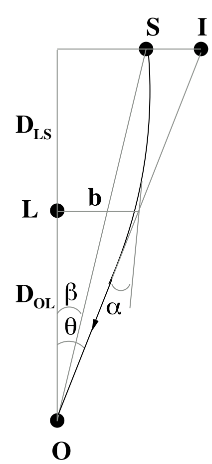
# Dos problemas de la guía 5

## Problema 5

### Enunciado

La luz de una fuente (S) llega a un observador (O) luego de ser deflectada débilmente por un objeto esférico (L) de masa $M$, como muestra la figura:




(a) A partir de la figura y suponiendo ángulos pequeños, verifique que las posiciones angulares de la imagen ($\theta$), de la fuente ($\beta$) y el ángulo de deflexión ($\alpha$) se encuentran relacionados por la *ecuación de la lente*

$$\beta D_{\mathrm{OS}} = \theta D_{\mathrm{OS}} - \alpha D_{\mathrm{LS}},$$

donde $D_{\mathrm{OS}} = D_{\mathrm{OL}} + D_{\mathrm{LS}}$.

(b) Usando el resultado del ángulo de deflexión obtenido en el problema anterior y que el parámetro de impacto es $b = \theta D_{\mathrm{OL}}$, muestre que la ecuación de la lente se puede escribir en la forma

$$\beta = \theta - \frac{4MGD_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{OL}}D_{\mathrm{OS}}}\frac{1}{\theta}.$$

(c) Finalmente obtenga que las posiciones angulares de las dos imágenes vienen dadas por

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}\right),$$

donde

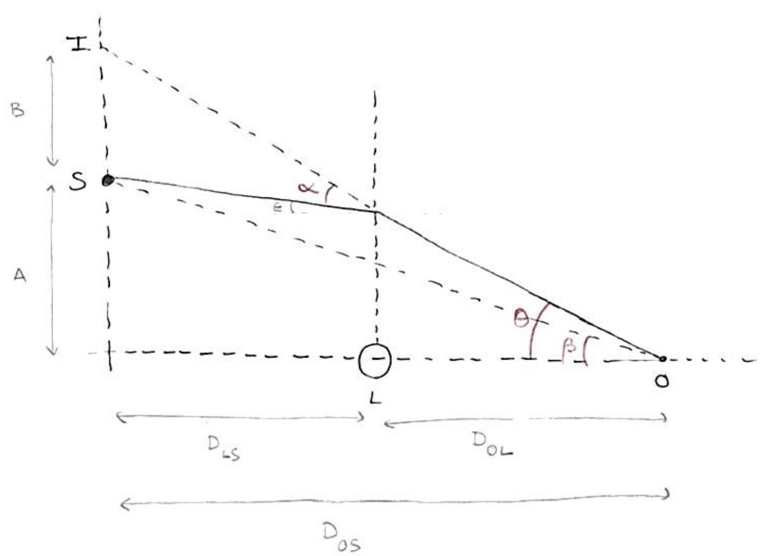
$$\theta_E = \sqrt{\frac{4MGD_{\rm LS}}{D_{\rm OL}D_{\rm OS}}}$$

es el radio angular del *anillo de Einstein*, que se obiene en lugar de las dos imágenes cuando la alineación es perfecta ($\beta = 0$).

## Resolución

Antes de resolver el problema, veamos qué representa cada uno de los ángulos que aparecen en la figura: $\beta$ indica la posición real de la fuente, $\theta$ la de la imagen y $\alpha$ es el ángulo de deflexión. Claramente, nuestro objetivo es, dada una posición real $\beta$ de la fuente, encontrar su posición aparente $\theta$ usando el resultado para el ángulo de deflexión $\alpha$ que obtuvimos en el problema anterior (problema 4).

*(a)* Volvamos a dibujar la figura indicando un par de cosas más:




El ángulo $\epsilon$ es el que forma el rayo incidente con la horizontal. De esta figura es claro que

$$A = D_{OS}\tan\beta \qquad A + B = D_{OS}\tan\theta \qquad B = D_{LS}[\tan(\alpha+\epsilon) - \tan\epsilon)]. \quad (1)$$

Para ángulos pequeños, estas ecuaciones devienen

$$A = \beta D_{OS} \qquad A + B = \theta D_{OS} \qquad B = \alpha D_{LS}, \tag{2}$$

y por lo tanto

$$\beta D_{OS} = \theta D_{OS} - \alpha D_{LS}, \tag{3}$$

que es la ecuación de la lente que queríamos demostrar.

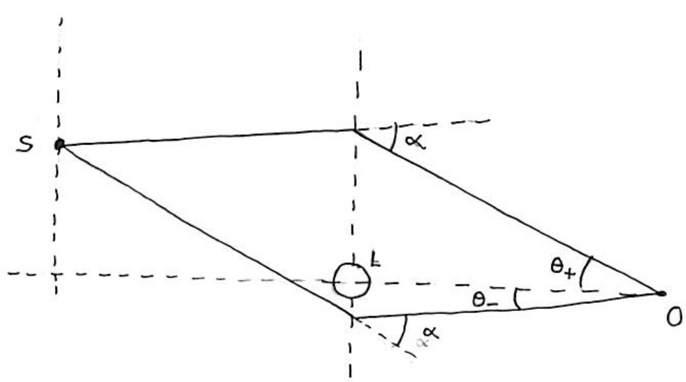
*(b)* Dividiendo la ecuación de la lente por $D_{OS}$, usando el resultado del problema anterior para el ángulo de deflexión, $\alpha = 4MG/b$ (esto lo vimos en clase y es uno de los resultados más famosos de la relatividad general), y usando también que el parámetro de impacto para ángulos pequeños se puede aproximar por $b \simeq \theta D_{OL}$, obtenemos

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \qquad \theta_E = \sqrt{\frac{4MGD_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}}. \tag{4}$$

*(c)* Multiplicando (4) por $\theta$, obtenemos una ecuación cuadrática que resolvemos fácilmente,

$$\theta = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2} \equiv \theta_\pm. \tag{5}$$

Así pues, el observador ve dos imágenes de la fuente. Esto se entiende claramente con el siguiente dibujo:




Notemos que acá hemos considerado sólo rayos contenidos en el plano de la figura, pero eso está bien: los rayos de luz se mueven en un plano que contiene a la fuente $S$ y a la estrella $L$, y los que llegan al observador pasan también por $O$. Hay un único plano que contiene esos tres puntos y es el de la figura. Esto es así excepto en el caso en que $S$, $L$ y $O$ están alineados ($\beta = 0$). En ese caso hay infinitos planos que contienen esos tres puntos, y el resultado es que el observador no ve dos imágenes sino un anillo de apertura $\theta_E$.

# Problema 7

## Enunciado

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica $\Lambda$ tienen la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Puede obtenerse una (mala) cota superior para la constante cosmológica exigiendo que no afecte el movimiento de los planetas del Sistema Solar. Obtenga una cota para $\Lambda$ a partir de que la órbita de Plutón tiene un radio de $5.9 \times 10^{12}$ m.

## Resolución

Queremos estudiar la ecuación de Einstein con constante cosmológica en el régimen de campo débil no relativista (que es el régimen correspondiente al sistema solar). Es decir, escribimos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6}$$

y asumimos que $h_{\mu\nu}$ es pequeño e independiente del tiempo. La hipótesis de campo débil requiere que $\Lambda$ sea pequeño (del mismo orden que $h_{\mu\nu}$), y por lo tanto la constante cosmológica da lugar a un término $\Lambda\eta_{\mu\nu}$ en el lado izquierdo de la ecuación linealizada,

$$-\frac{1}{2}\Delta(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}) + \Lambda\eta_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{7}$$

donde estamos usando el gauge de Lorentz, $\partial^\nu(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}) = 0$, y asumimos que $h_{\mu\nu}$ es independiente del tiempo. Queremos ver cómo la constante cosmológica afecta a la órbita de Plutón. Esta última es una geodésica lenta ($dt/d\tau \gg dx^i/d\tau$), lo cual, sumado al hecho de que $h_{\mu\nu}$ no depende del tiempo, implica

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial^i h_{00}. \tag{8}$$

En otras palabras, el movimiento de Plutón está descripto por la segunda ley de Newton con potencial gravitatorio $\phi = -h_{00}/2$. Para averiguar cuánto vale $\phi$, tenemos que resolver la ecuación (7). A primera vista parecería que nos basta con la componente 00 de esa ecuación, pero eso no es así debido a la presencia de la traza $h$ dentro del laplaciano. Para sacarnos de encima esa traza, tomemos la traza de la ecuación (7),

$$\frac{1}{2}\Delta h + 4\Lambda = 8\pi G T. \tag{9}$$

De ahí despejamos $\Delta h$ en términos de $\Lambda$ y $T$, y reemplazando en (7) obtenemos

$$-\frac{1}{2}\Delta h_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}) + \Lambda\eta_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Ahora sí, para determinar $\phi$ nos basta con la componente 00 de esta ecuación. Usando que, en el régimen no relativista, $T_{00} = \rho$ y $T_{i\mu} = 0$, esta componente toma la forma

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \tag{11}$$

Por lo tanto, $\phi$ es el potencial newtoniano creado por una fuente esférica (el sol) de densidad $\rho$ más una fuente uniformemente distribuida por todo el espacio de densidad $\rho_\Lambda = -\Lambda/(4\pi G)$ (nótese que, debido a que $\rho_\Lambda$ es negativo, $\Lambda$ actúa como una fuente de gravedad repulsiva). Podemos determinar $\phi$ resolviendo directamente la ecuación de arriba o, más fácil, usando Gauss,

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2. \tag{12}$$

Y ahora ya tenemos todo lo que necesitamos para acotar $\Lambda$. Sabemos que el sistema solar está perfectamente descripto por la gravedad newtoniana sin constante cosmológica. Por lo tanto, el término proporcional a $\Lambda$ en el potencial de arriba tiene que ser despreciable frente al otro término en todo el sistema solar. La cota más fuerte la obtenemos cuando $r$ es máximo, es decir, el radio $r_p$ de la órbita de Plutón:

$$\frac{\Lambda}{6}r_p^2 \ll \frac{GM}{r_p} \quad \Rightarrow \Lambda \ll 6\frac{GM}{r_p^3}. \tag{13}$$

Restaurando los factores de $c$ por análisis dimensional ($\Lambda$ tiene unidades de longitud$^{-2}$, y $GM/r^3$ tiene unidades de tiempo$^{-2}$) obtenemos finalmente

$$\Lambda \ll 6\frac{GM}{r_p^3 c^2} \simeq 10^{-35}\ \mathrm{m}^{-2}. \tag{14}$$

Esta cota parece muy fuerte, pero se obtienen cotas mucho más fuertes observando el universo a escalas cosmológicas (mucho más grandes que el tamaño del sistema solar). El valor actualmente aceptado de la constante cosmológica (basado en observaciones cosmológicas) es $\Lambda \simeq 10^{-52}\ \mathrm{m}^{-2}$.

Un último comentario. En problemas anteriores habíamos obtenido que, en el régimen no relativista y en ausencia de constante cosmológica, las componentes espaciales de la perturbación de la métrica son $h_{ij} = -2\phi\delta_{ij}$. Este resultado estaba fuertemente basado en la ecuación

$$\Delta(h_{ij} - \frac{1}{2}h\delta_{ij}) = 0, \tag{15}$$

que se obtiene de (7) usando que $T_{ij} = 0$ y poniendo $\Lambda = 0$. En presencia de constante cosmológica esta ecuación ya no se cumple, y por lo tanto deja de ser cierto que $h_{ij} = -2\phi\delta_{ij}$. Encontrar las componentes espaciales de la métrica en este caso lleva un poco más de tiempo, pero, afortunadamente, no ha sido necesario para resolver este problema.