Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 9

Aplicaciones del cálculo exterior. Operador estrella de Hodge. Derivada de Lie

Aplicaciones del cálculo exterior

1) Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f(x,y)$ una función en $\mathbb{R}^2$, que puede ser compleja. Hagamos el cambio de carta

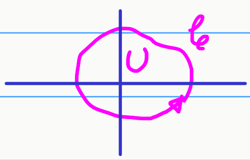
$$\{x, y\} \longrightarrow \{z, \bar{z}\}$$

donde $z = \dfrac{x+iy}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{x-iy}{2}$

Entonces $\tilde{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\tilde{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\tilde{d}y = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\tilde{d}z + \tilde{d}\bar{z}) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\tilde{d}z - \tilde{d}\bar{z}}{i}$

es decir $\tilde{d}f = \underbrace{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial z}}\tilde{d}z + \underbrace{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}\tilde{d}\bar{z}$

Apliquemos el teorema de Stokes generalizado:



$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{f\,\tilde{d}z}_{\text{1-forma}} = \int_{U} d\,[f\,\tilde{d}z] = \int_{U} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\tilde{d}\bar{z}\wedge\tilde{d}z$$

Si f es analítica (u "holomorfa") en U (incluyendo $\mathcal{C}$) entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$; esto significa que f es una genuina función de una variable compleja z más que una mera función de dos variables reales. En ese caso

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f\,\tilde{d}z = 0}$$

Cuando f no es analítica en U tendremos, por ejemplo, $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ para cualquier $\mathcal{C}$ que encierre el origen.

Operador estrella de Hodge

En los espacios que poseen métrica definimos un operador $*$ que toma una p-forma y la convierte en una $(n-p)$-forma:

$$\boxed{(*\tilde{\beta})_{i_{p+1}\cdots i_n} \doteq \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{i_1\cdots i_p\, i_{p+1}\cdots i_n}\;\beta^{i_1\cdots i_p}}$$

es una dualidad entre dos espacios de igual dimensión

donde

$$\beta^{i_1\cdots i_p} = g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_p j_p}\,\beta_{j_1\cdots j_p}$$

siendo g^{ij} la inversa de la métrica: $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, y

Símbolo de Levi-Civita

$$\varepsilon_{j_1\cdots j_n} \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } j_1\cdots j_n \text{ es permutación par de } 12\cdots n \\ -1 & \text{si } j_1\cdots j_n \text{ es permutación impar de } 12\cdots n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que $\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{j_1\cdots j_n}$ tiene carácter tensorial pues son las componentes del volumen métrico:

$$\boxed{\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\;\tilde{dx}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{dx}^n = \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{j_1\cdots j_n}\;\tilde{dx}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{dx}^{j_n}}$$

Propiedad: sean dos p-formas $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$

$$\boxed{\underset{\text{p-forma}}{\tilde{\alpha}}\wedge\underbrace{*\tilde{\beta}}_{(n-p)\text{-forma}} = \alpha_{|i_1\cdots i_p|}\;\beta^{|i_1\cdots i_p|}\;\underset{\text{volumen métrico}}{\tilde{\Omega}}}$$

$$\cancel{p!}\,\varepsilon_{|j_1\cdots j_p|\,|i_{p+1}\cdots i_m|}\,\beta^{|j_1\cdots j_p|}$$

Demostración:

$$\tilde{\alpha}\wedge *\tilde{\beta} = \alpha_{|i_1\cdots i_p|}\frac{1}{\cancel{p!}}\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{j_1\cdots j_p|i_{p+1}\cdots i_m|}\,\beta^{j_1\cdots j_p}\;\tilde{dx}^{i_1}\wedge\dots\wedge\tilde{dx}^{i_p}\wedge\tilde{dx}^{i_{p+1}}\wedge\dots\wedge\tilde{dx}^{i_m}$$

En esta suma múltiple los únicos términos que sobreviven son aquellos con $|j_1\cdots j_p| = |i_1\dots i_p|$. En efecto, $|j_1\cdots j_p|$ debe ser complementario de $|i_{p+1}\cdots i_m|$ en el símbolo de Levi-Civita; y este a su vez es complementario de $|i_1\dots i_p|$ en la base.

Por lo tanto, cada término de la suma múltiple corresponde a una posible elección de $|i_1\dots i_p|$. Además cada término contiene el volumen métrico, que aparece como

$$\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{|i_1\dots i_p|\,|i_{p+1}\cdots i_m|}\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{i_{p+1}}\wedge\dots\wedge dx^{i_m}$$

$$= \sqrt{|g|}\;\tilde{dx}^1\wedge\dots\wedge\tilde{dx}^m = \tilde{\Omega}$$

(no hay términos repetidos porque el orden de los índices está congelado). Así resulta la propiedad que queríamos demostrar. ✓

▶ Propiedades

i) $\tilde{\alpha}\wedge *\tilde{\beta} = \tilde{\beta}\wedge *\tilde{\alpha}$ $\qquad$ $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ p-formas

ii) $*1 = \tilde{\Omega}$

iii) $**=(-1)^{p(m-p)+s}$ $\qquad$ s: número de signos $(-)$ en la métrica

El factor $(-1)^s$ aparece porque aplicando dos veces el operador se forma el factor $|g|$; a su vez con las inversas de la métrica se forma el factor $\det(g^{ij}) = g^{-1}$, siendo $|g|/g = (-1)^s$.

Ejemplo: el tensor de campo electromagnético $\tilde{F} = d\tilde{A}$ es una 2-forma cuyas componentes son $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, donde $\tilde{A}$ es el cuadripotencial.

Entonces

$$(*\tilde{F})_{kl} = \frac{1}{2!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{ijkl}\,F^{ij}$$

$$(*\tilde{F})_{kl} = \sqrt{|g|}\begin{pmatrix} 0 & F^{23} & -F^{13} & F^{12} \\ \cdots & 0 & F^{03} & -F^{02} \\ \cdots & \cdots & 0 & F^{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto: $(*\tilde{F})_{01} = \frac{1}{2!}\sqrt{|g|}\left(\varepsilon_{2301}F^{23} + \varepsilon_{3201}F^{32}\right) = \sqrt{|g|}\,F^{23}$, etc.

Nótese que: $\tilde{F}\wedge *\tilde{F} = F_{|ij|}\,\tilde{dx}^i\wedge\tilde{dx}^j \wedge \sqrt{|g|}\left(F^{23}\,\tilde{dx}^0\wedge\tilde{dx}^1 + \cdots\cdots\right)$

$$= F_{23}F^{23}\underbrace{\sqrt{|g|}\;\tilde{dx}^0\wedge\tilde{dx}^1\wedge\tilde{dx}^2\wedge\tilde{dx}^3}_{\tilde{\Omega}} + \cdots$$

$$= F_{|ij|}F^{|ij|}\,\tilde{\Omega}$$

Para calcular $*\tilde{F}$ en Minkowski es útil la siguiente tabla:

$*(c\,dT\wedge dX) = -dY\wedge dZ$ $\qquad$ $*(dX\wedge dY) = c\,dT\wedge dZ$

$*(c\,dT\wedge dY) = -dZ\wedge dX$ $\qquad$ $*(dZ\wedge dX) = c\,dT\wedge dY$

$*(c\,dT\wedge dZ) = -dX\wedge dY$ $\qquad$ $*(dY\wedge dZ) = c\,dT\wedge dX$

Electromagnetismo: la acción del campo electromagnético es

$$\boxed{S[\tilde{A}] = -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \tilde{F}\wedge *\tilde{F} - \frac{1}{c}\int \tilde{A}\wedge *\tilde{j}} \qquad \text{donde} \quad \tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$$

La variación de la acción respecto de $\tilde{A}$ es

$$\delta S = -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \Big(d\,\delta\tilde{A}\wedge *\tilde{F} + \underbrace{\tilde{F}\wedge *d\,\delta\tilde{A}}_{d\,\delta\tilde{A}\wedge *\tilde{F}}\Big) - \frac{1}{c}\int \delta\tilde{A}\wedge *\tilde{j}$$

es decir, $\delta S_{em} = -\dfrac{1}{\mu_0 c}\displaystyle\int \delta\tilde{A}\wedge\left(\tilde{d}*\tilde{F} + \mu_0 *\tilde{j}\right)$ + términos de borde

Leyes de Maxwell: $\boxed{\tilde{d}\tilde{F} = 0 \quad , \quad \tilde{d}*\tilde{F} = -\mu_0 *\tilde{j}}$

$\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$ es exacta

ecuaciones dinámicas

$A_i = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A}\right)$

$j^i = (\rho c, \vec{j})$

$\Downarrow$

Ecuación de continuidad: $\tilde{d}*\tilde{j} = 0$

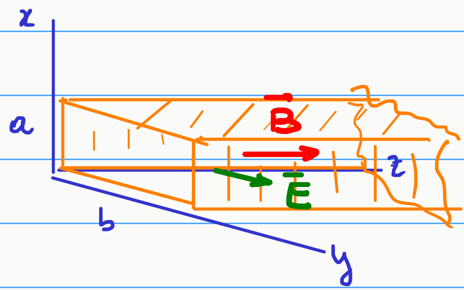
En Minkowski es

$$F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \cdots & 0 & -B_z & B_y \\ \cdots & \cdots & 0 & -B_x \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}\wedge *\tilde{F} = F_{|ij|}F^{|ij|}\,\overbrace{c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z}^{\tilde{\Omega}} = \left(-c^{-2}E^2 + B^2\right)\tilde{\Omega}$$

$$*\tilde{j} = \rho c\,\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z - j_x\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z - j_y\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}Z\wedge\tilde{d}X - j_z\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y$$

Ejercicio: modo TE en guía de ondas



Proponemos:

$$\tilde F = \tilde d u(t,x) \wedge \tilde d y \quad \Rightarrow \quad \tilde d \tilde F = 0$$

$$\tilde F = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{E_y} \tilde d t \wedge \tilde d y + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-B_z} \tilde d x \wedge \tilde d y$$

Por otro lado,

$$* \tilde F = \frac{\partial u}{\partial t} \underbrace{* (\tilde d t \wedge \tilde d y)}_{-\frac{1}{c} \tilde d z \wedge \tilde d x} + \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{* (\tilde d x \wedge \tilde d y)}_{c\, \tilde d t \wedge \tilde d z}$$

$$\Rightarrow \tilde d * \tilde F = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tilde d t \wedge \tilde d z \wedge \tilde d x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c\, \tilde d x \wedge \tilde d t \wedge \tilde d z$$

$$\tilde d * \tilde F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

condiciones de contorno: $E_y(x=0) = 0 = E_y(x=a)$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = A\, e^{i\omega t} \,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \qquad \text{con} \quad \omega = \frac{m\pi}{a} c$$

Obtuvimos una onda estacionaria, que rebota entre las paredes sin propagarse en z. Pero podemos generar una solución propagante mediante un boost de Lorentz:

$$t = \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2} z'\right), \quad z = \gamma(z' - v t'), \quad x = x', \quad y = y' \quad \Rightarrow \quad \tilde d t = \gamma\left(\tilde d t' - \frac{v}{c^2} \tilde d z'\right)$$

$$\tilde F = E_y \tilde d t \wedge \tilde d y - B_z \tilde d x \wedge \tilde d y = \underbrace{\gamma E_y}_{E'_y} \tilde d t' \wedge \tilde d y' - \underbrace{\frac{\gamma v}{c^2} E_y}_{B'_x} \tilde d z' \wedge \tilde d y' - \underbrace{B_z}_{-B'_z} \tilde d x' \wedge \tilde d y'$$

Ahora hay una componente del vector de Poynting a lo largo de z:

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B} \Rightarrow S'_z = -\frac{1}{\mu_0} E'_y B'_z = \frac{\gamma^2 V}{\mu_0 c^2} E_y^2$$

La fase de la onda es $\omega t = \omega \gamma (t' - \frac{V}{c^2} z') \Rightarrow \omega' = \gamma \omega \;,\; k'_z = \frac{V}{c^2} \gamma \omega$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega'^2}{c^2} - k_z'^2 = \omega^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}$$ relación de dispersión

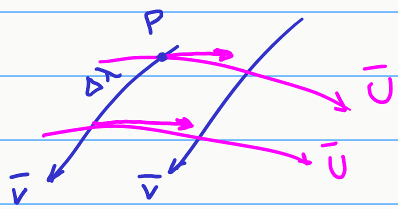
Velocidad de fase: $v'_f = \frac{\omega'}{k'_z} = \frac{c^2}{V}$

Velocidad de grupo: $v'_g = \frac{d\omega'}{dk'_z} = V$ $\qquad v'_f \, v'_g = c^2$

Derivada de Lie: hasta aquí sólo sabemos derivar p-formas. Nos gustaría definir una derivada direccional de vectores utilizando exclusivamente las estructuras ya establecidas sobre la variedad diferenciable.

Si queremos derivar un campo vectorial $\bar{U} = \frac{d}{d\mu}$ en la dirección de un vector $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ podríamos sugerir el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda) - \bar{U}(\lambda_p)}{\Delta\lambda}$$

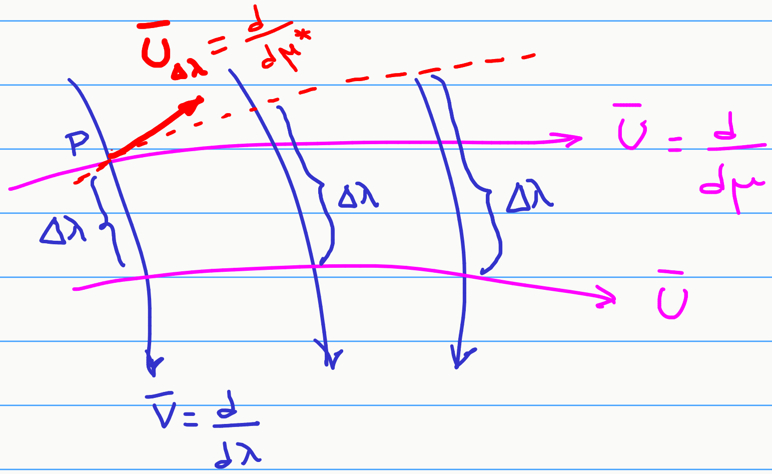


Pero ocurre que $\bar{U}(\lambda_p)$ y $\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda)$ pertenecen a espacios tangentes diferentes: no podemos restarlos

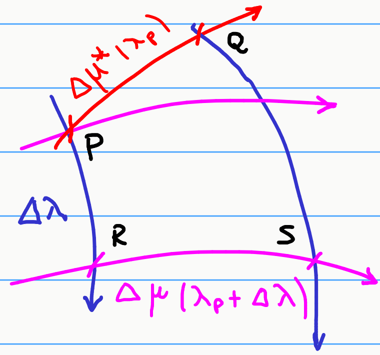
La solución sería definir en P un vector $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_p) \in T_p$ que "represente" a $\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda)$.

De esa manera, la diferencia $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_P) - \bar{U}(\lambda_P)$ tendría sentido.

Vamos a mostrar un procedimiento, conocido como "dragueo" de Lie, para definir el vector $\bar{U}_{\Delta\lambda} \in T_P$ a partir de $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$.



Construiremos la línea de campo de $\bar{U}_{\Delta\lambda}$ que pasa por P arrastrando las línea de $\bar{U}$ que pasa por $\lambda_P + \Delta\lambda$. Pero no alcanza con la línea de campo sino que debemos definir su parámetro μ^*. Para esto diremos que $\Delta\mu^*(\lambda_P) = \Delta\mu(\lambda_P + \Delta\lambda)$:



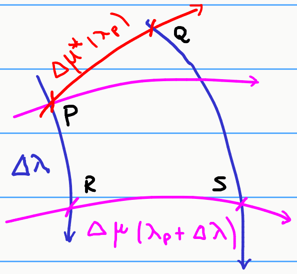
La derivada de Lie de $\bar{U}$ respecto de $\bar{V}$, $\pounds_{\bar{V}} \bar{U}$, es un vector (proviene de una diferencia de vectores en T_P); por lo tanto es una derivada sobre las funciones. Veamos cómo opera:

$$\left[\pounds_{\bar V}\bar U\right](f) = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\bar U_{\Delta\lambda}(P) - \bar U(P)}{\Delta\lambda}\right](f)$$

$$= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\left[\frac{df}{d\mu^*}(P) - \frac{df}{d\mu}(P)\right]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta\mu\to 0}}\left[\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P)\right]$$

$$f(Q)-f(P) = \big(f(Q)-f(S)\big) + \big(f(S)-f(R)\big) + \big(f(R)-f(P)\big)$$



$$\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} \longrightarrow -\frac{1}{\Delta\mu^*}\frac{df}{d\lambda}(Q) + \frac{1}{\Delta\lambda}\underbrace{\frac{\Delta\mu}{\Delta\mu^*}}_{\text{tiende a } 1}\frac{df}{d\mu}(R) + \frac{1}{\Delta\mu^*}\frac{df}{d\lambda}(P)$$

$$\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P) \longrightarrow -\overbrace{\frac{d}{d\mu^*}}^{\text{tiende a } \frac{d}{d\mu}}\frac{df}{d\lambda}\Big|_P + \overbrace{\frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(R) - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P)}^{\left[\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{d\mu}\right]_P}$$

$$= \left[\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{df}{d\lambda}\right]_P = \underbrace{[\bar V,\bar U]}_{\text{conmutador}}\,f\,\Big|_P$$

Podemos deshacernos de f, y decir que la derivada de Lie no es más que el conmutador entre los campos:

$$\boxed{\pounds_{\bar V}\bar U = [\bar V,\bar U]}$$

Un campo $\bar{U}$ se dice "Lie-dragueado" por otro campo $\bar{V}$ si $[\bar{V}, \bar{U}]=0$. En ese caso, el dragueo de Lie de las líneas de campo conduce a las propias líneas de campo; en otras palabras, los parámetros λ, μ se comportan como coordenadas (por cierto, los vectores de una base coordenada conmutan).

▷ Derivada de Lie de una función: es natural definir $\boxed{\pounds_{\bar{V}} f \doteq \bar{V}(f)}$

Es decir, el dragueo de Lie de f es $f_{\Delta\lambda} = f(\lambda + \Delta\lambda)$.

▷ Propiedades:

i) $\pounds_{\bar{V}} \bar{U} = - \pounds_{\bar{U}} \bar{V}$

ii) Regla de Leibniz: $\pounds_{\bar{V}} (g \bar{U}) = [\pounds_{\bar{V}} g] \, \bar{U} + g \, \pounds_{\bar{V}} \bar{U}$

iii) componentes en base coordenada:

$$\pounds_{\bar{V}} \bar{U} = [\bar{V}, \bar{U}] = [V^i \partial_i , U^j \partial_j] = V^i \partial_i U^j \partial_j - U^j \partial_j V^i \partial_i$$

$$= V^i (\partial_i U^j) \partial_j - U^j (\partial_j V^i) \partial_i = \left(V^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Entonces $$\boxed{\left[\pounds_{\bar{V}} \bar{U} \right]^i = V^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}}$$

Notar que ante cambio de coordenadas quedan términos con derivadas segundas que se cancelan entre sí, lo que permite que las cantidades obtenidas se transformen como componentes de un vector.

La derivada de Lie no es una genuina derivada direccional de $\bar{U}$ en la dirección de $\bar{V}$, en el sentido que también $\bar{V}$ resulta derivado.

iv) Si $\bar{V} = \frac{\partial}{\partial x^1}$: $\quad \left[\pounds_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \bar{U}\right]^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^1}$

v) $\pounds_{[\bar{V},\bar{U}]} = [\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{U}}]$

vi) Identidad de Jacobi:

$$[[\pounds_{\bar{U}}, \pounds_{\bar{V}}], \pounds_{\bar{W}}] + [[\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{W}}], \pounds_{\bar{U}}] + [[\pounds_{\bar{W}}, \pounds_{\bar{U}}], \pounds_{\bar{V}}] = 0$$

▶ Derivada de Lie de 1-formas: podemos definir $\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega}$ proponiendo que valga una regla de Leibniz del tipo

$$\pounds_{\bar{V}} [\underbrace{\tilde{\omega}(\bar{U})}_{\text{0-forma}}] = (\underbrace{\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega}}_{\text{1-forma a definir}})(\bar{U}) + \tilde{\omega}(\pounds_{\bar{V}} \bar{U})$$

$$\Rightarrow \boxed{(\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega})_i = V^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i}}$$

▶ Derivada de Lie de tensores: extendiendo la regla de Leibniz al producto entre vectores y 1-formas, $\pounds_{\bar{V}}(A \otimes B) = (\pounds_{\bar{V}} A) \otimes B + A \otimes (\pounds_{\bar{V}} B)$,

$$\boxed{\begin{aligned}(\pounds_{\bar{V}} T)^{ij\ldots k}{}_{lm\ldots n} &= V^r \frac{\partial T^{ij\ldots k}{}_{lm\ldots n}}{\partial x^r} - T^{rj\ldots k}{}_{lm\ldots n} \frac{\partial V^i}{\partial x^r} - \left\{\begin{matrix}\text{todos los}\\ \text{índices}\\ \text{contravariantes}\end{matrix}\right\} \\ &+ T^{ij\ldots k}{}_{rm\ldots n} \frac{\partial V^r}{\partial x^l} + \left\{\begin{matrix}\text{todos los}\\ \text{índices}\\ \text{covariantes}\end{matrix}\right\}\end{aligned}}$$

▶ Propiedades: si $\tilde{\omega}$ es una p-forma,

vii) $\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{V}, \ldots)] + \tilde{d}\tilde{\omega}(\bar{V}, \ldots)$ (ver Schutz § 4.20)

viii) $\pounds_{\bar{V}} (\tilde{d}\tilde{\omega}) = \tilde{d}[\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega}]$