Relatividad General - 1er. Cuat. 2014

Guía 4: derivada covariante, conexión, curvatura, vectores de Killing

Problema 1

La derivada de una función f en la dirección de un vector $\vec{U}$ es $\nabla_{\vec{U}} f = U^\mu \partial_\mu f$, donde U^μ son las componentes de $\vec{U}$ en la base coordenada $\{\partial_\mu\}$, con $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. La derivada $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ de un vector $\vec{V}$ en la dirección de otro vector $\vec{U}$, implica la derivación de las componentes del vector $\vec{V}$ y de la base a la que esas componentes se refieren: si $\vec{V} = V^\mu\ \vec{e}_\mu$ entonces

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = (\nabla_{\vec{U}} V^\mu)\ \vec{e}_\mu + V^\mu\ (\nabla_{\vec{U}}\ \vec{e}_\mu),$$

donde $\{\vec{e}_\mu\}$ es una base del espacio de vectores en el punto donde se realiza la derivación.

(a) En un espacio euclidiano la base coordenada $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, ...\}$ es una base de versores ortogonales: $\partial_x = \hat{e}_x$, ..., etc. (¿por qué?). Dé argumentos para afirmar que las derivadas de los versores cartesianos son nulas en cualquier dirección. ¿Qué conceptos entraron en sus argumentos? (paralelismo, módulo, etc.)

(b) Conociendo que los versores cartesianos tienen derivada nula es posible derivar cualquier vector en un espacio euclidiano. Así en el plano euclidiano (x, y) definimos

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = (U^\mu \partial_\mu V^x)\hat{e}_x + (U^\mu \partial_\mu V^y)\hat{e}_y.$$

Calcule $\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu$ para los elementos $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ de la base coordenada polar y para los elementos $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ de la base de versores polares.

Nota: para que $\vec{U}$ en $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ indique tan sólo la dirección de derivación se debe cumplir que $\nabla_{f\,\vec{U}}\vec{V} = f\,\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ para toda función f (es decir que las derivadas de las componentes de $\vec{U}$ no intervienen).

Problema 2

Una *derivación covariante* de vectores puede definirse en cualquier variedad diferenciable mediante las derivadas de los elementos de la base de vectores $\{\vec{e}_\alpha\}$. Los valores que damos a las cantidades $\nabla_{\vec{e}_\beta}\vec{e}_\alpha = \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\vec{e}_\lambda$ constituyen una *conexión* sobre la variedad diferenciable. Definiendo $V^\mu{}_{,\nu} \equiv \partial_\nu V^\mu$ y $V^\mu{}_{;\nu} \equiv V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}V^\lambda$ se tiene que

$$(\nabla_{\vec{U}}\vec{V})^\mu = (U^\nu \nabla_{\partial_\nu}\vec{V})^\mu = U^\nu V^\mu{}_{;\nu}.$$

(a) Encuentre cómo se transforman los elementos $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ de la conexión en una base coordenada. Ayuda: la base coordenada cambia según $\partial_{\mu'} = \partial x^\mu/\partial x^{\mu'}\ \partial_\mu$.

(b) Muestre que $V^\mu{}_{;\nu}$ transforma como las componentes de un tensor de tipo $\binom{1}{1}$.

(c) Usando que $W_\mu V^\mu$ es invariante (luego $\nabla_{\vec{U}}(W_\mu V^\mu) = U^\nu \partial_\nu(W_\mu V^\mu)$), demuestre que

$$(\nabla_{\vec{U}}\tilde{W})_\mu = U^\nu W_{\mu;\nu}$$

donde

$$W_{\mu;\nu} = W_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}W_\lambda.$$

Como conclusión obtenga las derivadas covariantes $\nabla_{\partial_\nu}\tilde{d}x^\mu$ de los elementos de la base dual coordenada $\{\tilde{d}x^\mu\}$.

Problema 3

Si la variedad es dotada de una métrica $\mathbf{g}$, entonces queda definida la longitud de un arco de curva como $dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ y podemos hablar de la longitud de la curva $\int dl$. De modo que la curva de longitud mínima resulta de un problema de cálculo variacional. La conexión métrica se define de manera tal que la geodésica ($\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$, donde $\vec{U}$ es tangente a la curva) coincida con la curva de longitud mínima. Por inspección de la ecuación de la geodésica, encuentre que en coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ la conexión métrica se puede escribir como

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha} \right).$$

Notar que la respuesta es única (*conexión de Levi-Civita*) si se pide que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$.

Problema 4

(a) Sea un sistema de coordenadas tal que $g_{0\mu} = 0$, $\forall \mu \neq 0$ y $g_{00} = cte$. Demuestre que las líneas coordenadas asociadas a x^0, es decir las curvas que satisfacen $x^\mu = cte.\ \forall \mu \neq 0$, son geodésicas.

(b) Un *sistema síncrono* (o *coordenadas normales de Gauss*) es aquel donde el intervalo se escribe

$$ds^2 \ = \ -c^2 dt^2 + g_{ik}\, dx^i dx^k, \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Muestre que las líneas coordenadas $x^i = cte.$, $i = 1, 2, 3$, son geodésicas temporales ortogonales a las hipersuperficies $t = cte$, y que la coordenada t mide el tiempo propio sobre estas líneas.

Problema 5

Muestre que el cambio de coordenadas $x^{\mu'} = x^\mu + (1/2)\, \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x_P)\, (x^\nu - x^\nu_P)(x^\lambda - x^\lambda_P) + \mathcal{O}[(x - x_P)^3]$ anula la conexión en el evento P.

Problema 6

Muestre que si la conexión es métrica entonces

(a) $\nabla \mathbf{g} = 0$ (compatibilidad de la métrica con la conexión). Una consecuencia importante de esta propiedad es que la derivada covariante conmuta con la operación de subir y bajar indices: $W_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \Rightarrow (\nabla_{\vec{U}} \tilde{W})_\nu = g_{\mu\nu} (\nabla_{\vec{U}} \vec{V})^\nu$.

(b) El producto escalar entre dos vectores, $\vec{U} \cdot \vec{V} = \mathbf{g}(\vec{U}, \vec{V}) = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$, es invariante frente a transporte paralelo de $\vec{U}$ y $\vec{V}$ en cualquier dirección.

(c) $\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} = (1/2) \partial_\nu (\ln |g|)$, donde g es el determinante de $g_{\mu\nu}$.

(d) $V^\mu{}_{;\,\mu} = |g|^{-1/2} \partial_\mu (|g|^{1/2} V^\mu)$.

(e) $F^{\mu\nu}{}_{;\,\mu} = |g|^{-1/2}\ \partial_\mu (|g|^{1/2} F^{\mu\nu})$ para todo tensor $F^{\mu\nu}$ antisimetrico.

(f) $g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = |g|^{-1/2} \partial_\mu (|g|^{1/2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\nu f)$.

(g) $\mathrm{div}_{\tilde{\Omega}} \vec{V} = V^\mu{}_{;\,\mu}$, donde $\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\ \tilde{d}x^1 \wedge ... \wedge \tilde{d}x^n$ es el volumen métrico.

Ayuda: puede ser útil la relación $\partial_\lambda (\ln |\det a_{\mu\nu}|) = a^{\mu\nu}\ \partial_\lambda (a_{\mu\nu})$.

Problema 7

Dotemos a la esfera S^2 de una conexión cuyas componentes en la base coordenada $\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}$ son

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \operatorname{cotg}\theta,$$

(y cero las restantes).

(a) Muestre que ∂_θ es autoparalelo ($\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = 0$) sobre la esfera, mientras que ∂_φ sólo lo es para $\theta = \pi/2$. Interprete este resultado en términos de las líneas de campo de ambos vectores.

(b) Transporte paralelamente el vector $V(\theta = \theta_0, \varphi = 0) = \partial_\theta$ a lo largo de todo el círculo $\theta = \theta_0$. ¿Cuál es el cambio sufrido por el vector?

(c) Muestre que la conexión dada es la conexión métrica correspondiente a $d\ell^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\; d\varphi^2$.

(d) Calcule la derivada covariante de $\vec{e}_\theta = \partial_\theta$ respecto de $\vec{e}_\varphi = (\operatorname{sen}\theta)^{-1}\partial_\varphi$, y viceversa.

(e) Utilice el resultado para calcular las componentes de la conexión en la base *anholónoma* $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$.

(f) Calcule el tensor de tipo $\binom{1}{1}$ $V^{\mu}{}_{;\nu}$, para $\vec{V} = \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\;\partial_\theta + \operatorname{sen}\theta\;\partial_\varphi$. Calcule el vector $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ con $\vec{U} = \operatorname{sen}\theta\;\partial_\varphi$.

Problema 8

Muestre que en una variedad pseudo-riemanniana, una geodésica que es temporal (espacial, nula) en un punto, es temporal (espacial, nula) en todo punto.

Problema 9

La *torsión* es un tensor $\mathbf{T}$ de tipo $\binom{1}{2}$ asociado a la conexión, definido por la relación

$$\mathbf{T}(\quad; \vec{U}, \vec{V}) = \nabla_{\vec{U}}\vec{V} - \nabla_{\vec{V}}\vec{U} - [\vec{U}, \vec{V}] \qquad \forall\, \vec{U}, \vec{V},$$

donde [,] representa el conmutador.

(a) Para la conexión en S^2 dada en el Problema 7, calcule las componentes de la torsión en la base $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$.

(b) Muestre que en una base coordenada las componentes de la torsión son

$$T^{\lambda}_{\ \mu\nu} = 2\Gamma^{\lambda}{}_{[\nu\mu]}.$$

Problema 10

Una conexión $\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ permite definir el tensor de Riemann, cuyas componentes en una base coordenada son

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\eta\nu}\,\Gamma^{\eta}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\eta\rho}\,\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}$$

de modo que $R^{\lambda}{}_{\mu(\nu\rho)} = 0$. Muestre que la expresión anterior efectivamente se transforma como componentes de un tensor en base coordenada.

Problema 11

Las conexiones con torsión nula se dicen *simétricas* (aunque sólo resultan simétricas las componentes de la conexión en una base coordenada). Muestre que si la torsión es nula entonces

(a) $f_{;\mu\nu} = f_{;\nu\mu}$ para cualquier función f.

(b) $U^\mu V^\nu{}_{;\mu} - V^\mu U^\nu{}_{;\mu} = U^\mu \partial_\mu V^\nu - V^\mu \partial_\mu U^\nu = [U, V]^\nu$.

(c) $R^\lambda{}_{[\mu\nu\rho]} = 0$.

(d) $R^\lambda{}_{\mu[\nu\rho;\,\eta]} = 0$ (identidades de Bianchi). Demuéstrelo en un sistema de coordenadas que anule la conexión en el evento.

(e) $V^\lambda{}_{;\nu\rho} - V^\lambda{}_{;\rho\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} V^\mu$.

Problema 12

Cuando la conexión es métrica el tensor de Riemann queda en la forma

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\rho,\mu\nu} - g_{\lambda\nu,\mu\rho} + g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\mu\rho,\lambda\nu}) + g_{\eta\kappa}(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\eta{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\rho}\,\Gamma^\eta{}_{\lambda\nu})$$

(a) Muestre que $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$

(b) Valiéndose de todas las simetrías del tensor de Riemann, muestre que el número de componentes independientes de $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ es $n^2(n^2-1)/12$, siendo n la dimensión del espacio.

Problema 13

(a) Muestre que la superficie de un cilindro es plana ($R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0$).

(b) Calcule las componentes del tensor de Riemann para la esfera S^2 (de 2 dimensiones):

$$d\ell^2 = a^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\ d\varphi^2).$$

(c) Calcule las componentes del tensor de Riemann para la esfera S^3:

$$d\ell^2 = a^2(d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\ d\varphi^2)).$$

Problema 14

El tensor de Riemann en $n = 2$ y $n = 3$ dimensiones tiene 1 y 6 componentes independientes respectivamente. En el primer caso el tensor de Riemann se escribe en función del escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, siendo $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ el tensor de Ricci. En el segundo caso el tensor de Riemann se escribe en función del tensor de Ricci (que tiene 6 componentes independientes en $n = 3$). Las expresiones respectivas son:

$$n = 2: \qquad R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{R}{2}\,(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$$

$$n = 3: \qquad R_{\lambda\mu\nu\rho} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$$

En $n \geq 4$ se define el tensor de Weyl $C^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$ en forma tal que

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = C_{\lambda\mu\nu\rho} + \frac{1}{n-2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g_{\lambda\nu}g_{\nu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}),$$

por lo que el tensor de Riemann queda completamente determinado por los tensores de Ricci y de Weyl.

(a) Verifique las expresiones anteriores para las esferas S^2 y S^3.

(b) Verifique que $C^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho} = 0$.

(c) Muestre que dos métricas relacionadas por una transformación conforme $\overline{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$ tienen el mismo tensor de Weyl. Ayuda: use que $\overline{R}^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho} = \Omega^{-2} R^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho} + \delta^{[\lambda}{}_{[\nu}\, \Omega^{\mu]}{}_{\rho]}$, siendo $\Omega^{\mu}{}_{\rho} \equiv 4\,\Omega^{-1}\,(\Omega^{-1})_{\,;\rho\eta}\, g^{\mu\eta} - 2\, g^{\eta\chi}\,(\Omega^{-1})_{\,;\eta}\,(\Omega^{-1})_{\,;\chi}\,\delta^{\mu}_{\rho}$.

Problema 15

Sobre la superficie de una esfera construya un "cuadrilátero" que tenga por lados el ecuador, el paralelo $\theta_0 = \pi/2 - \delta\theta$ y los meridianos $\varphi = 0$ y $\varphi = \delta\varphi$. Transporte paralelamente, a lo largo de ese camino cerrado, un vector inicialmente igual a $\partial/\partial\theta$ (use el resultado del Problema 7), y compare el resultado con la expresión $\delta V^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu\varphi\theta} V^{\nu}\, \delta\varphi\, \delta\theta$.

Problema 16

El tensor de Riemann puede ser definido geométricamente como un operador $\mathbf{R}(\ ;\ ,\ ,\ )$ con una "entrada" para 1-formas y tres entradas para vectores. De manera que si ocupamos las entradas para vectores, $\mathbf{R}(\ ;\vec{W},\vec{U},\vec{V})$ se comporta como un vector, que se define como

$$\mathbf{R}(\ ;\vec{W},\vec{U},\vec{V}) = [\nabla_{\vec{U}}, \nabla_{\vec{V}}]\vec{W} - \nabla_{[\vec{U},\vec{V}]}\vec{W}$$

donde $[\vec{U},\vec{V}]^{\nu} = (\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V})^{\nu} = U^{\mu}\partial_{\mu}V^{\nu} - V^{\mu}\partial_{\mu}U^{\nu}$ es la derivada de Lie de $\vec{V}$ en la dirección de $\vec{U}$.

(a) Verifique que, así definido, $\mathbf{R}(\ ;\ ,\ ,\ )$ tiene las componentes correctas en un sistema de coordenadas donde se anula la conexión en el evento.

(b) Utilice esta forma de presentar el tensor de Riemann para obtener sus componentes en la base ortonormal de la esfera S^2 de radio a: $\{\vec{e}_{\theta} = a^{-1}\,\partial_{\theta}\,,\ \vec{e}_{\varphi} = a^{-1}\,(\operatorname{sen}\theta)^{-1}\partial_{\varphi}\}$

(c) Se desea averiguar si dos geodésicas vecinas inicialmente paralelas se mantienen siempre paralelas (por ejemplo, los meridianos de una esfera son paralelos en el ecuador pero no lo son en otras latitudes). Con ese fin definimos un campo vectorial $\vec{D}$ cuyas líneas de campo unan puntos de igual tiempo propio τ sobre las geodésicas de vector tangente $\vec{U} = d/d\tau$ (con $\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$). Además definimos la parametrización de las líneas de $\vec{D} = d/d\lambda$ en forma tal que cada geodésica queda identificada por un valor de λ. Note que esto significa que los paramétros τ y λ funcionan como coordenadas ("cierran cuadriláteros"), es decir que $[\vec{D},\vec{U}] = 0$ (los vectores de una base coordenada conmutan). Inicialmente es $\nabla_{\vec{D}}\vec{U} = 0$ (las geodésicas vecinas son paralelas: $\vec{U}$ se transporta paralelamente en la dirección de $\vec{D}$). Para averiguar si este paralelismo se mantiene a lo largo de las geodésicas deberíamos calcular $\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{D}}\vec{U})$. De acuerdo a todo lo dicho resulta que $\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{D}}\vec{U}) = \mathbf{R}(\ ;\vec{U},\vec{U},\vec{D})$. Por otro lado si la torsión es nula y los vectores $\vec{U}$, $\vec{D}$ conmutan es $\nabla_{\vec{D}}\vec{U} = \nabla_{\vec{U}}\vec{D}$. Finalmente obtenemos que

$$\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{U}}\vec{D}) = \mathbf{R}(\ ;\vec{U},\vec{U},\vec{D})$$

que es la ecuación de la *desviación geodésica*. En las geometrías planas el tensor de Riemann es nulo y no hay desviación geodésica (dos geodésicas inicialmente paralelas lo son siempre). Verifique la ecuación de la desviación geodésica sobre una esfera usando $\vec{U} = \partial_\theta$, $\vec{D} = \partial_\varphi$.

(d) Note que el primer miembro de la ecuación anterior tiene la forma de una aceleración relativa. Compare con la aceleración relativa experimentada por dos partículas vecinas en caída libre en un campo gravitatorio no uniforme (este cálculo es newtoniano).

Problema 17

Llamamos vector de Killing a todo vector $\vec{K}$ tal que $\mathcal{L}_{\vec{K}}\mathbf{g} = 0$.

(a) Muestre que, en general, $\vec{K}$ es un vector de Killing si

$$K_{\mu;\nu} \;+\; K_{\nu;\mu} \;=\; 0.$$

(b) Muestre que la ecuación anterior corresponde a $K^\rho g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho} K^\rho{}_{,\nu} + g_{\nu\rho} K^\rho{}_{,\mu} = 0$.

(c) Muestre que si un vector de Killing $\vec{K}$ coincide con un elemento de la base coordenada, por ejemplo $\vec{K} = \partial_1$, entonces $\partial g_{\lambda\rho}/\partial x^1 = 0, \quad \forall \lambda, \rho$.

(d) La conservación de una variable dinámica no sólo depende de la existencia de una simetría del potencial: también la métrica debe poseer esa simetría. Sea una partícula descripta por el Hamiltoniano $H = (1/2)\, g^{ij}(q^k)\, p_i\, p_j \,+\, \Phi(q^k)$. Muestre que si $\vec{K}$ es un vector de Killing de $\mathbf{g}$ y Φ es constante a lo largo de $\vec{K}$ ($K^i \partial_i \Phi = 0$), entonces se conserva $p_{\vec{K}} \equiv K^i p_i$, que es el momento conjugado al parámetro λ de las líneas de $\vec{K}$ ($\{f(\lambda), p_{\vec{K}}\} = df/d\lambda$).

(e) En la ecuación de la geodésica mostrar que si ∂_μ es un vector de Killing entonces se conserva $p_\mu = g_{\mu\nu}\, m\, U^\nu$.

Problema 18

Sea $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento de un sistema físico espacialmente localizado. Sea $\vec{K}$ un vector de Killing del espacio-tiempo. Muestre que se conserva la cantidad $\int T^{\mu\nu}\, K_\mu\, d\Sigma_\nu$, es decir que toma el mismo valor sobre cualquier hipersuperficie espacial Σ. (Ayuda: muestre que el campo vectorial $P^\mu \equiv T^{\mu\nu}\, K_\mu$ tiene divergencia nula y aplique el teorema de la divergencia).