Recuperatorio de Relatividad
12/12/2019

Resuelva cada problema en hojas separadas. Justifique cada paso claramente.

Problema 1

Considere un universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente cerrado,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right],$$

dominado por radiación ($p = \rho/3$). Se conoce el parámetro de Hubble H_0 y la densidad de energía ρ_0 en un instante de referencia t_0.

(a) Muestre que la ecuación de Friedmann y la ecuación de conservación implican

$$H^2 = \frac{\Omega_0}{[H_0(\Omega_0 - 1)]^2}\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2},$$

donde $\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho$ es el parámetro de densidad.

(b) Calcule el factor de escala a y el tiempo t en función del tiempo conforme η, definido por $dt = ad\eta$, suponiendo $a(0) = t(0) = 0$. Discuta su resultado.

(c) Describa cualitativamente cómo cambiaría la evolución del universo si, además de radiación, hubiera una constante cosmológica positiva con

$$\frac{\sqrt{\Omega_{r0}\Omega_{\Lambda 0}}}{\Omega_0 - 1} > \frac{1}{2},$$

donde Ω_r y Ω_Λ son los parámetros de densidad correspondientes a la radiación y a la constante cosmológica respectivamente.

Problema 2

Considere el espacio-tiempo tridimensional con métrica

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_*^2}{\ell^2}dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_*^2}dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$, y ℓ y r_* son constantes positivas. Este espacio-tiempo se conoce como el agujero negro BTZ (Bañados, Teitelboim y Zanelli, 1992).

(a) Muestre que el movimiento de una partícula libre masiva obedece una ecuación de la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = \text{constante},$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula, y determine y grafique el potencial efectivo V. ¿Puede la partícula escapar al infinito? ¿Puede describir una órbita circular?

(b) Si la partícula cae radialmente al agujero negro partiendo del reposo en $r_0 > r_*$, calcule $dr/d\tau$ y $dt/d\tau$ como función de r. Estudie qué ocurre en $r = r_*$.

(c) En algún punto r de su trayectoria, la partícula emite un fotón, que se propaga radialmente y es recibido por un observador en reposo en r_0. Si la frecuencia medida por la partícula es ν, ¿cuál es la frecuencia medida por el observador? Discuta el resultado. Estudie los casos $r = r_0$ y $r = r_*$.

Problema 3

Considere la acción

$$S[\tilde{A}] = \int_U \tilde{A} \wedge \tilde{d}\tilde{A},$$

donde $\tilde{A}$ es una 1-forma y U es una región de una variedad tridimensional. Éste es el caso más sencillo de lo que se conoce como teoría de Chern-Simons (Witten, 1989), que tiene múltiples aplicaciones tanto en física como en matemática.

(a) Muestre que S es invariante gauge, es decir, $S[\tilde{A} + \tilde{d}f] = S[\tilde{A}]$ para cualquier función f que se anula en el borde de U.

(b) Muestre que la ecuación del movimiento (obtenida imponiendo $\delta S = 0$ para cualquier variación de $\tilde{A}$ que se anula en el borde de U) es $\tilde{d}\tilde{A} = 0$.
Ayuda: la variación de un producto tensorial obedece la regla de Leibniz usual, $\delta(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta}) = \delta\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \otimes \delta\tilde{\beta}$.

(c) Muestre que la 1-forma

$$\tilde{A} = \frac{x}{x^2 + y^2}\tilde{d}y - \frac{y}{x^2 + y^2}\tilde{d}x$$

es solución de la ecuación del movimiento.