Relatividad General - 1er. Cuat. 2015

Guía 7: cosmología; otros tópicos

Problema 1

Considere un espacio-tiempo cuyo intervalo es $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\ell^2$, donde $d\ell^2$ es un elemento de arco isótropo y homogéneo (cada hipersuperficie t = cte. es un espacio de 3 dimensiones isótropo y homogéneo). Considere dos puntos P y Q de coordenadas espaciales fijas.

(a) Verifique que dos partículas libremente gravitantes inicialmente en reposo en P y Q, permanecerán en P y Q.

(b) Muestre que la velocidad relativa entre los puntos, debida a que a cambia con t, es proporcional a la distancia entre los mismos.

(c) Calcule el corrimiento de frecuencia $z = (\nu_{fuente} - \nu_{obs})/\nu_{obs}$ para un rayo de luz emitido en una galaxia en P y recibido en otra galaxia en Q. Muestre que si $z \ll 1$ es $z \cong c^{-1} H\, \sigma \cong c^{-1}\, \dot{\sigma}$ donde H es la "constante" de Hubble y σ es la distancia entre las galaxias.

Problema 2

En la geometría del problema anterior plantee las ecuaciones de conservación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ para un fluido perfecto. Resuelva para una ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde p es la presión, ρ es la densidad de energía y ω es una constante.

Problema 3

Dado un modelo de Friedman-Robertson-Walker espacialmente plano y sin constante cosmológica, con una ecuación de estado $p = \omega\rho$, demuestre que si $\omega \neq -1$ la densidad de energía ρ es proporcional a $1/t^2$, donde t es el tiempo.

Problema 4

Muestre que en un modelo de Friedman-Robertson-Walker espacialmente cerrado dominado por materia no relativista, un rayo de luz que viaja desde que el universo comenzó a expandirse completa una vuelta al universo justo en el momento del recolapso. Mostrar también que en un modelo con radiación solamente, el rayo de luz sólo llega a recorrer medio universo antes de que este recolapse.

Problema 5

Suponga un universo isótropo, homogéneo, con constante cosmológica Λ, conteniendo materia en forma de polvo (presión nula), y muestre que existe una solución cerrada estática para la métrica pero que es inestable (universo de Einstein).

Problema 6

Suponga un universo isótropo, homogéneo, espacialmente plano y vacío, con constante cosmológica Λ (la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein equivale a un tensor de energía-momento isótropo $T_{\mu\nu} = -[\Lambda c^4/(8\pi G)]g_{\mu\nu}$, que es el que correspondería a un fluido perfecto con ecuación de estado $p = -\rho$).

(a) Muestre que la expansión es acelerada y obtenga la constante de Hubble H (en este caso H es verdaderamente constante).

(b) Encuentre un sistema de coordenadas en el cual la solución hallada resulta estática (universo de de Sitter).

Problema 7

Mediciones recientes indican que el universo es espacialmente plano, y en su etapa actual se expande aceleradamente con $\ddot{a}\,a/\dot{a}^2 \sim 0,6$. Teniendo en cuenta que la densidad de materia es $\rho c^{-2} \sim 3 \times 10^{-27}$ kg m^{-3} (incluyendo materia oscura), y que la presión de la materia es despreciable, obtenga el valor de constante cosmológica que sería necesario para justificar el valor del parámetro de aceleración.

Problema 8

La solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein, con masa M y carga eléctrica Q, viene dada por la métrica de Reissner-Norsdström:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right)$$

donde las unidades son tales que $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$.

(a) Verifique que esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-momento correspondiente a un campo eléctrico radial $\mathbf{E} = (Q/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ y sin campo magnético.

(b) A partir de los ceros de g_{00}, vea que la geometría tiene dos horizontes, con radios $r_- < r_+$, denominados interior y exterior, respectivamente.

(c) ¿Qué sucede con los horizontes si $|Q| = M$ y si $|Q| > M$?

Problema 9

Sea el espacio-tiempo cuya métrica viene dada por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2 + \left(r_0^2 + l^2\right)\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right),$$

donde r_0 es una constante, $-\infty < t < \infty$, $-\infty < l < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Nota: Esta geometría se denomina agujero de gusano de Ellis.

(a) Interprete el significado físico de las coordenadas $\{t, l, \theta, \varphi\}$.

(b) Describa el espacio-tiempo, indicando sus simetrías, si tiene o no horizontes, cómo son sus regiones asintóticas ($l \to \pm\infty$), etc.

(c) A tiempo fijo, caracterice las superficies con $l = cte$. ¿Qué sucede con el área de las mismas al ir modificando la coordenada l? En particular, analice el caso $l = 0$.

(d) Verifique que las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G^t{}_t = -G^l{}_l = G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = \frac{r_0^2}{\left(r_0^2 + l^2\right)^2}.$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein $G^\mu{}_\nu = (8\pi G/c^4)T^\mu{}_\nu$, obtenga la densidad de energía ρ, la presión radial p_r y la presión tangencial p_t, suponiendo un fluido cuyo tensor de energía-momento es $T^\mu{}_\nu = diag\{-\rho, p_r, p_t, p_t\}$. ¿Qué sucede con los signos de la densidad de energía y de las presiones?

Problema 10

Considere la solución estática con simetría cilíndrica de las ecuaciones de Einstein en vacío, que (en unidades tales que $G = c = 1$) se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\sigma} dt^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\sigma+2\sigma^2} \left(dr^2 + dz^2\right) + W_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\sigma} r^2 d\theta^2,$$

donde $r_0 > 0$, W_0 y σ son constantes.
(a) Halle cuáles son las componentes que se conservan del cuadrimpulso de una partícula de masa m que se mueve libremente en esta geometría.
(b) Obtenga una expresión para la trayectoria de dicha partícula, para un movimiento en un plano con $z = cte$.
(c) Encuentre los valores de σ para los cuales es posible una trayectoria circular en dicho plano.

Problema 11

Los *diagramas de Penrose* constituyen una excelente herramienta para analizar propiedades *globales* del espacio-tiempo. El punto fundamental del método es la realización de una transformación de coordenadas que permite mapear el infinito en un valor finito. Realizando los cambios de coordenadas que se indican (en unidades tales que $G = c = 1$), verifique el resultado para el intervalo, y realice los diagramas de Penrose graficando las distintas "regiones del infinito" en las coordenadas (ψ, ξ).

(a) Espacio-tiempo de Minkowski. Carta de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ):

$$t + r = C \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi + \xi) \qquad t - r = C \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi - \xi)$$

$$ds^2 = \frac{C^2(-d\psi^2 + d\xi^2)}{4\cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi) \cos^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} + r^2 d\Omega^2$$

(C es una constante arbitraria con unidades de longitud).

(b) Espacio-tiempo de Schwarzschild. Carta de coordenadas de Kruskal-Szekeres (v, u, θ, ϕ):

$$v + u = M \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi + \xi) \qquad v - u = M \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi - \xi)$$

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \frac{e^{-r/2M}(-d\psi^2 + d\xi^2)}{4\cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi) \cos^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} + r^2 d\Omega^2$$

(ver *Gravitation*, C.Misner, K.Thorne y J.A.Wheeler, Freeman (1973), pags. 916-920).

Problema 12

En la teoría de la gravitación de Newton, el momento angular de la fuente no afecta al campo (dos fuentes con la misma distribución de masa pero con distinto momento angular generan el mismo campo). Pero no es el caso en relatividad general, dado que *todas* las componentes del tensor de energía impulso $T^{\mu\nu}$ generan el campo.

(a) Un cuerpo esférico uniforme con densidad de masa ρ y radio R rota rígidamente alrededor del eje x^3 con velocidad angular constante Ω. Calcule las componentes T^{0j} en un sistema de Lorentz en reposo respecto del centro del cuerpo, asumiendo que ρ, Ω y R son independientes del tiempo. Para cada componente, calcule al orden más bajo no nulo en ΩR.

(b) Resuelva las ecuaciones linealizadas $\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -(16\pi G/c^4)T^{\mu\nu}$ para $\bar{h}^{00}$ y $\bar{h}^{0j}$ para la fuente del inciso anterior. Obtenga las soluciones solamente fuera del cuerpo y al orden más bajo no nulo en r^{-1} , donde r es la distancia al centro del cuerpo. Exprese el resultado para $\bar{h}^{0j}$ en términos del momento angular del cuerpo. Halle el tensor métrico dentro de esta aproximación, y transfórmelo a coordenadas esféricas.

(c) Considere una partícula de masa en reposo no nula en órbita circular de radio r en el plano ecuatorial. Calcule, al orden más bajo, la diferencia entre su período orbital en el sentido positivo (es decir, rotando en el mismo sentido del cuerpo central) y en sentido negativo. (Defina el período como el tiempo coordenado tomado para una órbita de $\Delta\phi = 2\pi$).

(d) En el caso del Sol ($M_\odot = 2 \times 10^{30} kg,\ R_\odot = 7 \times 10^8 m,\ \Omega_\odot = 3 \times 10^{-6} s^{-1}$) y la Tierra ($r_{orb} = 1{,}5 \times 10^{11} m$). ¿Cuál es la diferencia en un año entre las órbitas positiva y negativa?

(ver *Gravitation*, C.Misner, K.Thorne y J.A.Wheeler, Freeman (1973), pags. 448-457).