

# Relatividad General - 1er. Cuat. 2014

## Guía 1: Relatividad Especial

### Problema 1

Un detector se mueve en el espacio-tiempo de Minkowski siguiendo la línea de universo descrita por ecuaciones paramétricas  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ , ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , siendo  $x^\alpha$  las coordenadas cartesianas), que determinan el siguiente *vector tangente*

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(c \cosh \frac{a\lambda}{c}, c \sinh \frac{a\lambda}{c}, 0, v\right).$$

- Muestre que el parámetro de la curva  $\lambda$  es el tiempo propio  $\tau$  medido a lo largo de esa línea de universo. Por lo tanto el vector tangente dado es la cuadrivelocidad  $U^\alpha$  del detector.
- Integre las ecuaciones de movimiento del detector para obtener la curva que describe. Muestre que el movimiento del detector proyecta una hipérbola en el plano  $t, x$ .
- Verifique que la línea de universo del detector es interior al cono de luz de cualquiera de los eventos pertenecientes a dicha línea. (Dos eventos cualesquiera de una línea de universo de partícula tienen separación “temporal”).
- Caracterice la región del espacio-tiempo que no puede influir sobre el comportamiento del detector.
- En una región del espacio-tiempo atravesada por el detector la temperatura está descrita por la función

$$T(t, x, y, z) = \frac{C t}{x^2 + y^2}.$$

Calcule  $dT/d\tau$  a lo largo de la línea de universo del detector.

### Problema 2

- Obtenga la transformación del vector aceleración  $\vec{a}$  ante un *boost* de Lorentz con velocidad  $\vec{V} = V\hat{x}$ .
- Como caso particular, transforme la aceleración al sistema propio de la partícula (es decir que la velocidad del boost es igual a la velocidad  $\vec{u}$  de la partícula en el instante considerado).
- Compruebe que el movimiento del problema anterior tiene *aceleración propia* constante.

### Problema 3

- Encuentre cómo entran la velocidad  $\vec{u}$  y la aceleración  $\vec{a}$  en la cuadrivelocidad  $U^\alpha \equiv dx^\alpha/d\tau$  y en la cuadiaceleración  $a^\alpha \equiv dU^\alpha/d\tau$ .
- Muestre que  $U \cdot U = g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = U_\alpha U^\alpha = -c^2$ .
- Muestre que  $U^\alpha$  y  $a^\alpha$  son ortogonales (en el sentido de la métrica pseudo-euclidiana  $g_{\alpha\beta}$ ):  $U \cdot a = U^\alpha a_\alpha = 0$ . Como  $U^\alpha$  es siempre temporal sobre cualquier línea de universo de partícula, entonces  $a^\alpha$  es espacial.
- Calcule el invariante  $a \cdot a = a^\alpha a_\alpha$  y relaciónelo con la aceleración propia.

#### Problema 4

Sea  $\Lambda_{\beta}^{\alpha'}$  la matriz correspondiente a un boost de Lorentz de velocidad  $\vec{\beta} = V/c \hat{\mathbf{x}}$ :

$$W^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} W^{\beta},$$

siendo  $W^{\alpha}$  las componentes cartesianas de un cuadrivector cualquiera.

- (a) Escriba las componentes de la matriz.
- (b) Llamemos  $\Lambda_{\beta'}^{\alpha}$  a la matriz que realiza la transformación inversa:

$$W^{\alpha} = \Lambda_{\beta'}^{\alpha} W^{\beta'}, \quad \Lambda_{\gamma'}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\gamma'} = \delta_{\beta}^{\alpha}.$$

Muestre que  $\Lambda_{\beta'}^{\alpha}$  se obtiene cambiando  $V$  por  $-V$  en  $\Lambda_{\beta}^{\alpha'}$ .

#### Problema 5

Componga dos boosts de Lorentz en direcciones ortogonales, el primero con velocidad  $\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{x}}$  y el segundo con velocidad  $\vec{V} = V_y \hat{\mathbf{y}}$ .

- (a) Muestre que los boosts de Lorentz en direcciones distintas no conmutan.
- (b) Muestre que el resultado de la composición no es un boost (ayuda: note que las matrices de los boosts son simétricas).
- (c) Muestre que el resultado de la composición es igual a un boost de velocidad

$$\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{x}} + \gamma(V_x)^{-1} V_y \hat{\mathbf{y}}$$

(composición relativista de ambas velocidades), seguido de una rotación en el plano  $x - y$  (rotación de Wigner). Obtenga el ángulo de la rotación.

- (d) ¿Tiene la rotación de Wigner un análogo clásico?

#### Problema 6

Muestre que el operador D'Alembertiano es invariante.

#### Problema 7

Para una partícula de masa  $m$  y cuadrivelocidad  $U^{\alpha}$  se define el cuadrimpulso como  $p^{\alpha} = mU^{\alpha}$ , de modo que  $p^{\alpha} = (c^{-1}E, \vec{\mathbf{p}})$ . En el caso de un fotón no se puede definir la cuadrivelocidad y el cuadrimpulso viene dado por  $p^{\alpha} = (c^{-1}E, \vec{\mathbf{p}})$ , siendo  $E = h\nu$ , con  $h$  la constante de Planck.

- (a) Muestre que la conservación del cuadrimpulso prohíbe una reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan para dar lugar a un único fotón. Pruebe que la producción de dos fotones está permitida.
- (b) Un fotón de frecuencia  $\nu$  incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es  $m_e$ , saliendo con una frecuencia  $\nu'$  y un ángulo  $\theta$  después del choque (*scattering* de Compton). Muestre que

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta).$$

### Problema 8

Los campos  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{B}}$  integran el tensor de campo electromagnético  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , donde  $A^\alpha = (\phi, \vec{\mathbf{A}})$  es el cuadvivector potencial electromagnético.

- (a) Encuentre cómo aparece la fuerza de Lorentz sobre una carga,  $\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + c^{-1}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}})$ , en la cuadvivfuerza  $K^\alpha = q F^\alpha{}_\beta U^\beta$ .
- (b) Deduzca la ley de transformación de la fuerza  $\vec{\mathbf{F}}$  en Relatividad Especial.
- (c) Concluya que la fuerza  $\vec{\mathbf{F}}$  se transforma igual que  $d\vec{\mathbf{p}}/dt$ .

### Problema 9

La acción de una carga  $q$  de masa  $m$  en un campo electromagnético  $A_\alpha$  es

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} + c^{-1} q \int A_\alpha dx^\alpha.$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Muestre que resulta  $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$  o  $K^\alpha = ma^\alpha$ .

### Problema 10

Las ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse de la variación de la acción

$$S[A^\alpha(x)] = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4\mathbf{x} + \frac{1}{c^2} \int A_\alpha j^\alpha d^4\mathbf{x}$$

donde  $d^4\mathbf{x}$  es el cuadvivolumen en coordenadas cartesianas y  $j^\alpha = (c\rho, \vec{\mathbf{J}})$ .

- (a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la acción electromagnética.
- (b) La transformación de gauge  $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \xi$  no modifica el tensor de campo (¿por qué?). Muestre que las fuentes del campo deben conservar la carga para que la acción  $S[A^\alpha(x)]$  sea invariante ante una transformación de gauge sobre cualquier configuración de campo, sea o no ésta una solución de las ecuaciones de Maxwell. Muestre que este aspecto de las fuentes está contenido también en las ecuaciones de Maxwell ya que el vector  $\partial_\beta F^{\alpha\beta}$  es “automáticamente” conservado.

### Problema 11

Si  $T^{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento,  $T^{\alpha j} dS_j$  es un flujo de  $p^\alpha$  a través de  $d\vec{\mathbf{S}}$  por unidad de tiempo; de modo que las componentes  $T^{ij}$ ,  $i, j, = 1, 2, 3$ , corresponden al tensor de esfuerzos. Atendiendo estas características,

- (a) Escriba el tensor de energía-momento de un fluido ideal en reposo.
- (b) Transforme ese tensor a un sistema donde el fluido se mueve con velocidad  $\vec{\mathbf{u}}$ .

### Problema 12

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (F^\alpha_\lambda F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho})$$

Muestre que este tensor tiene traza nula. Usando las ecuaciones de Maxwell pruebe que el tensor de energía-momento electromagnético se conserva en una región libre de cargas.

### Problema 13

Así como las componentes  $T^{\alpha 0}$  del tensor de energía-momento son densidades de  $p^\alpha$ , y las componentes  $T^{\alpha j}$  dan cuenta de transferencias de  $p^\alpha$  a través de superficies, el tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}$$

contiene las densidades de momento angular en sus componentes  $M^{\alpha\beta 0}$ , y los torques asociados a las transferencias de cantidad de movimiento. Del mismo modo que la conservación de la energía-momento requiere que  $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ , la conservación del momento angular requiere que  $\partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = 0$ . Muestre que esto sólo es posible si el tensor de energía-momento es simétrico.