Parcial de Relatividad
2/12/2019

Resuelva cada problema en hojas separadas. Justifique cada paso claramente.

Problema 1

Considere la métrica (Bondi, Pirani y Robinson 1959; Ehlers y Kundt 1962)

$$ds^2 = -dudv + L^2(u)\left(e^{2\beta(u)}dx^2 + e^{-2\beta(u)}dy^2\right),$$

donde $u = t - z$ y $v = t + z$. Para una cierta relación entre las funciones L y β, esta métrica es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en vacío que representa una onda gravitacional propagándose en Minkowski.

(a) Calcule los símbolos de Christoffel en la carta $\{u, v, x, y\}$.
Ayuda: sólo Γ^v_{xx}, Γ^v_{yy}, Γ^x_{ux} y Γ^y_{uy} son distintos de cero.

(b) Muestre que las ecuaciones de Einstein en vacío se satisfacen si y sólo si

$$L'' + (\beta')^2 L = 0.$$

Ayuda: la única componente no nula del tensor de Ricci es R_{uu}.

(c) Imponiendo que L no diverja en el infinito, obtenga esta función a primer orden en β. Muestre que, a este orden, $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ es una onda plana propagándose en la dirección z. Se satisface la condición de gauge TT?

(d) Volviendo a la forma exacta de la métrica, muestre que una partícula inicialmente en reposo permanece en reposo. Calcule la distancia propia $D(t)$ entre una partícula ubicada en $x = y = z = 0$ y otra en $x = d, y = z = 0$ y discuta su resultado.

Problema 2

Considere el espacio-tiempo Anti de Sitter, cuya métrica es

$$ds^2 = -(1 + r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/\ell^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

con $t \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$, donde ℓ es una constante.

(a) Muestre que el movimiento de una partícula libre masiva en el plano $\theta = \pi/2$ obedece una ecuación de la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = \text{constante},$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula, y determine y grafique el potencial efectivo V. ¿Puede la partícula escapar al infinito?

(b) Encuentre la línea de mundo $(r(\tau), t(\tau))$ de la partícula si $r(0) = t(0) = 0$ y $dr/d\tau|_0 = u$. Reescriba esta curva en la forma $r = r(t)$ y grafíquela cualitativamente.
Ayuda: $\int dx/(1 + a^2 \sin^2 x) = \arctan(\sqrt{a^2 + 1}\tan x)/\sqrt{a^2 + 1}$.

(c) Un observador en reposo en $r = 0$ lanza una piedra. ¿Cuánto tiempo pasa para el observador hasta que la piedra vuelve a caer en sus manos? Compare con lo que ocurre cuando se lanza una piedra hacia arriba desde la superficie de la Tierra.

Problema 3

Considere la 2-forma $\tilde{\omega} = \sin\theta\, \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\varphi$ sobre la esfera S^2, donde $\theta \in (0, \pi)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$ son las coordenadas usuales.

(a) Muestre que $\tilde{\omega}$ es no degenerada, es decir, que la ecuación $\tilde{\omega}(\ \ , \vec{v}) = 0$ implica $\vec{v} = 0$.

(b) Encuentre la función H más general tal que $\tilde{\omega}(\ \ , \partial_\varphi) = \tilde{d}H$.

(c) ¿Es cerrada $\tilde{\omega}$? Usando el teorema de Stokes, muestre que no es exacta.