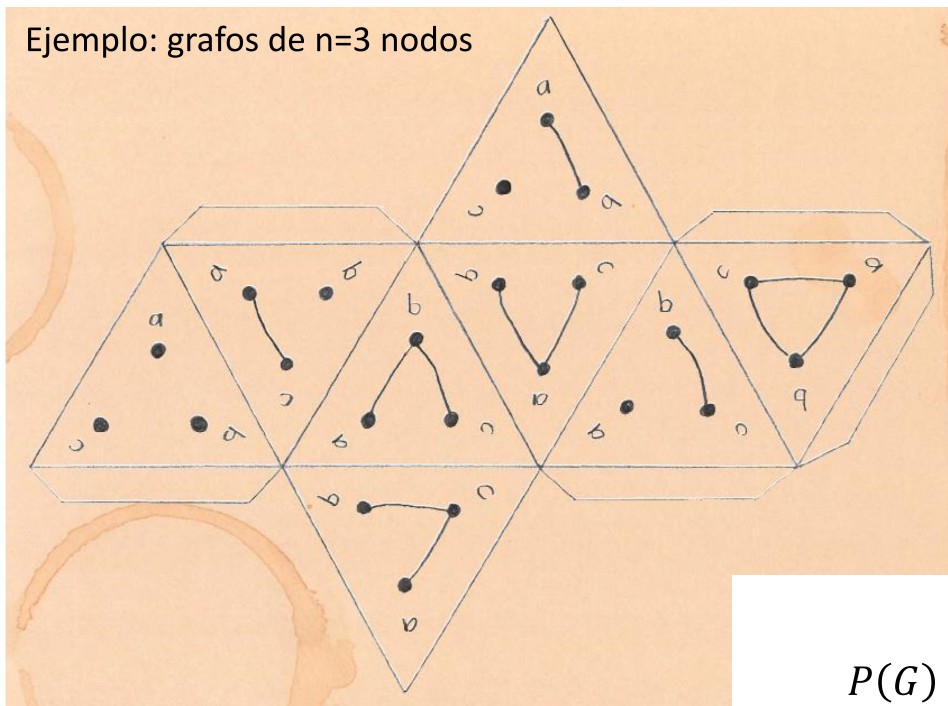
Redes Aleatorias

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un **conjunto dado** (*ensamble, familia*) de grafos

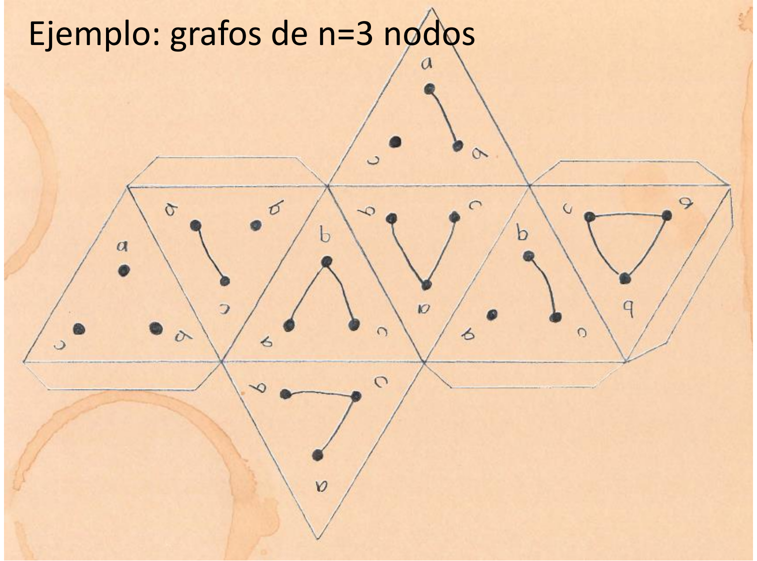


$$P(G) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si G tiene 3 nodos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Adaptado de
Peter Dodds
Applications of Random Networks
Complex Networks
CSYS/MATH 303, Spring, 2011
www.uvm.edu/pdodds/teaching/courses/coconuts

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un **conjunto dado** (*ensamble, familia*) de grafos



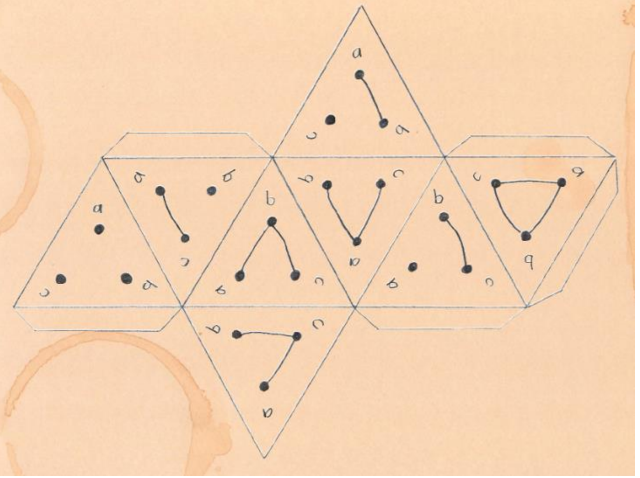
Dado un ensamble de grafos, vamos a querer calcular valores medios de propiedades de interés

$$\langle f \rangle = \sum_G P(G)\, f(G)$$

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un **conjunto dado** (*ensamble, familia*) de grafos

$\Omega_3 = 2^{\binom{3}{2}} = 2^{\frac{3!}{2!}} = 2^3$



I. **G(N=n)** ensamble de grafos de **n** nodos

$$P(G) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega_n} & \text{si G tiene n nodos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cuantos hay en total? Cuanto vale Ω_n?

- Si hay n nodos, hay $\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$ posibles pares (enlaces)
- Cada uno puede **estar** o **no-estar**
- Entonces $\Omega_n = 2^{\binom{n}{2}} \sim e^{\frac{\ln 2}{2} n^2}$

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un **conjunto dado** (*ensamble, familia*) de grafos

I. **G(N)** ensamble de grafos de **n** nodos
II. **G(N=n,M=m)** conjunto formado por grafos de **n** vértices y **m** enlaces

$$P(G) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega_{n,m}} & \text{si G tiene n nodos y m vértices} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Omega_{n,m} = \left(\!\!\binom{\binom{n}{2}}{m}\!\!\right)$$

nro de maneras de elegir **2** elementos de **n** (i.e. nro maximo de posibles enlaces)

nro de maneras de elegir **m** enlaces del nro maximo de posibles enlaces

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un conjunto (*ensamble, familia*) dado de grafos

I. **G(N)** ensamble de grafos de n nodos
II. **G(N=n,M=m)** conjunto formado por grafos de **n** vértices y **m** enlaces

$$P(G) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega_{n,m}} & \text{si G tiene N nodos y M vértices} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Dado un ensamble de grafos, es posible calcular valores medios de propiedades de interés

$$\langle f \rangle = \sum_G P(G)\, f(G) = \frac{1}{\Omega} \sum_{G \epsilon G(N,M)} f(G)$$

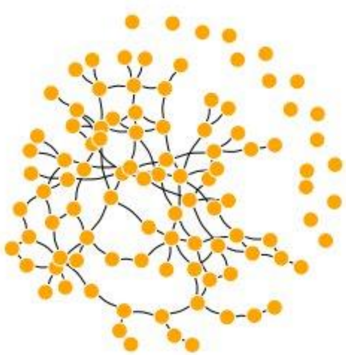
$$\langle k \rangle = \sum_G P(G)\, \langle k \rangle_G = \sum_G P(G)\, \frac{2m}{n} = \frac{2m}{n}$$

Teoría de redes aleatorias

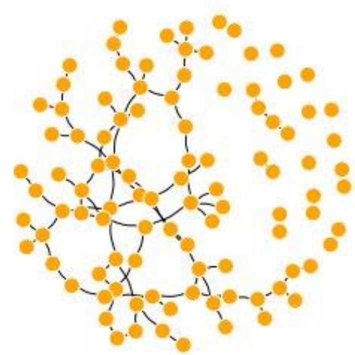
Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un conjunto (*ensamble, familia*) dado de grafos

I. **G(N)** ensamble de grafos de n nodos
II. **G(n,m)** conjunto formado por grafos de **n** vértices y **m** enlaces
III. **G(n,p)** conjunto formado por grafos de **n** vértices tal que la probabilidad de que exista un enlace entre cualquier par de nodos resulta **p**

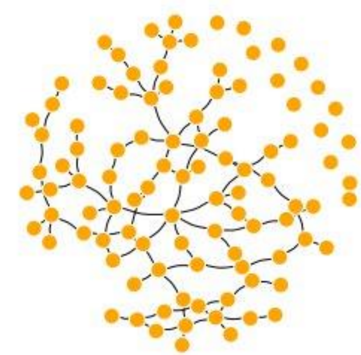
n=100, p=0.02



m=108



m=90



m=96

Entre 1950-1960 Paul Erdos y Alfred Renyi desarrollaron la teoria de grafos aleatorios estudiando las propiedades de este tipo de ensambles

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un conjunto (*ensamble, familia*) dado de grafos

I. **G(n)** ensamble de grafos de n nodos
II. **G(n,m)** conjunto formado por grafos de **n** vértices y **m** enlaces
III. **G(n,p)** conjunto formado por grafos de **n** vértices tal que la probabilidad de que exista un enlace entre cualquier par de nodos resulta **p**

Prob de observar en este ensamble un **dado** grafo G con **n** vertices y **m** enlaces

$$P(G) = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Prob de tener m enlaces

Prob de no tener los enlaces restantes

Teoría de redes aleatorias

Grafo aleatorio: es un grafo obtenido muestreando un conjunto (*ensamble, familia*) dado de grafos

I. **G(n)** ensamble de grafos de n nodos
II. **G(n,m)** conjunto formado por grafos de **n** vértices y **m** enlaces
III. **G(n,p)** conjunto formado por grafos de **n** vértices tal que la probabilidad de que exista un enlace entre cualquier par de nodos resulta **p**

Prob de observar en este ensamble un **dado** grafo G con **n** vertices y **m** enlaces

$$P(G) = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

nro grafos con **n** vertices y **m** enlaces

Prob de observar en este ensamble **un** grafo con **n** vertices y **m** enlaces

$$P(M=m) = \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

La probabilidad de ver un grafo con exactamente **m** vertices en este ensamble, sigue una **distribucion Binomial** de probabilidades

Repaso matematico…

G(n,p)

$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m}p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Supongamos que en una prueba exito/fracaso la probabilidad de éxito es *p*.
La probabilidad de tener *x* exitos en *N* pruebas independientes :

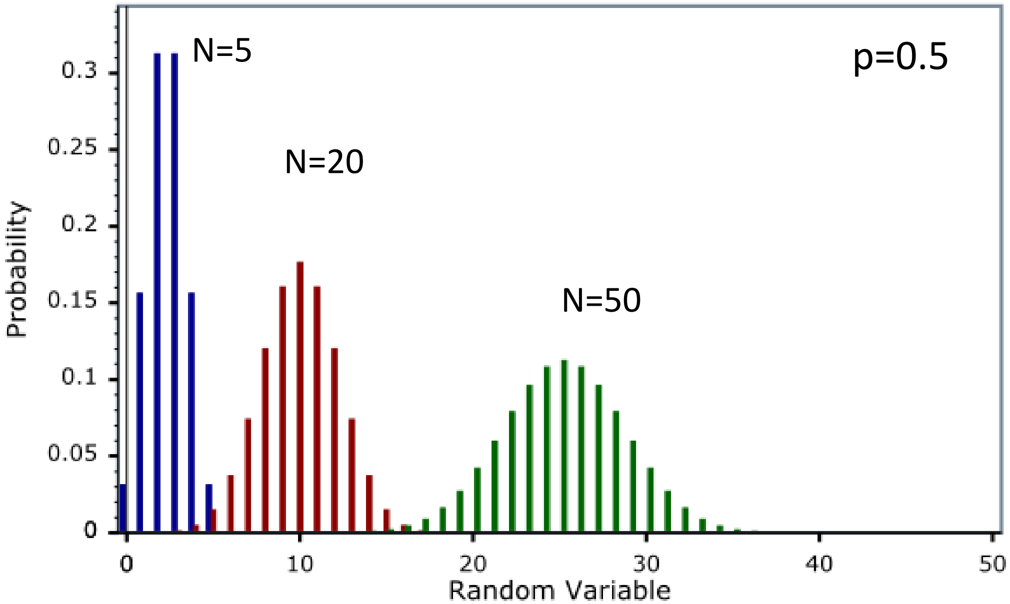
$$\underbrace{10001000011011100........10}_{\text{N pruebas (con } x \text{ 1´s)}}$$

$$P(x)=\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$$

$$\langle x\rangle=\sum xP(x)=Np$$

$$\langle x^2\rangle=p\,(1-p)N+p^2N^2$$

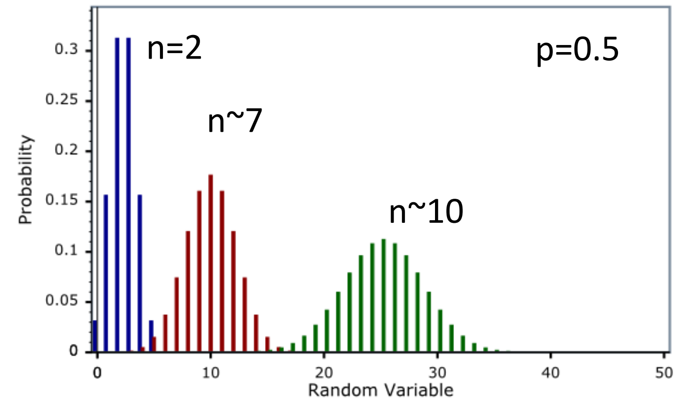
$$\sigma=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\sqrt{p\,(1-p)N}$$



Propiedades de G(N,p)

G(n,p)

$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m}p^{m}(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$



- $\langle m\rangle=\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}}P(m)\,m=\binom{n}{2}p$
  $=\frac{n(n-1)}{2}p$

$$P(x)=\binom{N}{x}p^{x}(1-p)^{N-x}$$

$$\sigma=\sqrt{\langle m^2\rangle-\langle m\rangle^2}=\sqrt{p\,(1-p)\binom{n}{2}}$$

$$\langle x\rangle=Np$$

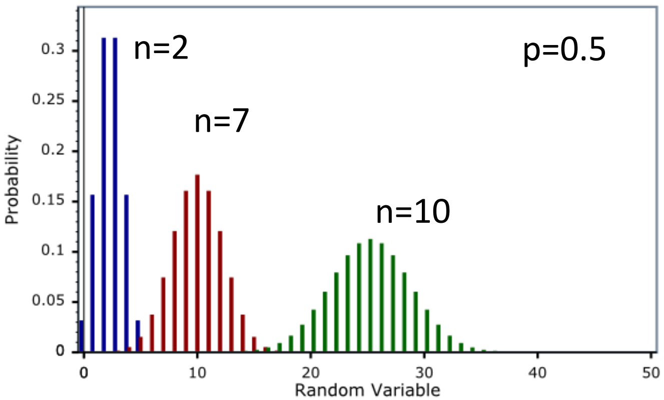
$$\langle x^2\rangle=p\,(1-p)N+p^2N^2$$

$$\frac{\sigma}{\langle m\rangle}\sim\frac{1}{\sqrt{\binom{n}{2}}}\sim\frac{1}{n}$$

$$\sigma=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\sqrt{p\,(1-p)N}$$

Aunque el ensamble admite grafos con cualquier número de enlaces la mayor parte de los grafos poseen m~<m> si n>>1

Propiedades de G(N,p)



G(n,p)

$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m}p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

- $\langle m\rangle=\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}}P(m)\,m=\binom{n}{2}p$
$$=\frac{n(n-1)}{2}p$$

✓ Razonable: nro total de pares posibles por la probabilidad **p** de que se establezca un enlace

- $\langle k\rangle=\frac{2\langle m\rangle}{n}=(n-1)p$

$$\sigma_k=\sqrt{(n-1)(1-p)p}$$

$$\frac{\sigma_k}{\langle k\rangle}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

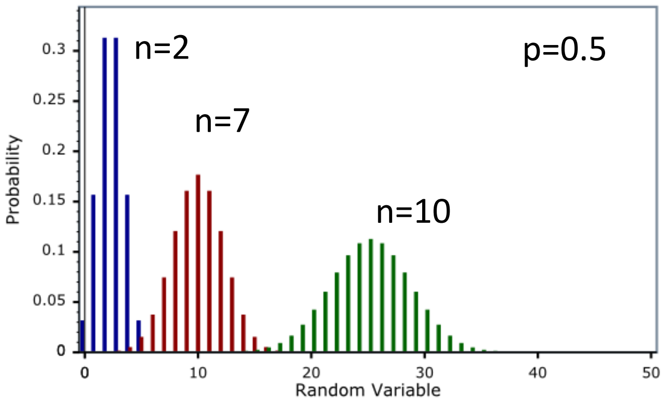
✓ Razonable: maximo nro de posibles enlaces de un nodonro por la probabilidad **p** de que se establezca un enlace

La distribución de grado se angosta para redes gdes.

Propiedades de G(N,p)

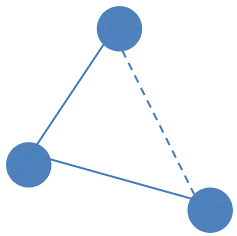
G(n,p)

$$P(M=m) = \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$



- $\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} P(m)\, m = \binom{n}{2} p$
$$= \frac{n(n-1)}{2} p$$

- $\langle k \rangle = \frac{2\langle m \rangle}{n} = (n-1)p$



- **Coeficiente de Clustering:**

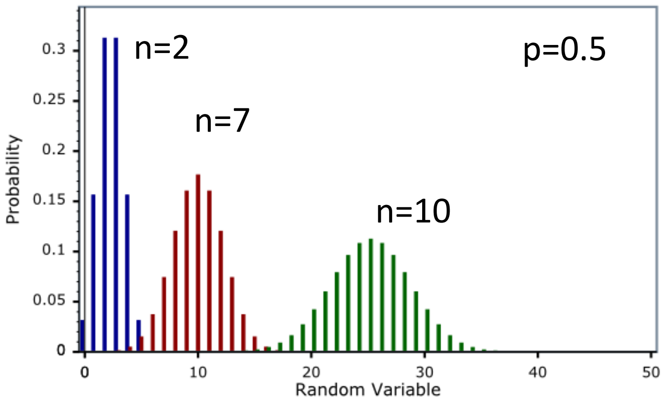
$$C_\Delta = 3\,\frac{\#triangulos}{\#tripletes}$$
$$= 3\,\frac{\frac{1}{6} N\,(N-1)(N-2)p^3}{\frac{1}{2} N\,(N-1)(N-2)p^2} = p$$

$$C_i = \frac{2\ \#vec\ enlazados}{k_i(k_i-1)}$$
$$= \frac{2}{k_i(k_i-1)} \frac{p\, k_i(k_i-1)}{2} = p$$

Propiedades de G(N,p)

G(n,p)

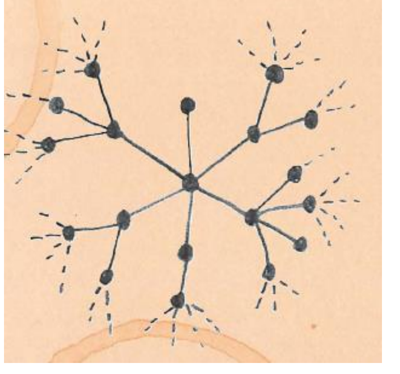
$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m}p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$



- $\langle m\rangle=\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}}P(m)\,m=\binom{n}{2}p$
  $=\frac{n(n-1)}{2}p$

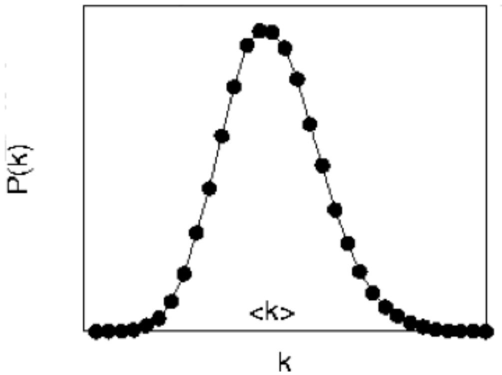
- $\langle k\rangle=\frac{2\langle m\rangle}{n}=(n-1)p$

- $C=p$
  - Para redes muy gdes, $n\rightarrow\infty$, en las que <k> se mantiene finito, $p\rightarrow 0$
  - $C\rightarrow 0$
  - Redes presentan pocos *loops*
  - Localmente se parecen a arboles



Distribución de grado

Quiero estimar $\boldsymbol{P_k}$ probabilidad de que un nodo tomado al azar de una red G(N,p) tenga *k* vecinos



$$P_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

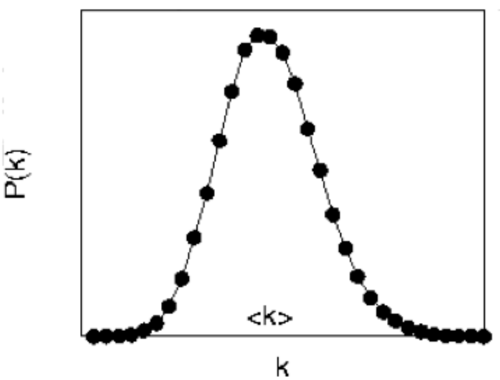
Nro posible de maneras de elegir k vecinos de los n-1 disponibles

- P_k sigue una distribución binomial
- Si $n \to \infty$ y p se mantiene fijo, tiende a una distribución Gaussiana
- Si $n \to \infty$ y <k>=(n-1)p se mantiene finito, entonces $p \to 0$. Vamos a analizar P_k en éste limite

(spoiler alert ñoño: es una Poisson)

Distribución de grado

Quiero estimar $\boldsymbol{P_k}$ probabilidad de que un nodo tomado al azar de una red G(N,p) tenga *k* vecinos



$$P_k = \underbrace{\binom{n-1}{k}} p^k \underbrace{(1-p)^{n-1-k}}$$

Analizo los diferentes factores cuando

$$\begin{cases} n \to \infty, p \to 0 \text{ y} \\ c \equiv \langle k \rangle = (n\text{-}1)p \text{ se mantiene finito} \end{cases}$$

$$\underline{(1-p)^{n-1-k}}$$

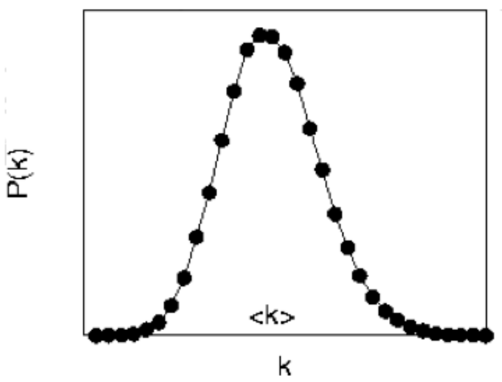
$$\log(1-p)^{n-1-k} = (n-1-k)\log(1-p)$$

$$\log(1-p) \sim -p \qquad \sim -(n-1-k)p = -(n-1-k)\frac{c}{n-1} \sim -c$$

$$(1-p)^{n-1-k} \sim e^{-c}$$

Distribución de grado

Quiero estimar $\boldsymbol{P_k}$ probabilidad de que un nodo tomado al azar de una red G(N,p) tenga k vecinos



$$P_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

Analizo los diferentes factores cuando

$$\begin{cases} n \to \infty, p \to 0 \text{ y} \\ c \equiv \langle k \rangle = (n\text{-}1)p \text{ se mantiene finito} \end{cases}$$

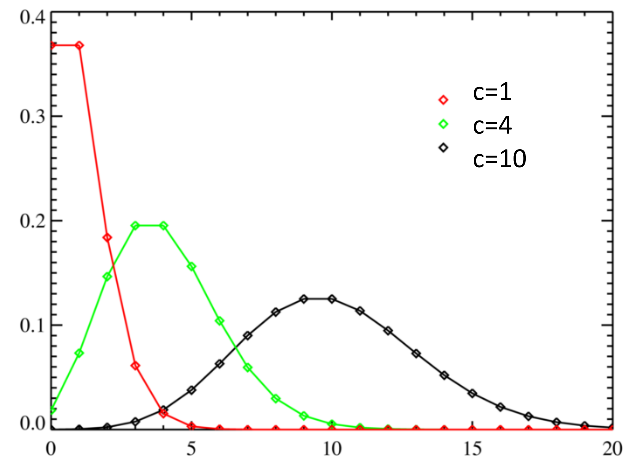
$$(1-p)^{n-1-k} \sim e^{-c}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-1-k+1)}{k!} \sim \frac{(n-1)^k}{k!}$$

$$P_k \sim \frac{(n-1)^k}{k!} p^k e^{-c} = \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

Distribución de Poisson

Repaso matemático



$$P_k = \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0} k \; P_k \; = e^{-c} \sum_{k=0} k \frac{c^k}{k!} = c \; e^{-c} \sum_{k=1} \frac{c^{k-1}}{(k-1)!} = c \; e^{-c} \sum_{j=0} \frac{c^j}{j!} = c$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0} k^2 \; P_k \; = \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle$$

$$\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle$$

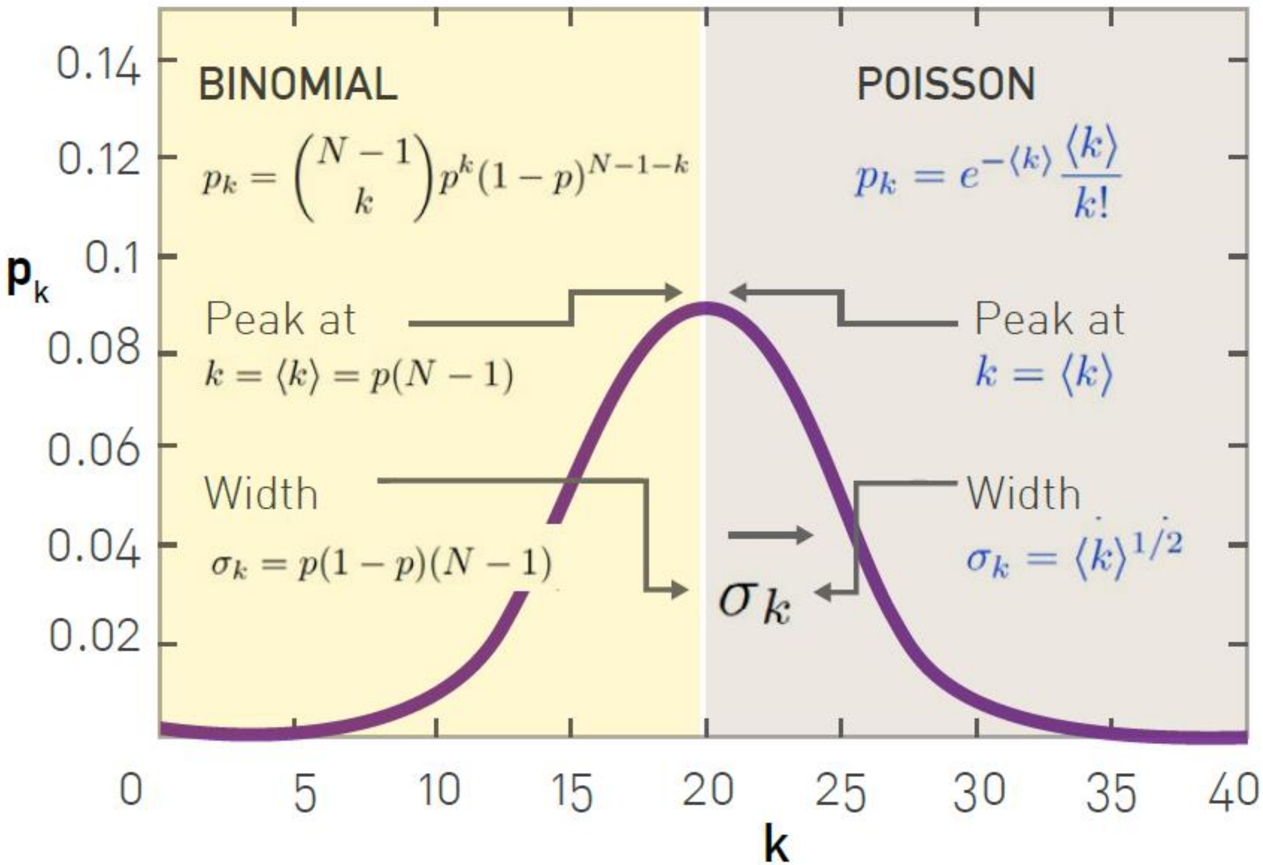
La varianza es igual a la media (!)

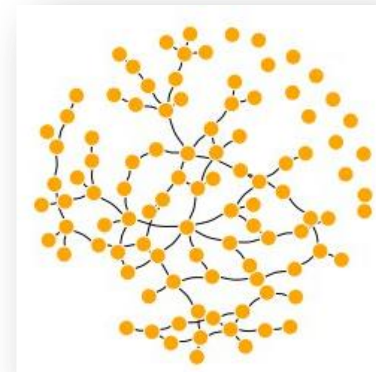
$$\frac{\sigma}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle k \rangle}}$$

G(N,p): Distribución de grado

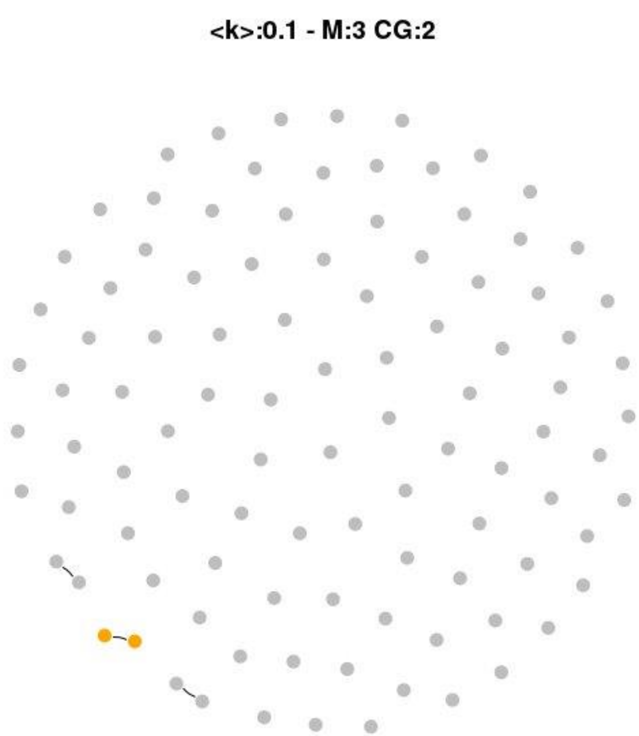
Resultado exacto

Límite N>>1, <k> finito

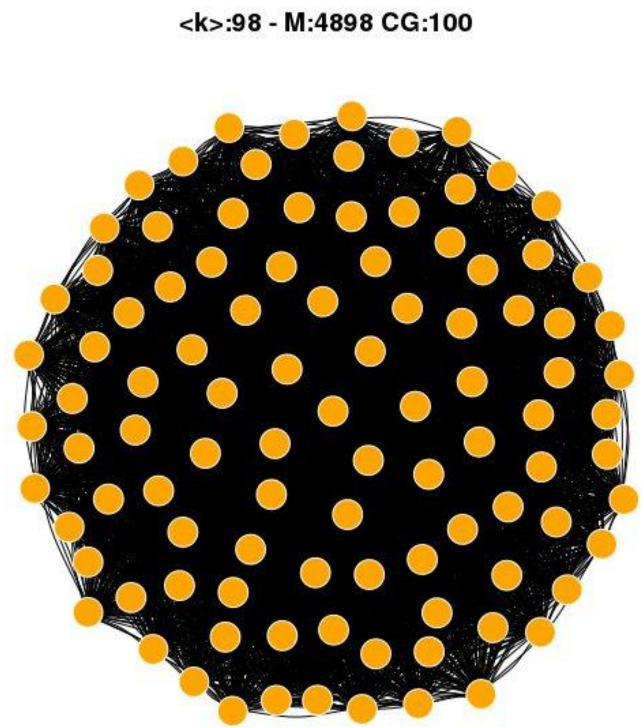




Conectividad de G(N,p)



Como se produce esta transición?



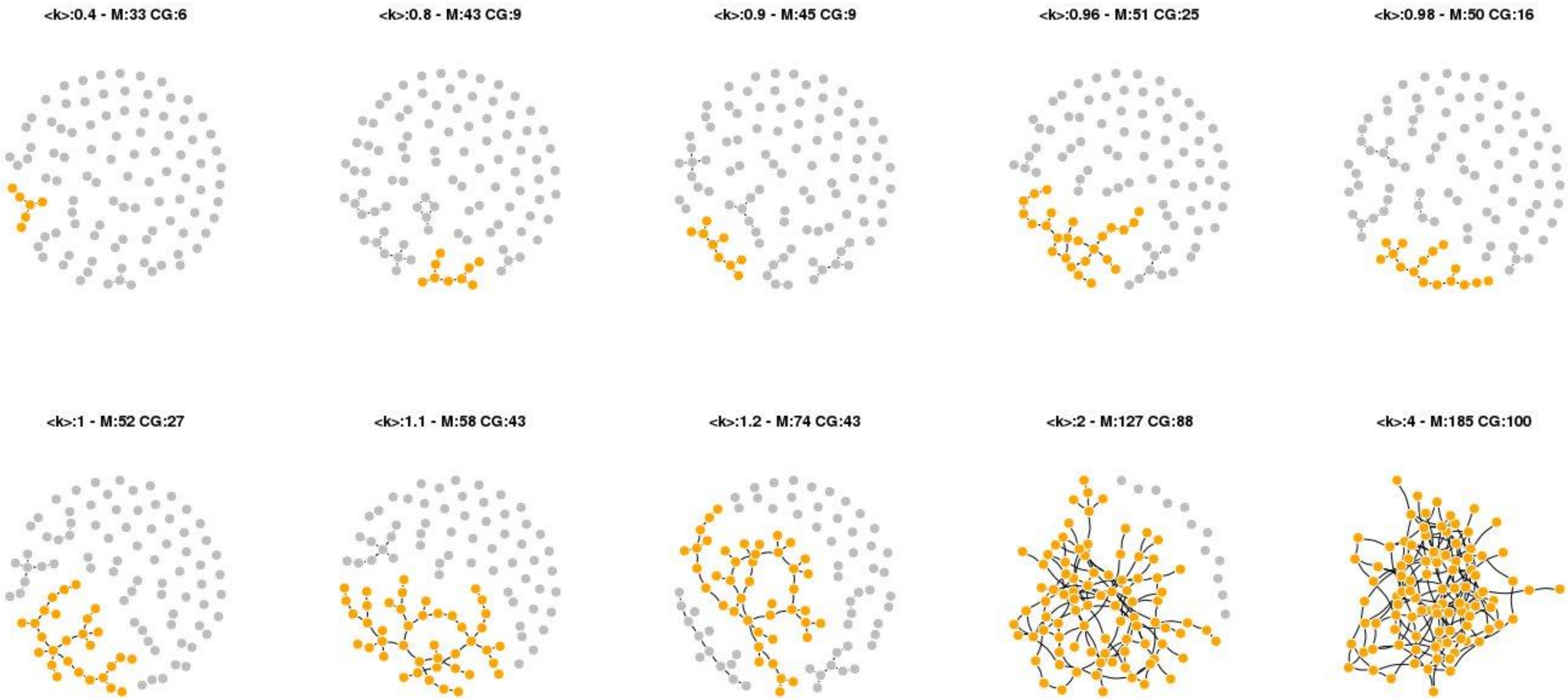
p ~ 0

- Grafo disconexo
- Tamaño componente gigante es una cantidad **intensiva**: o(1)

p ~ 1

- Grafo completamente conexo
- Tamaño componente gigante es una cantidad **extensiva**: o(N)

La transición



- Como es el cambio de régimen |CG| intensivo/extensivo?
- Qué sucede con lo que no es componente gigante...?

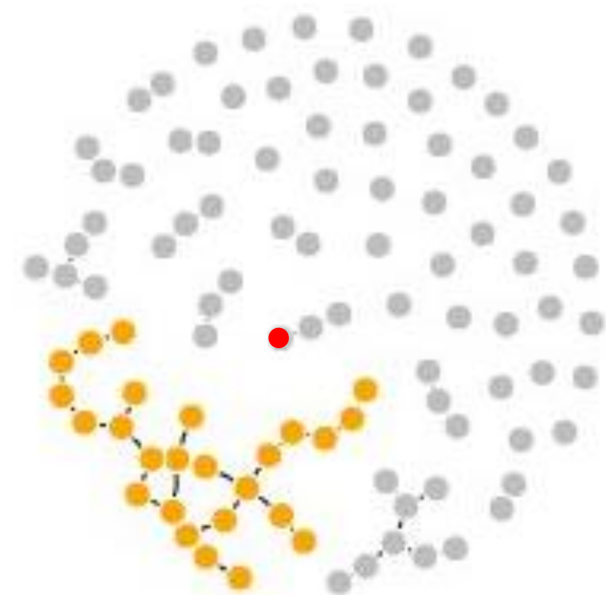
Tamaño de la **C**omponente **G**igante

Sea *u* la fracción de la red que **no** pertenece a la CG (*u*=1 si no hay componente gigante)

Un nodo-i **no** pertenece a la CG si **no** está conectado a ningún vértice que pertenezca.

- Es decir, para todo nodo-j:
  a) i no está conectado a j. Esto ocurre con probabilidad : *(1-p)*

  b) i está conectado a j, pero j no pertenece a la CG. Esto ocurre con probabilidad: *p*u*



Por (a) y (b), la probabilidad de que nodo-i **no pertenezca** al CG, vía el nodo-j resulta :

(1-p) + p u

$$u = [1 - p(1-u)]^{n-1}$$
$$= \left[1 - \frac{c}{n-1}(1-u)\right]^{n-1}$$

Entonces, la probabilidad de que nodo-i **no pertenezca** al CG resulta : $(1-p+pu)^{n-1}$

$$\log u = (n-1)\log\left[1 - \frac{c}{n-1}(1-u)\right]$$
$$\sim -c\,(1-u)$$

$\log(1-x) \sim -x$

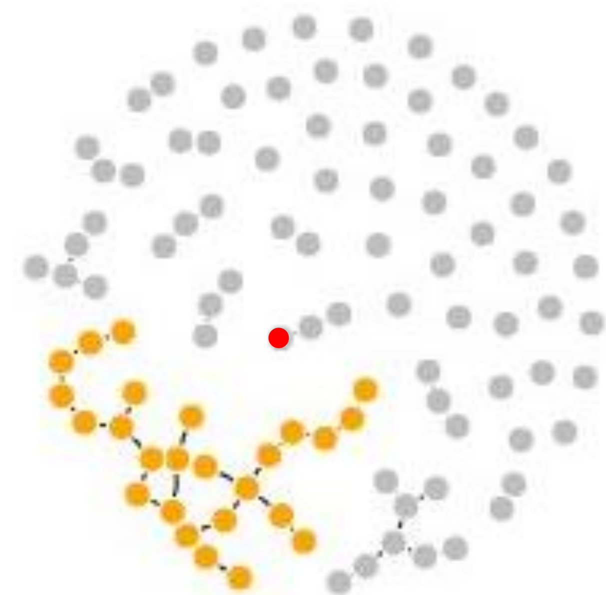
Tamaño de la **C**omponente **G**igante

Sea *u* la fracción de la red que **no** pertenece a la CG (*u*=1 si no hay componente gigante)

Un nodo-i **no** pertenece a la CG si **no** está conectado a ningún vértice que pertenezca.

- Es decir, para todo nodo-j:
  a) i no está conectado a j. Esto ocurre con probabilidad : *(1-p)*

  b) i está conectado a j, pero j no pertenece a la CG. Esto ocurre con probabilidad: $p*u$



Por (a) y (b), la probabilidad de que nodo-i **no pertenezca** al CG, vía el nodo-j resulta :

$$(1-p) + p\,u$$

$$u = [1 - p(1-u)]^{n-1}$$
$$= \left[1 - \frac{c}{n-1}(1-u)\right]^{n-1}$$

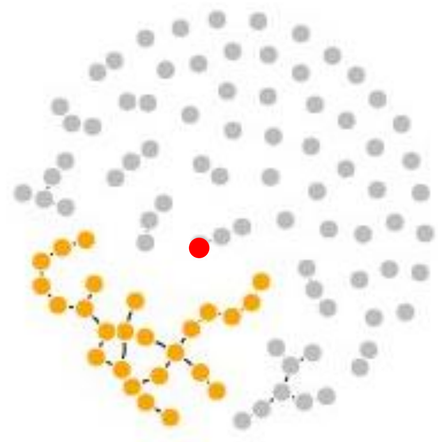
Entonces, la probabilidad de que nodo-i **no pertenezca** al CG resulta : $(1- p + p\,u)^{n-1}$

$$\underline{u \sim e^{-c\,(1-u)}}$$

Tamaño de la **C**omponente **G**igante

$c = \langle k \rangle = p(n-1)$

$u \sim e^{-c\,(1-u)}$



S = 1-u , fracción de nodos en la CG

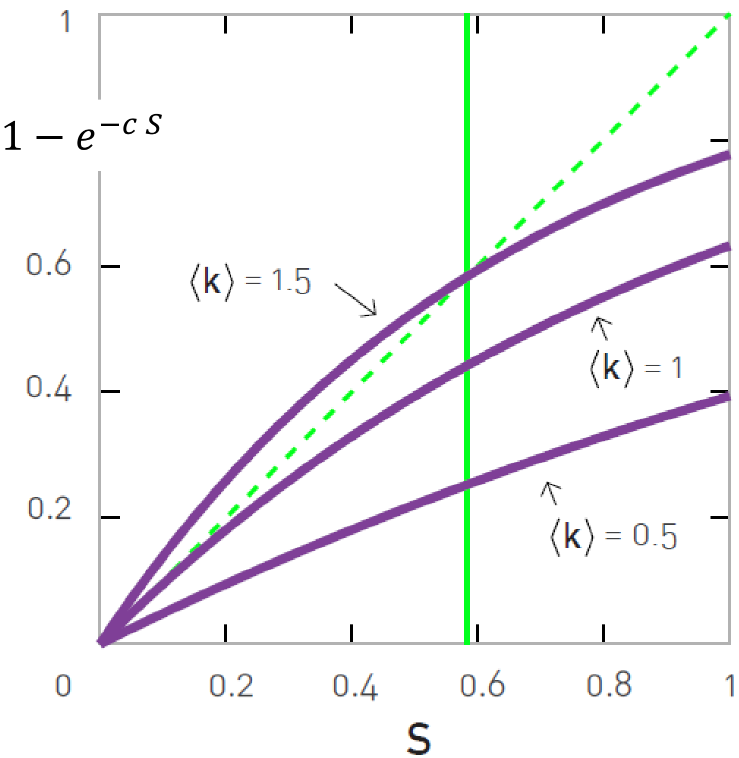
$1 - S \sim e^{-c\,S}$

$\underline{S = \ 1 - e^{-c\,S}}$ (ER 1959)

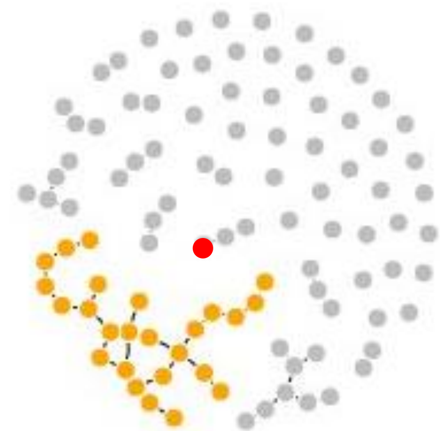
Tamaño de la **C**omponente **G**igante

$$S = 1 - e^{-c\,S}$$

$$y = 1 - e^{-c\,S}$$



$$c = \langle k \rangle = p(n-1)$$



- y(S) es monotona creciente y tiene curvatura negativa
- Hay un **cambio cualitativo** en las soluciones S*=y(S*) para los casos en que la **pendiente en el origen** toma valor **uno**

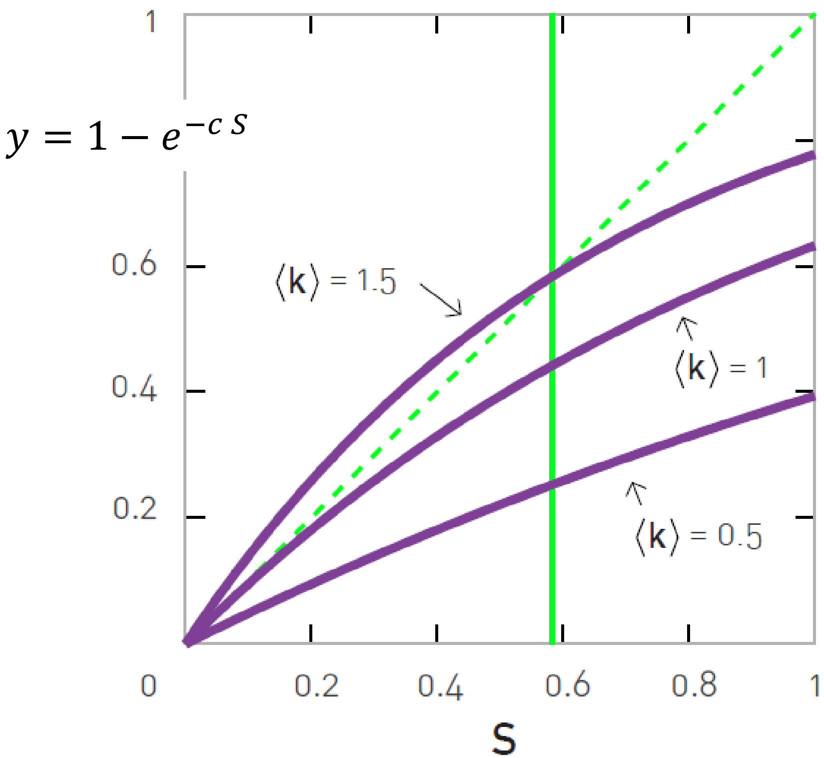
$$\left.\frac{dy}{dS}\right|_{S=0} = \left. c e^{-cS}\right|_{S=0} = c$$

$c<1$ $S^*=0$

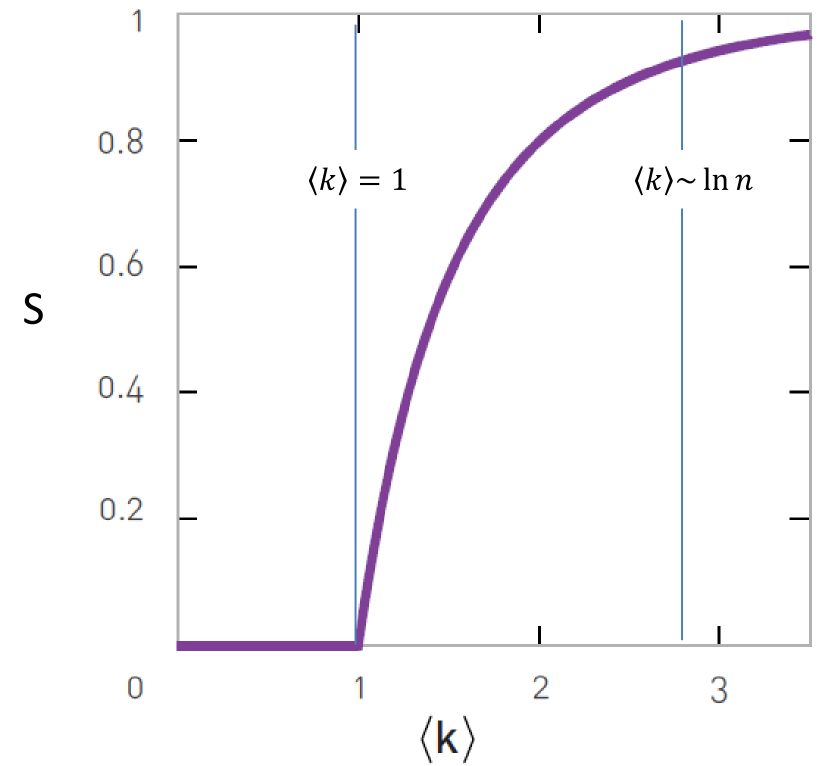
$c\geq 1$ $S^*>0$ ademas de la trivial

Tamaño de la **C**omponente **G**igante

$$S = 1 - e^{-c\,S}$$



Es posible distinguir 4 regimenes



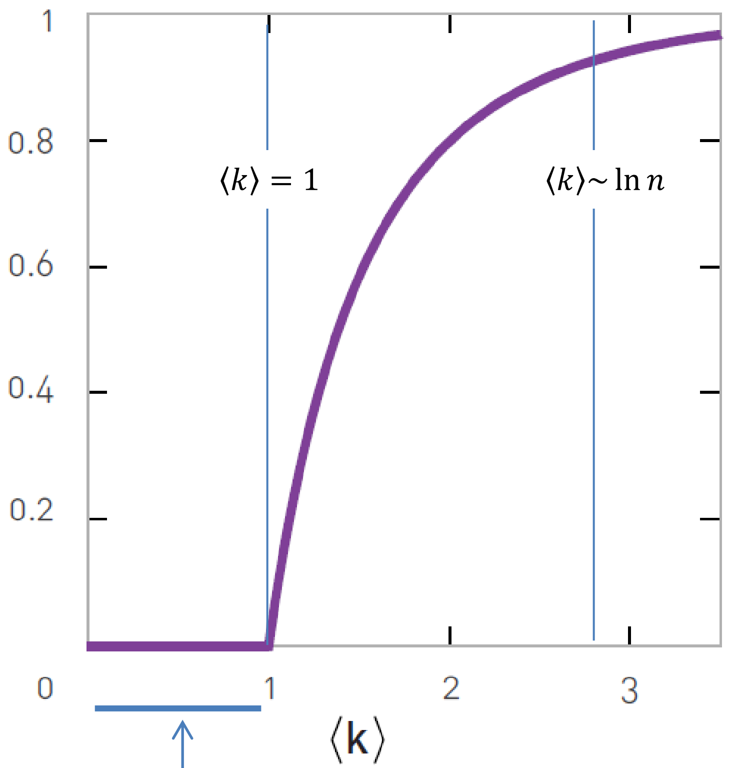
- y(S) es monotona creciente y tiene curvatura negativa
- Hay un **cambio cualitativo** en las soluciones S*=y(S*) para los casos en que la **pendiente en el origen** toma valor **uno**

$$\left.\frac{dy}{dS}\right|_{S=0} = \left.ce^{-cS}\right|_{S=0} = c$$

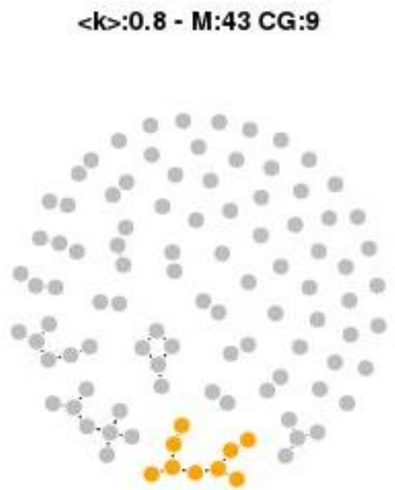
c<1 S*=0

c≥1 S*>0

Conectividad G(N,p). Régimen sub-crítico



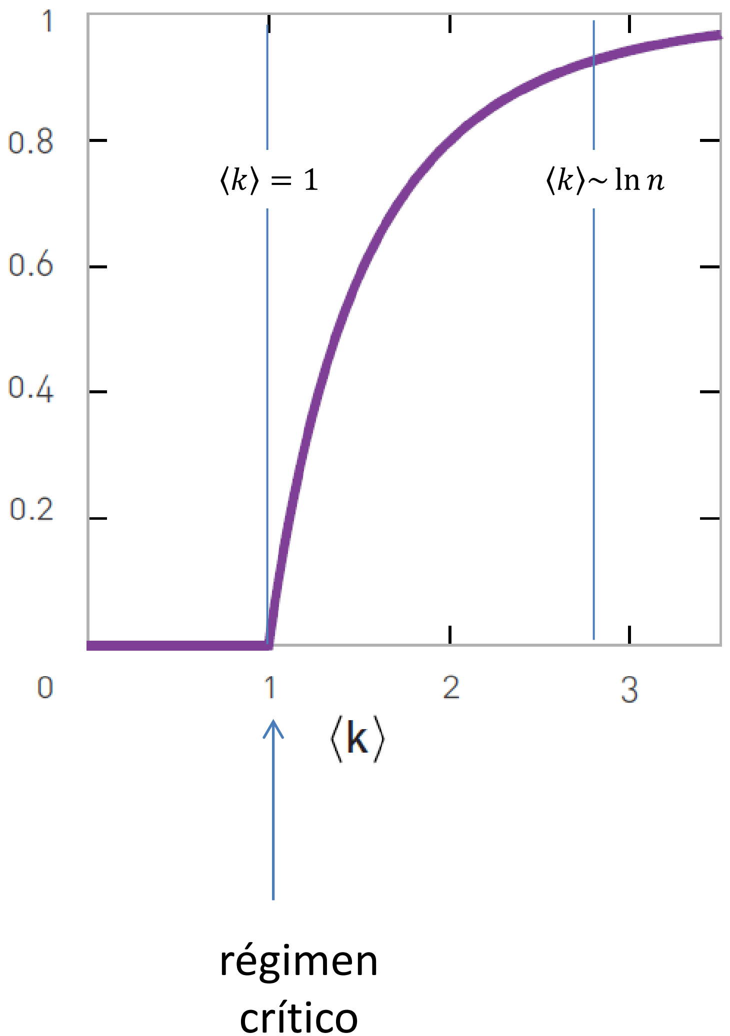
régimen
subcrítico

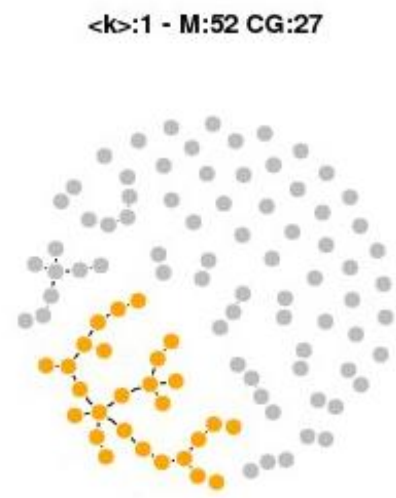


- no hay componente gigante
- componente más gde de tamaño ~ *ln n*
- componentes aislados con distribución de tamaños exponencial

$$p(size) \sim s^{-3/2} e^{-(c-1)s+(s-1)\ln c}$$

Conectividad G(N,p). Régimen crítico





- componente gigante $n_{CG} \sim n^{2/3}$
- componente gigante incipiente $S_{CG} \sim n^{-1/3}$

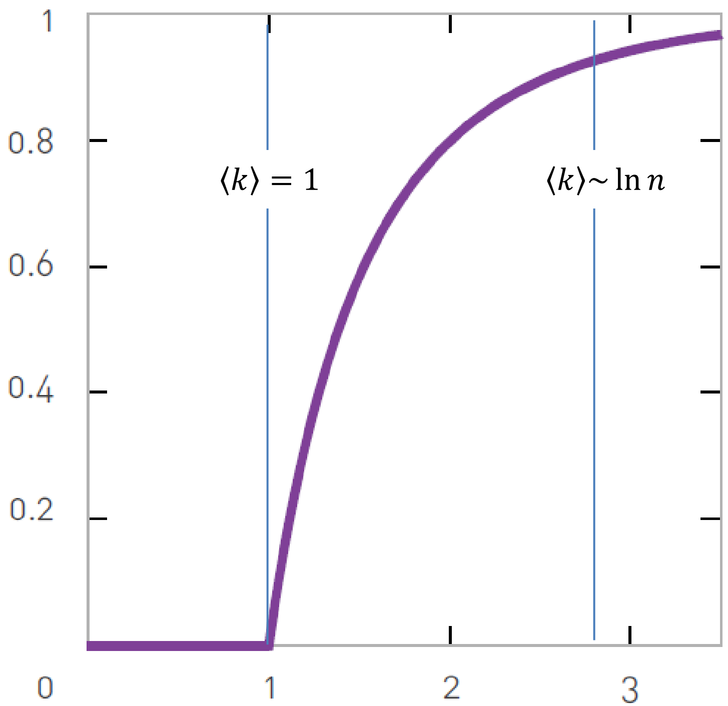
igual…comparar con regimen subcritico:

n=1000: ln n ~ 7 vs $n^{2/3}$ ~ 95

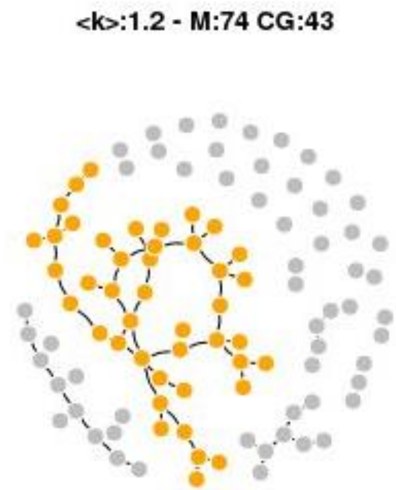
n=10^6 : ln n ~ 14 vs $n^{2/3}$ ~ 10000

- componentes no-gigantes sin loops
- distribución de tamaños de exponentes sigue ley de potencias $p(size) \sim s^{-3/2}$

Conectividad G(N,p). Régimen supercrítico



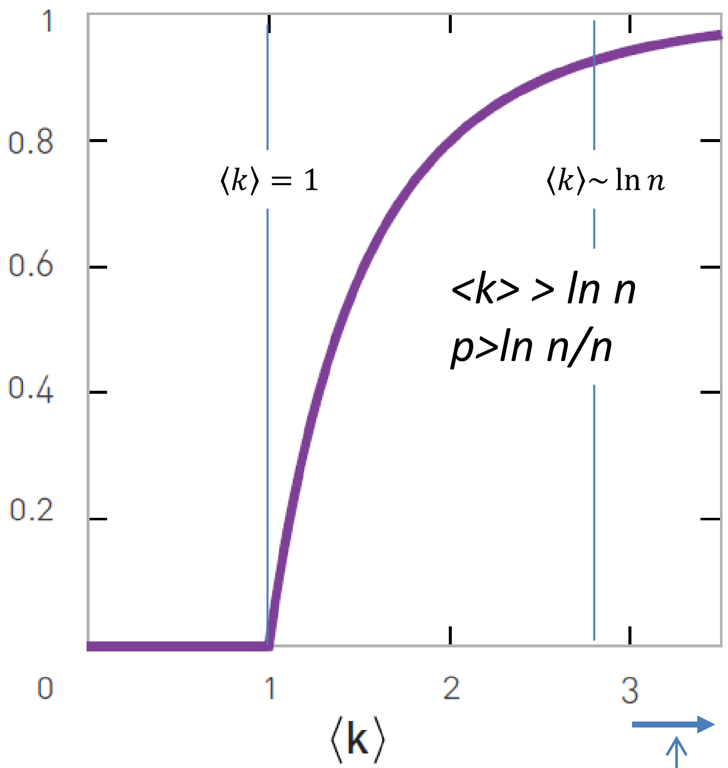
régimen
supercrítico



- componente gigante único $n_{CG} \sim (p - p_c)n$
- componente gigante tiene loops
- otros componentes aislados con distribución de tamaños exponencial

$$p(size) \sim s^{-3/2} e^{-(c-1)s+(s-1)\ln c}$$

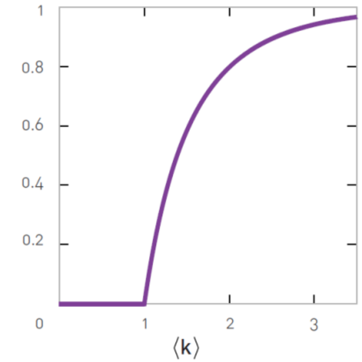
Conectividad G(N,p). Régimen conectado



régimen conectado

- la probabilidad de que un nodo **no** pertenezca a la CG se anula exponencialmente
- una única componente en el grafo

Las demás se quedan piolas



Veamos que cuando existe, sólo existe una **única** componente gigante

- Supongamos que existen 2 CG de tamaños: $S_1.n$ y $S_2.n$
- Nro de posibles pares de vértices (i,j) con i en CG_1 y j en CG_2: $S_1 S_2 n^2$
- Cada uno se conecta con prob: *p*
  no se conecta con prob: *(1-p)*
- Para que haya 2 CGs la probabilidad, ***q***, de que algunos de esos pares **no** se conecte debe ser nula

$$q = (1-p)^{S_1 S_2 n^2} = \left(1 - \frac{c}{n-1}\right)^{S_1 S_2 n^2} \quad \sim e^{-ncS_1S_2}$$

$$\log q = S_1 S_2 \lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1 - \frac{c}{n-1}\right)$$

$$\sim - S_1 S_2 \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{c}{n-1} \sim - ncS_1S_2$$

La probabilidad de que **no** exista vínculo entre S1 y S2 decae exponencilmente

Redes Aleatorias

Familias de redes: G(N,M) , G(N,p)

grado medio $\langle k \rangle = p(n-1)$

nro enlaces $\langle m \rangle = p\,\dfrac{n(n-1)}{2}$

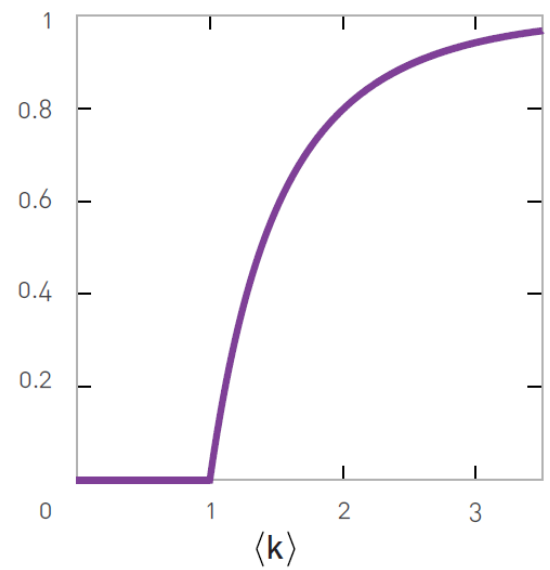
distribucion de grado

$$P_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$P_k = \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

coef. clustering $C = \dfrac{c}{n}$

diametro $\langle d \rangle \sim \dfrac{\ln n}{n}$



$$n_{CG} = \begin{cases} \ln n & c < 1 \\ n^{2/3} & 1 \leq c < \ln n \\ (p-p_c)n & c > \ln n \end{cases}$$

Redes Aleatorias

Familias de redes: G(N,M) , G(N,p)

grado medio $\langle k \rangle = p(n-1)$

nro enlaces $\langle m \rangle = p\,\dfrac{n(n-1)}{2}$

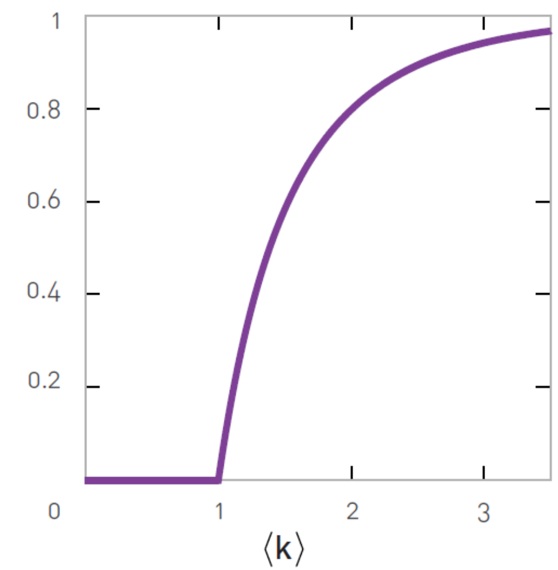
distribucion de grado

$$P_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$P_k = \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

coef. clustering $C = \dfrac{c}{n}$

diametro $\langle d \rangle \sim \dfrac{\ln n}{n}$



$$n_{CG} = \begin{cases} \ln n & c < 1 \\ n^{2/3} & 1 \le c < \ln n \\ (p-p_c)n & c > \ln n \end{cases}$$