Relatividad General - 2do. Cuat. 2019

Guía 2: coordenadas curvilíneas, principio de equivalencia

Problema 1

Ante un cambio general de coordenadas $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu)$, las componentes U^μ de la cuadrivelocidad cambian a

$$U^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\, U^\mu$$

mientras que el intervalo se escribe en las nuevas coordenadas

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{\mu\nu}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\, \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\, dx^{\mu'}\, dx^{\nu'}$$

es decir que

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \qquad \text{o} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}.$$

(a) Calcule las funciones $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$ para el cambio de coordenadas cartesianas a polares en el plano. Transforme las componentes del tensor métrico y verifique que las nuevas componentes conducen al elemento de línea $d\ell^2$ escrito en coordenadas polares.

(b) Transforme las componentes cartesianas de un vector a la *base coordenada* polar; en particular transforme los versores cartesianos. ¿Es la base coordenada polar una base de versores?

(c) Considere el campo vectorial $V^x = x^2 + y^2$, $V^y = x$. Calcule $\partial_\mu V^\mu$ en ambos sistemas de coordenadas. ¿Qué conclusión obtiene?

Problema 2

En el espacio-tiempo de Minkowski considere los siguientes cambios de coordenadas y escriba el intervalo ds^2 en función de las coordenadas nuevas:

(a) coordenadas nulas (u, v): $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - ct)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + ct)$

(b) coordenadas de Rindler (η, ξ): $ct = \xi\, \sinh(a\eta)$, $x = \xi\, \cosh(a\eta)$

(c) Discuta cuál es la región del espacio-tiempo de Minkowski cubierta por la carta de Rindler.

(d) Muestre que el detector del Problema 1 de la Guía 1 se mueve sobre una línea de universo $\xi = \xi_o$ y que el tiempo propio a lo largo de esa línea es $\tau = a\xi_o\eta$ (en el caso $v = 0$).

Problema 3

En el plano, considere las coordenadas $U = t - x$, $X = x$. Obtenga los vectores de la base coordenada asociada. Explique por qué $X = x$ y sin embargo $\partial_X \neq \partial_x$. Dibuje las líneas coordenadas correspondientes.

Problema 4

(a) La esfera se define como el conjunto de puntos (x, y, z) del espacio euclídeo tridimensional a distancia constante R del origen. Escriba la métrica de la esfera en coordenadas esféricas, $x = R\sin\theta\cos\phi$, $y = R\sin\theta\sin\phi$, $z = R\cos\theta$.

(b) El plano hiperbólico se define como el conjunto de puntos (t, x, y) del espacio-tiempo de Minkowski tridimensional que se encuentran en el futuro del origen y a distancia constante ℓ de éste. Proponga un sistema de coordenadas para el plano hiperbólico y escriba la métrica en estas coordenadas.

Problema 5

Mostrar que una *transformación conforme* $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\ g_{\mu\nu}$ (las longitudes se multiplican por el factor conforme $\Omega^2(x)$, que depende de la posición) preserva todos los ángulos.

Problema 6

(a) En un espacio euclidiano de dimensión d, un volumen queda delimitado por d vectores linealmente independientes $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{C}}$, ... Compruebe para los casos $d = 2$ y $d = 3$ que la expresión

$$volumen = \det \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & ... \\ B^1 & B^2 & B^3 & ... \\ C^1 & C^2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

efectivamente corresponde a la noción de volumen (A^α, B^α, C^α son las componentes cartesianas de los vectores respectivos). Note que se puede escribir el determinante con ayuda del *símbolo de Levi-Civita*: $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma...} = \pm 1$, según si $\alpha\beta\gamma...$ es una permutación par o impar de $1, 2, 3, ..., d$, y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma...} = 0$ en otro caso. Luego:

$$volumen = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma...}\ A^\alpha\ B^\beta\ C^\gamma\ ...$$

(b) Una *hipersuperficie* es una superficie de dimensión $d - 1$ en un espacio de dimensión d. Un elemento de hipersuperficie $\Delta\Sigma_\alpha$ queda determinado por $d - 1$ vectores linealmente independientes tangentes a la misma; si las componentes cartesianas de estos vectores son Δx_A^λ, Δx_B^λ, Δx_C^λ, ..., entonces

$$\Delta\Sigma_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta...}\ \Delta x_A^\beta\ \Delta x_B^\gamma\ \Delta x_C^\delta\ ...$$

Si n^α es un vector unitario normal a la hipersuperficie entonces $n^\alpha \Delta\Sigma_\alpha$ es un volumen en d dimensiones numéricamente igual al área $\Delta\sigma$ de la hipersuperficie; por lo tanto es $d\Sigma_\alpha = n_\alpha\ d\sigma$. Muestre que si $a, b, c, ...$ son coordenadas sobre la hipersuperficie, entonces

$$d\Sigma_\alpha = \varepsilon_{\alpha|\beta\gamma\delta...|}\ \frac{\partial(x^\beta, x^\gamma, x^\delta, ...)}{\partial(a, b, c, ...)}\ da\ db\ dc\ ...$$

donde las barras $|\ |$ indican ordenamiento de menor a mayor. Ayuda: elija vectores Δx_A^β, Δx_B^γ, Δx_C^δ, ... tangentes a las líneas coordenadas $a, b, c, ...$

(c) Aplique el resultado anterior a la superficie de una esfera de radio R inmersa en un espacio euclidiano de 3 dimensiones. Encuentre el valor de $d\sigma$ y asócielo con el determinante de la métrica "inducida" sobre la esfera.

Problema 7

(a) Muestre que $\sqrt{|g|}\ d\mathbf{x}$ es un volumen invariante ante cambio general de coordenadas ($g \equiv \det(g_{\mu\nu})$). Para ello pruebe que $\int f(x^\mu)\ \sqrt{|g|}\ d\mathbf{x} = \int f(x^{\mu'})\ \sqrt{|g'|}\ d\mathbf{x}'$, para toda función f invariante.

(b) Utilice distintas coordenadas curvilíneas en un espacio euclidiano y verifique que esta noción de volumen coincide con el calculado habitualmente multiplicando elementos de arco.

Problema 8

(a) Muestre que el símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ se transforma ante cambio general de coordenadas como una *densidad de peso* -1:

$$\varepsilon_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \det(\Lambda^{\mu}{}_{\mu'})^{-1}\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\ \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\ \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\ \Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\ \Lambda^{\rho}{}_{\rho'}$$

(ayuda: muestre primero -si no lo hizo ya en el problema anterior- que, para toda matriz M $n \times n$, se cumple $\det M = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} M^{1i_1} \dots M^{ni_n}$). Muestre que el símbolo $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \equiv \pm\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ (el signo depende de la convención, ver Carroll pág. 83, Schutz ec. 4.28) es una densidad de peso $+1$.

(b) Muestre que $\sqrt{|g|}\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ se comporta como un pseudo-tensor ante cambio general de coordenadas. ¿Con qué factor puede corregir $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ para que también transforme como un peudotensor?

Problema 9

El corrimiento al rojo gravitatorio se midió por primera vez en 1960. Aprovechando la alta definición de la línea de 14,4 keV emitida por un átomo de Fe^{57} alojado en un cristal (efecto Mossbauer), Pound y Rebka pudieron determinar el corrimiento de frecuencia que sufre el fotón luego de ascender el campo gravitatorio en la superficie terrestre hasta una altura de 22 m. Utilizando el Principio de Equivalencia calcule el valor de $\Delta\nu/\nu$ que se esperaba medir. Muestre que el mismo corrimiento se obtiene si el tensor métrico en las coordenadas del laboratorio tuviera $g_{00} = -(1 + 2\,\phi c^{-2})$ (siendo el potencial gravitatorio tal que $|\phi|\, c^{-2} \ll 1$).

Problema 10

Las señales de los 24 satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) permiten que fijemos nuestra ubicación en la Tierra con un alto grado de precisión. Los mismos se encuentran en seis planos orbitales distribuidos de manera uniforme y cada satélite gira en torno a la Tierra cada 12 horas. Los relojes atómicos en los satélites deben ser muy precisos, porque un intervalo de tiempo de 10 ns se traduce en una distancia de 3 m. Con el fin de sincronizarlos con los relojes en la superficie terrestre para la determinación de las distancias, se deben tener en cuenta correcciones relativistas.

(a) Calcule la velocidad del satélite v_s y su distancia al centro de la Tierra R_s.

(b) Obtenga la variación relativa del tiempo del satélite debido a la dilatación temporal de la relatividad especial.

(c) Halle la variación relativa del tiempo debido a que el satélite se encuentra en un potencial gravitacional diferente en comparación con la superficie de la Tierra. Este efecto de la relatividad general, ¿es más significativo que la dilatación de la relatividad especial?

(d) Calcule el error que puede acumularse en 1 minuto debido a estas correcciones relativistas. ¿Estos dos efectos cambian el tiempo del satélite en la misma dirección, o tienden a anularse entre sí?

Problema 11

Reemplace $g_{00} = -(1 + 2\,\phi c^{-2})$ en la acción de la partícula relativista libre (con $|\phi|\, c^{-2} \ll 1$) y muestre que resulta la acción de una partícula clásica en un potencial gravitatorio ϕ cuando la velocidad de la partícula es mucho menor que c.

Problema 12

En una región de cierta variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones existe un sistema de coordenadas (ct, x, y, z) donde el intervalo se escribe como

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

siendo $|\phi|\, c^{-2} \ll 1$ e independiente de t.

(a) Variando la integral $\int ds$ obtenga la ecuación para las geodésicas en esa región a primer orden en ϕ/c^2.

(b) Aproxime el resultado anterior para el caso de partículas con movimiento no relativista.

Problema 13

En el Lagrangiano del Problema 12 utilice el tiempo propio como parámetro y encuentre la magnitud que se conserva como consecuencia de que ϕ no depende de la coordenada t. Identifique a la energía mecánica clásica en el caso de movimiento no relativista.

Problema 14

En la geometría del Problema 12 encuentre la transformación de coordenadas que conduce a un sistema localmente inercial, a primer orden en ϕ/c^2.

Problema 15

En la aproximación de campo gravitatorio débil, obtenga la línea de universo de un rayo de luz radial respecto de una fuente de campo gravitatorio esféricamente simétrica de masa M. Utilice coordenadas esféricas para escribir la parte espacial del intervalo. Caracterice la región donde es válida la aproximación.