

Relatividad General - 1er. Cuat. 2015

Guía 6: ecuaciones de Einstein, solución de Schwarzschild

Problema 1

Según el *teorema de Birkhoff* la única solución de las ecuaciones de Einstein de vacío ($T^{\mu\nu} = 0$) con simetría esférica es la geometría de Schwarzschild:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

donde M es una constante de integración.

- Use el teorema de Birkhoff para concluir que la geometría interior a una cáscara esférica es minkowskiana, y que no existe radiación monopolar gravitatoria.
- Para comprender la estructura causal de la geometría de Schwarzschild, dibuje conos de luz en un gráfico ct vs. r . Tenga en cuenta que la coordenada r es temporal si $r < 2GMc^{-2}$; en esta región elija los conos futuros en forma tal que un rayo de luz no pueda traspasar el *horizonte de eventos* $r = 2GMc^{-2} \equiv r_S$.
- Una fuente de luz en fija en la posición $r_f > r_S$, θ_o , φ_o emite con frecuencia ν_f . Muestre que un observador fijo en $r_{obs} > r_f$, θ_o , φ_o ve la frecuencia corrida al rojo (corrimiento al rojo gravitatorio).
- ¿Cuáles son las cuadrifuerzas necesarias para mantener la fuente y el observador en sus respectivas posiciones?

Problema 2

Considere el paraboloides de revolución del espacio euclidiano tridimensional generado por la parábola $r = r_S + z^2(4r_S)^{-1}$ (aquí r y z son las coordenadas cilíndricas habituales y r_S es un parámetro de la parábola). Calcule la distancia euclidiana sobre el paraboloides y compare con la métrica de Schwarzschild.

Problema 3

Considere la geometría de Schwarzschild, escrita como en el Problema 1.

- Defina una nueva coordenada radial \bar{r} a través de la expresión

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{GM}{2c^2 \bar{r}}\right)^2$$

y halle la nueva forma de la métrica.

- Defina las coordenadas $x = \bar{r} \cos \phi \sin \theta$, $y = \bar{r} \sin \phi \sin \theta$, $z = \bar{r} \cos \theta$, de modo que

$$d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Estas coordenadas se denominan *isotrópicas*. Halle la expresión de la métrica en estas coordenadas, y luego de tomar el límite $\bar{r} \rightarrow \infty$ compare con la geometría de correspondiente a la región de campo débil estudiada en la Guía 5.

Problema 4

Demostrar que la órbita circular de una partícula en la geometría de Schwarzschild satisface que $(d\varphi/dt)^2 = MGr^{-3}$ (3ra. Ley de Kepler).

Problema 5

- (a) Partiendo de $p_\mu p^\mu + m^2 c^2 = 0$ y aprovechando que p_t es una constante de movimiento, obtenga una ecuación de conservación de la energía para una partícula que cae radialmente en la geometría de Schwarzschild. Muestre que la velocidad $dr/d\tau$ cumple la misma ecuación de conservación que la velocidad radial en la teoría de Newton.
- (b) Muestre que el tiempo propio de viaje entre un r finito y la singularidad $r = 0$ es finito.
- (c) Obtenga la ecuación de movimiento $r = r(t)$ para una partícula inicialmente en reposo en el infinito.

Problema 6

Una partícula cae radialmente hacia el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild de masa M siguiendo una geodésica con $p_0 = 0,95 mc$.

- (a) Encuentre el tiempo propio requerido para viajar desde $r = 3Mgc^{-2}$ hasta $r = 2Mgc^{-2}$.
- (b) Encuentre el tiempo propio requerido para viajar desde $r = 2Mgc^{-2}$ hasta $r = 0$.
- (c) Cuando pasa por $r = 2,001Mgc^{-2}$ la partícula envía un fotón radialmente a un observador distante estacionario ($r_{obs} = cte.$). Calcule el corrimiento al rojo de la frecuencia del fotón. No olvide tener en cuenta la contribución proveniente del efecto Doppler debido a la velocidad de la partícula.

Problema 7

- (a) Escribir la ecuación para la órbita de una partícula en la geometría de Schwarzschild y encuentre los rangos de las constantes de integración E, L para los cuales la órbita es ligada o de tipo hiperbólico.
- (b) ¿Cuál es el radio de la órbita estable más próxima al horizonte de eventos?

Problema 8

Estudie las trayectorias de los fotones en la geometría de Schwarzschild. Demuestre que existe una órbita circular para fotones. Encuentre que el radio de la misma es $r_f = 3Mgc^{-2}$ y muestre que dicha órbita es inestable. Ayuda: utilice que $p_\mu p^\mu = 0$ y aproveche las magnitudes conservadas.

Problema 9

El conjunto de todas las órbitas inestables de fotones en la geometría de Schwarzschild forma una esfera, que se denomina esfera de fotones, de radio $r_f = 3MGc^{-2}$. Muestre que el parámetro de impacto de un fotón proveniente del infinito debe ser $b_f = 3\sqrt{3}MGc^{-2}$ para que el mismo incida justo sobre la esfera de fotones.

Nota: Los rayos de luz que tengan un parámetro de impacto menor que b_f serán atrapados, de modo que el radio aparente de un agujero negro en un fondo luminoso es $R_{ap} = b_f = 3\sqrt{3}MGc^{-2}$. La región definida por $r \leq R_{ap}$ resulta entonces completamente oscura, correspondiendo a la llamada *sombra* del agujero negro.

Problema 10

La “singularidad” de la métrica de Schwarzschild en $r = 2M$ no resulta ser física sino una patología del sistema de coordenadas. Por lo tanto, resulta apropiado hallar un nuevo sistema de coordenadas que evite dicha patología. A continuación se dan algunos ejemplos (en unidades geometrodinámicas: $c = 1 = G$). Para cada uno de ellos, verifique la nueva expresión para la métrica y realice un diagrama espacio-tiempo mostrando los conos de luz.

(a) Coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$\tilde{U} = t - r^*, \quad \tilde{V} = t + r^*, \quad \text{con } r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|.$$

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes: $(r, \tilde{V}, \theta, \phi)$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2 d\Omega^2$$

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes: $(r, \tilde{U}, \theta, \phi)$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{U}^2 - 2d\tilde{U}dr + r^2 d\Omega^2$$

(b) Coordenadas de Kruskal-Szekeres: (v, u, θ, ϕ)

$$\text{Si } r > 2M : \quad u = M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right), \quad v = M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right)$$

$$\text{Si } r < 2M : \quad u = M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right), \quad v = M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right)$$

$$ds^2 = - \frac{32M}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2$$

Problema 11

Es trabajoso (pero no difícil) ver que las componentes no nulas del tensor de Riemann correspondiente a la geometría de Schwarzschild (en unidades $c = 1 = G$) son

$$R^t{}_{rtr} = -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1},$$

$$R^t{}_{\theta t \theta} = \frac{R^t{}_{\varphi t \varphi}}{\sin^2 \theta} = \frac{M}{r^5},$$

$$R^\theta{}_{\varphi \theta \varphi} = \frac{2M \sin^2 \theta}{r^5},$$

$$R^r{}_{\theta r \theta} = \frac{R^r{}_{\varphi r \varphi}}{\sin^2 \theta} = -\frac{M}{r^5},$$

y aquellas obtenidas a partir de las simetrías del mismo. La divergencia de estas componentes en $r = 0$ no garantiza la existencia de una singularidad, ya que podría ser sólo un problema de coordenadas. Calcule el invariante de Kretschmann, definido por

$$K = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu},$$

y utilícelo para mostrar que la singularidad en $r = 0$ es real y no un problema de coordenadas. Nota: Recuerde que los escalares son independientes del sistema de coordenadas utilizado.

Problema 12

Una estrella tiene un radio mayor que el radio de Schwarzschild correspondiente a su masa. La métrica de Schwarzschild corresponde entonces a la geometría exterior a la misma. Encuentre la solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el interior de un fluido ideal con $\rho = \text{cte}$. Esta solución corresponde a un modelo sencillo, aunque poco realista, del interior de una estrella (ver *A first course in General Relativity*, B.F.Schutz, Capítulo 10).