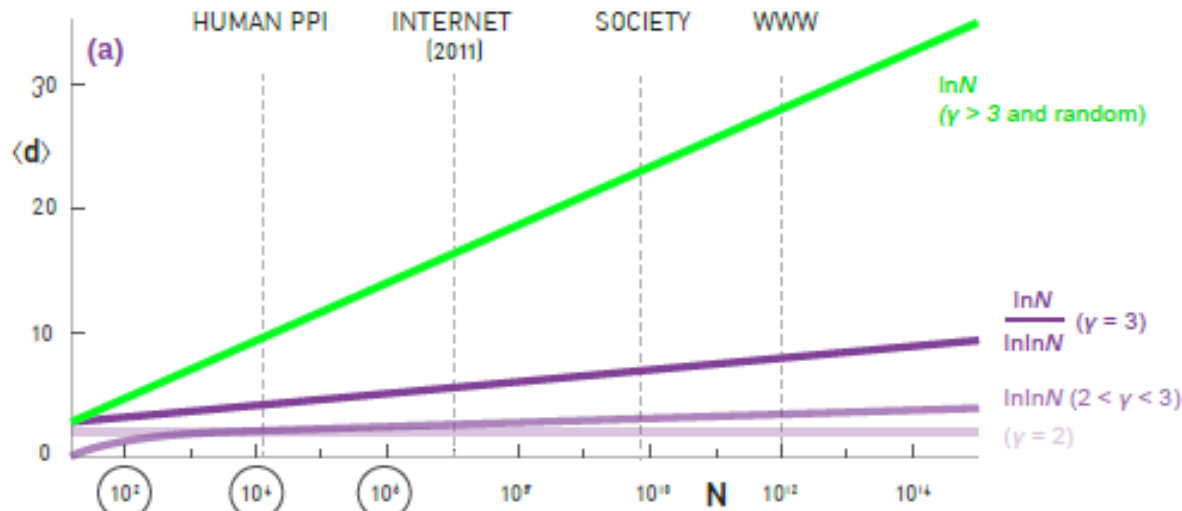
Distancias en redes libres de escala



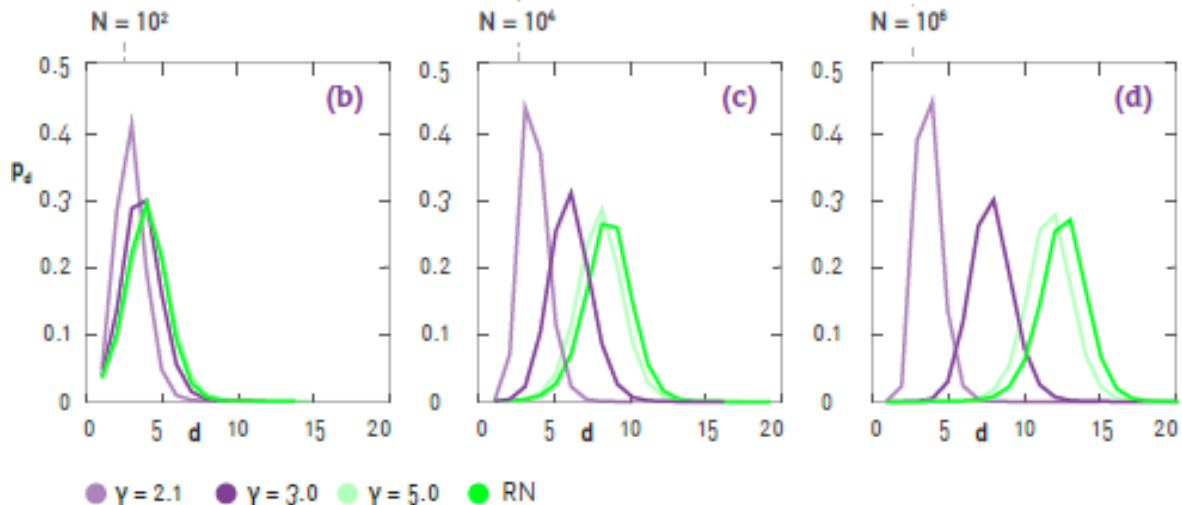
$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

{	$\langle d \rangle \sim$	const.	$\gamma = 2$	Tamaño hub $o(N)$. Estructura tipo <i>spoke</i> . Camino medio independiente del tamaño del sistema
		$\ln \ln N$	$2 < \gamma < 3$	Longitud media aumenta mas lento que log (!) Ultra-small-world debido a hubs.
		$\frac{\ln N}{\ln \ln N}$	$\gamma = 3$	Valor crítico de γ para el cual $\langle k^2 \rangle$ deja de diverger.
		$\ln N$	$\gamma > 3$	$\langle k^2 \rangle$ es finito. No hay suficientes hubs, ni son tan gdes. Se comporta como small-world random network.

Distancias en redes libres de escala

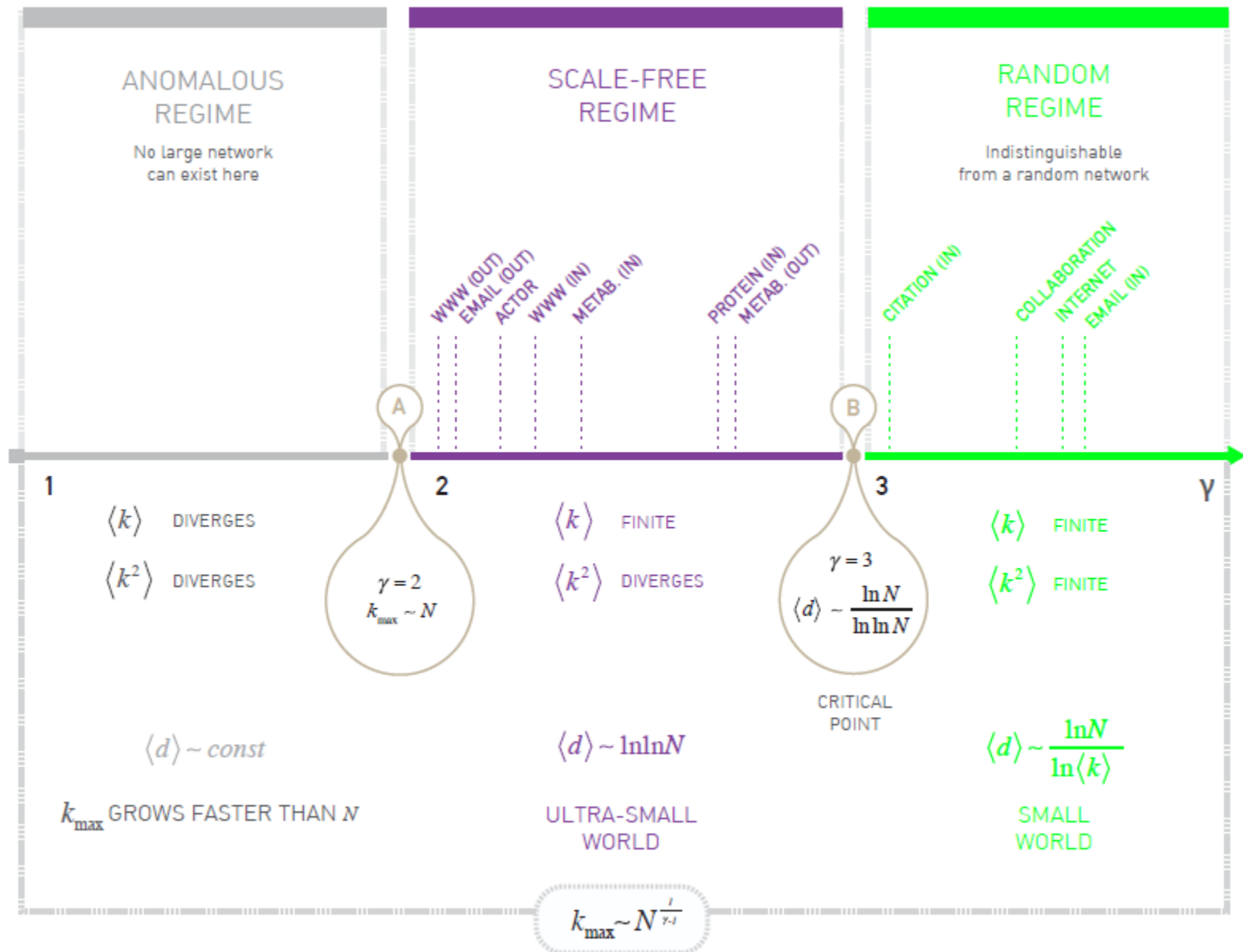


$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2, \\ \frac{\ln \ln N}{\ln(\gamma - 1)} & 2 < \gamma < 3, \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3, \\ \ln N & \gamma > 3. \end{cases}$$

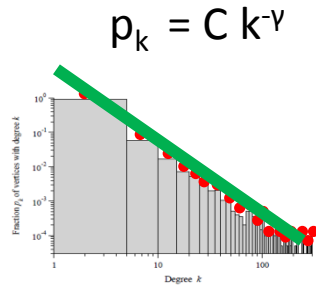


Las diferencias entre diferentes tipos de *escaleo* para las distancias se ponen de manifiesto en redes grandes.

Exponente crítico



Leyes de potencia en régimen logN



Es difícil encontrar redes reales con distribución de grado ley de potencia con $\gamma > 3$

- Se necesita observar nodos con grados que varíen en al menos 2 (o mejor 3) ordenes de magnitud: $k_{min} \sim 1$, $k_{max} \sim 10^2$
- Pero entonces

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$N = \left(\frac{k_{max}}{k_{min}} \right)^{\gamma-1} = 10^{2(\gamma-1)}$$

Para reconocer una red con distrib. de grado de exponente $\gamma=5$ necesitaría que la misma tuviera al menos $N \sim 10^8$ nodos (!)