Problemas 14 y 15 de la guía 2

Problema 14

Enunciado

Para la métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{1}$$

donde ϕ es un potencial gravitatorio newtoniano independiente del tiempo, encuentre la transformación de coordenadas que conduce a un sistema localmente inercial, a primer orden en ϕ.

Resolución

Consideremos un punto del espacio, digamos el origen, y elijamos el origen de potenciales de manera que $\phi(0) = 0$. En un entorno del origen, podemos aproximar ϕ por su expansión de Taylor a primer orden,

$$\phi(\mathbf{x}) \simeq -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{g} \equiv -(\nabla\phi)(0)$ es el campo gravitatorio newtoniano en el origen. Buscamos una transformación de coordenadas $x \mapsto x'(x)$ que lleve a un sistema localmente inercial en un entorno del origen, es decir, tal que la métrica en las nuevas coordenadas sea la de Minkowski, $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, en la región donde vale la aproximación (2). Como ϕ se asume pequeño, la transformación de coordenadas será próxima a la identidad,

$$x'^{\alpha}(x) = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x), \tag{3}$$

con ξ^{α} pequeño. Por la ley de transformación de la métrica ante cambios de coordenadas tenemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\alpha\beta}(\delta^{\alpha}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha})(\delta^{\beta}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\beta}) \\ &\simeq \eta_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde en el último paso hemos despreciado el término cuadrático en ξ y definido $\xi_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$. Usando la expresión explícita (1) para la métrica $g_{\mu\nu}$ y la aproximación (2), la ecuación de arriba toma la forma

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \tag{5}$$

Las ecuaciones con $\mu = \nu$ se resuelven fácilmente,

$$\begin{aligned}
\xi_t &= (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})t + f_t(\mathbf{x}) \\
\xi_x &= \frac{1}{2}g_x x^2 + g_y yx + g_z zx + f_x(t,y,z) \\
\xi_y &= g_x xy + \frac{1}{2}g_y y^2 + g_z zy + f_y(t,x,z) \\
\xi_z &= g_x xz + g_y yz + \frac{1}{2}g_z z^2 + f_z(t,x,y),
\end{aligned} \tag{6}$$

donde f_μ son funciones arbitrarias. Éstas se fijan imponiendo que se cumplan las ecuaciones (5) con $\mu \neq \nu$. La ecuación con $\mu = x, \nu = y$ da

$$0 = \partial_x \xi_y + \partial_y \xi_x = g_x y + \partial_x f_y + g_y x + \partial_y f_x, \tag{7}$$

lo cual, dado que f_x no depende de x y f_y no depende de y, implica

$$\partial_x f_y = -g_y x \qquad \partial_y f_x = -g_x y. \tag{8}$$

Procediendo análogamente con las ecuaciones (5) con $\mu = x, \nu = z$ y $\mu = y, \nu = z$ llegamos al resultado

$$\begin{aligned}
f_x(t,y,z) &= -\frac{1}{2}g_x(y^2+z^2) + h_x(t) \\
f_y(t,x,z) &= -\frac{1}{2}g_y(x^2+z^2) + h_y(t) \\
f_z(t,x,y) &= -\frac{1}{2}g_z(x^2+y^2) + h_z(t),
\end{aligned} \tag{9}$$

donde h_i son funciones arbitrarias, y reemplazando en (6) obtenemos

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{h}(t). \tag{10}$$

Finalmente, las ecuaciones (5) con $\mu = t, \nu = i$ implican

$$f_t(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{h}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \tag{11}$$

salvo por constantes de integración arbitrarias que fijamos a cero. Por lo tanto, tenemos

$$\xi^t = -(\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})t \qquad \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}|\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

y en consecuencia el cambio de coordenadas que buscábamos es

$$t' = t - (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})t \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}|\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \tag{12}$$

Hasta ahora hemos usado, como siempre, unidades en las que $c = 1$. Podemos reescribir la transformación de coordenadas recién obtenida en un sistema de unidades arbitrario insertando los factores c que hagan cuadrar las unidades,

$$t' = t - \frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}}{c^2}t \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{x} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{g}|\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \tag{13}$$

Por lo tanto, en el límite no relativista $c \to \infty$, la transformación toma la forma

$$t' = t \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2, \tag{14}$$

que es la transformación galileana a un sistema de referencia acelerado con aceleración $\mathbf{g}$.

Problema 15

Enunciado

En la aproximación de campo gravitatorio débil, obtenga la línea de universo de un rayo de luz radial respecto de una fuente de campo gravitatorio esféricamente simétrica de masa M. Utilice coordenadas esféricas para escribir la parte espacial del intervalo. Caracterice la región donde es válida la aproximación.

Resolución

En coordenadas esféricas $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, la métrica (1) toma la forma

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{15}$$

y, para una fuente esféricamente simétrica de masa M, el potencial newtoniano en el exterior de la fuente vale

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \tag{16}$$

Buscamos la línea de universo de un rayo de luz radial. Rayo de luz significa $ds^2 = 0$, y radial significa $d\theta = d\varphi = 0$. Por lo tanto, tenemos

$$-(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)dr^2 = 0. \tag{17}$$

Elegimos que dt y dr tengan el mismo signo, es decir, que el rayo de luz se aleje de la fuente. Entonces, la ecuación de arriba implica

$$dt = \sqrt{\frac{1-2\phi}{1+2\phi}}dr \simeq (1-2\phi)dr = \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)dr, \tag{18}$$

donde en la segunda igualdad nos hemos quedado a primer orden en ϕ. Integrando esta ecuación obtenemos la línea de universo que buscamos,

$$t - t_0 = r - r_0 + 2GM \log \frac{r}{r_0}. \tag{19}$$

Nótese que, para $r > r_0$, se tiene $t - t_0 > r - r_0$, con lo cual la velocidad de la luz en estas coordenadas es menor a 1: la gravedad "frena" al rayo de luz que se aleja de la fuente. La aproximación de campo débil que estamos usando es válida cuando $r \gg 2GM$. Como veremos más adelante cuando tratemos este problema exactamente (fuera de la aproximación de campo débil), en $r = 2GM$ un rayo de luz que trata de alejarse de la estrella se ve tan frenado que no se mueve.