Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 11

Torsión. Curvatura de Riemann

A partir de la conexión podemos definir dos tensores, la torsión y la curvatura de Riemann, que exhiben distintos aspectos de la noción de paralelismo que la conexión otorga a la variedad.

▶ Torsión: es un tensor de tipo $\binom{1}{2}$ antisimétrico

$$\boxed{T(\underset{\text{ranura para 1-forma}}{\uparrow};\bar{U},\bar{V}) \doteq \nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U},\bar{V}]}$$

Puede llamar la atención el último término. Su presencia permite cumplir que $T(\ ;f\bar{U},\bar{V}) = f\,T(\ ;\bar{U},\bar{V})$ como debe suceder con las ranuras de los tensores. Piénsese que $T(\ ;\bar{U},\bar{V})$ funciona como un vector, que espera una 1-forma para dar un número. Las componentes de ese vector son $T^a{}_{bc}U^bV^c$. Por lo tanto no hay derivadas de $\bar{U}$ en $T(\ ;\bar{U},\bar{V})$. Lo que hace $[\bar{U},\bar{V}]$ en la definición de la torsión es eliminar las derivadas de las componentes de $\bar{U}$ y $\bar{V}$ contenidas en $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$ y $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$.

La torsión consiste en comparar dos estructuras similares: $[\bar{U},\bar{V}]$, que sólo involucra derivadas comunes, con la misma estructura a nivel de derivadas covariantes.

▶ Propiedades:

i) Las componentes en base coordenada son

$$T(\ ;\partial_i,\partial_k) = \nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{\partial_k}\partial_i = \left(\Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ik}\right)\partial_j$$

$$\Rightarrow \boxed{T^j{}_{ik} = \Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ik} = 2\,\Gamma^j_{[ki]}}$$

La Relatividad General va a postular que el espacio-tiempo tiene torsión nula.

ii) Si la torsión es nula entonces se cumple que $[\bar U, \bar V] = \nabla_{\bar U} \bar V - \nabla_{\bar V} \bar U$

En base coordenada es $U^k V^i{}_{,k} - V^k U^i{}_{,k} = U^k V^i{}_{;k} - V^k U^i{}_{;k}$

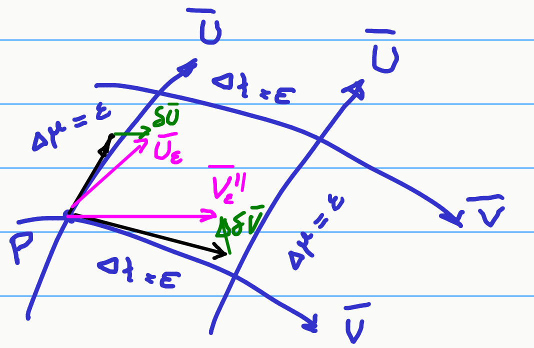
La torsión nula no solo permite reemplazar las derivadas comunes por covariantes en la derivada de Lie de un vector sino también en la derivada de Lie de cualquier tensor, y en la derivada exterior de p-formas (por supuesto, todas las derivadas deben sustituirse para que el procedimiento sea válido). Aun así debemos tener siempre presente que las derivada de Lie y exterior no dependen de la existencia de una conexión.

iii) Si la torsión es nula se satisface que $f_{;ik} = f_{;ki} \quad \forall f$

En efecto $f_{;ik} = (f_{;i})_{;k} = (f_{,i})_{;k} = f_{,ik} - \Gamma^j_{ik} f_{,j}$

Pero si la torsión es nula entonces es $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$ ✓

Significado geométrico: sean $\bar U, \bar V$ tales que $[\bar U, \bar V] = 0$ (cierran cuadriláteros)



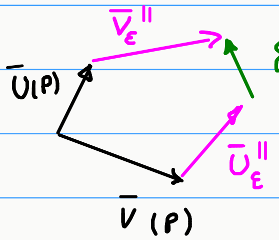
$$\delta \bar V = \bar V^{\parallel}_{\Delta\mu=\varepsilon} - \bar V(P) = \varepsilon\, \nabla_{\bar U} \bar V\, (P)$$

$$\delta \bar U \equiv \bar U^{\parallel}_{\Delta\lambda=\varepsilon} - \bar U(P) = \varepsilon\, \nabla_{\bar V} \bar U\, (P)$$

Si no hay torsión es $\delta \bar V = \delta \bar U$

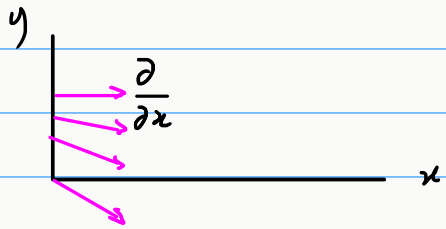
Se suele representar esto sin dibujar todos los vectores en el mismo punto P, como sería lo correcto:

$$\delta\bar{V} - \delta\bar{U} = \left(\bar{V}^{\parallel}_{\varepsilon} + \bar{U}(P)\right) - \left(\bar{U}^{\parallel}_{\varepsilon} + \bar{V}(P)\right)$$



cuando no hay torsión se anula $\delta\bar{V} - \delta\bar{U}$.

Por ejemplo, supongamos que en 2 dimensiones hay una única componente de la conexión en base coordenada que no se anula, digamos Γ^{y}_{xy} . Entonces



Por un lado es $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$

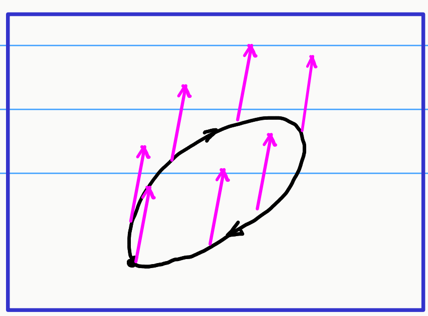
$$\delta \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma^{k}_{xy} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^{y}_{xy} \frac{\partial}{\partial y}$$

mientras que $\delta \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma^{k}_{yx} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$

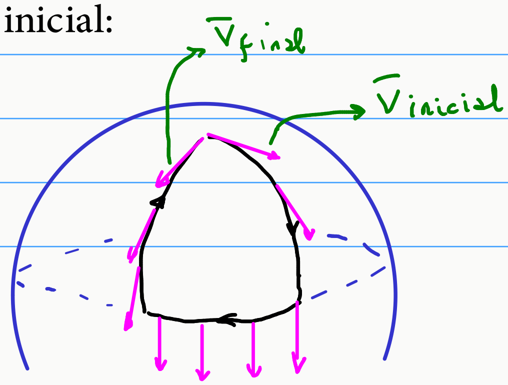
cuando $\frac{\partial}{\partial x}$ se traslada paralelamente a lo largo de $\frac{\partial}{\partial y}$ se genera una componente y debido a que $\Gamma^{y}_{xy} \neq 0$

Tensor de curvatura de Riemann

Una característica del transporte paralelo en superficies curvas es que depende del camino; equivalentemente, el transporte paralelo de un vector sobre un camino cerrado no da por resultado el vector inicial:



en un plano



en una esfera

Esta idea de curvatura asociada al transporte paralelo puede entonces ser definida en una variedad diferenciable dotada de una conexión. Según sea la conexión habrá o no curvatura. La curvatura local de una conexión implica comparar el transporte paralelo de un vector por caminos diferentes que unan puntos vecinos separados infinitesimalmente. Como veremos enseguida, el tensor involucrado en tal caso es el tensor de curvatura de Riemann, que es un tensor de tipo $\binom{1}{3}$ definido como

ranura para 1-forma

$$\boxed{R(\ \ ;\bar{C},\bar{A},\bar{B}) \doteq [\nabla_{\bar{A}},\nabla_{\bar{B}}]\,\bar{C} - \nabla_{[\bar{A},\bar{B}]}\,\bar{C}}$$

El segundo término es necesario para evitar las derivadas de los vectores que ocupan las ranuras, como ocurre con todo tensor. Es decir que se cumple

$$R(\ ;f\bar{C},\bar{A},\bar{B}) = f\,R(\ ;\bar{C},\bar{A},\bar{B}), \quad R(\ ;\bar{C},f\bar{A},\bar{B}) = f\,R(\ ;\bar{C},\bar{A},\bar{B}), \ \ldots$$

para toda función f.

Propiedades

i) las últimas dos ranuras son antisimétricas: $R(\ ;\bar{C},\bar{A},\bar{B}) = -R(\ ;\bar{C},\bar{B},\bar{A})$

$$\Rightarrow \quad R^a{}_{b(cd)} = 0$$

ii) Componentes en base coordenada:

$$R(\ ;\partial_k,\partial_i,\partial_j) = [\nabla_{\partial_i},\nabla_{\partial_j}]\,\partial_k = \nabla_{\partial_i}(\Gamma^\ell_{kj}\,\partial_\ell) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma^\ell_{ki}\,\partial_\ell)$$

$$= (\Gamma^\ell_{kj,i} - \Gamma^\ell_{ki,j})\,\partial_\ell + \Gamma^\ell_{kj}\,\Gamma^m_{\ell i}\,\partial_m - \Gamma^\ell_{ki}\,\Gamma^m_{\ell j}\,\partial_m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R^\ell{}_{kij} = \Gamma^\ell_{kj,i} - \Gamma^\ell_{ki,j} + \Gamma^m_{kj}\,\Gamma^\ell_{mi} - \Gamma^m_{ki}\,\Gamma^\ell_{mj}}$$

iii) si la torsión es nula, entonces los símbolos de Christoffel son simétricos. Por lo tanto $R^{\ell}{}_{[kij]} = 0$

Usando la antisimetría de los dos últimos índices también podemos escribir

$$R^{\ell}{}_{kij} + R^{\ell}{}_{ijk} + R^{\ell}{}_{jki} = 0$$

iv) Identidades de Bianchi: si la torsión es nula

$$R^{\ell}{}_{k[ij;m]} \underset{\text{por (i)}}{=} \frac{1}{3}\left(R^{\ell}{}_{kij;m} + R^{\ell}{}_{kjm;i} + R^{\ell}{}_{kmi;j} \right) = 0$$

Dem) Podemos utilizar coordenadas normales de Riemann con origen en P. Entonces $\Gamma^{\ell}_{kj}(P) = 0$. Por lo tanto

$R^{\ell}{}_{kij;m} = \Gamma^{\ell}_{kj,im} - \Gamma^{\ell}_{ki,jm}$

El primer término es simétrico en im, y el segundo lo es en jm $\Rightarrow R^{\ell}{}_{k[ij;m]} = 0$. Como la anulación de un tensor es independiente de la base, entonces el resultado vale en cualquier base.

Se puede ver que este resultado es equivalente a la identidad de Jacobi

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0$$

donde $\nabla_i \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$

v) Número de componentes independientes: las n^4 componentes del Riemann están ligadas por las propiedades (i) y (iii) (en caso que la torsión sea nula)

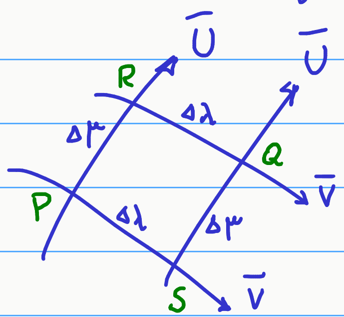
Entonces las componentes independientes se reducen a

$$m^4 - \underbrace{m^2\,\frac{m(m+1)}{2}}_{\text{nº de ecuaciones en la propiedad (i)}} - \underbrace{m\binom{m}{3}}_{\text{nº de ecuaciones en la propiedad (iii)}} = \frac{1}{3}\,m^2\,(m^2-1)$$

Significado geométrico: para comparar el transporte paralelo por dos caminos distintos deberemos extender la definición del vector paralelo-transportado por lo menos al segundo orden del cambio de los parámetros, pues el efecto que buscamos se manifestará a ese orden.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar U^{\parallel}_{\Delta\lambda}(P) &\doteq \bar U(P) + \Delta\lambda\,\nabla_{\bar V}\bar U(P) + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2\,\nabla_{\bar V}\nabla_{\bar V}\bar U(P) + \cdots \\ &= \exp\left[\Delta\lambda\,\nabla_{\bar V}\right]\bar U\Big|_P \end{aligned}}$$

Con esta definición veamos el transporte de un vector $\bar A$ desde Q hasta P a lo largo de las líneas de campo de los vectores $\bar U, \bar V$:



$\bar U, \bar V$ son tales que $[\bar U, \bar V] = 0$ (sus líneas "cierran cuadriláteros")

1er camino: $Q \to R \to P$

2do camino: $Q \to S \to P$

$$\delta\bar A_{\text{1er camino}} = \delta\bar A_{Q\to R} + \delta\bar A_{R\to P}$$

$$\delta\bar{A}_{Q\to R} = \Delta\lambda \; \nabla_{\bar{v}}\bar{A}\big|_R + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \; \nabla_{\bar{v}}(\nabla_{\bar{v}}\bar{A})\big|_R + \cdots$$

Los vectores a ser sumados deben estar todos en P. Como sólo retendremos hasta el segundo orden, no cometemos error si evaluamos $\nabla_{\bar{v}}(\nabla_{\bar{v}}\bar{A})$ en P. En cambio, debemos desarrollar $\nabla_{\bar{v}}\bar{A}\big|_R$:

$$\delta\bar{A}_{Q\to R} = \Delta\lambda\left(\nabla_{\bar{v}}\bar{A}\big|_P + \Delta\mu\, \nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{v}}\bar{A}\big|_P \right) + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \; \nabla_{\bar{v}}(\nabla_{\bar{v}}\bar{A})\big|_P + \cdots$$

Por otro lado

$$\delta\bar{A}_{R\to P} = \Delta\mu \; \nabla_{\bar{u}}\bar{A}\big|_P + \frac{1}{2}(\Delta\mu)^2 \; \nabla_{\bar{u}}(\nabla_{\bar{u}}\bar{A})\big|_P + \cdots$$

Estos resultados permiten obtener los valores para el segundo camino intercambiando $\mu \leftrightarrow \lambda$, $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$:

$$\delta\bar{A}_{Q\to S} = \Delta\mu\left(\nabla_{\bar{u}}\bar{A}\big|_P + \Delta\lambda\, \nabla_{\bar{v}}\nabla_{\bar{u}}\bar{A}\big|_P \right) + \frac{1}{2}(\Delta\mu)^2 \; \nabla_{\bar{u}}(\nabla_{\bar{u}}\bar{A})\big|_P + \cdots$$

$$\delta\bar{A}_{S\to P} = \Delta\lambda \; \nabla_{\bar{v}}\bar{A}\big|_P + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \; \nabla_{\bar{v}}(\nabla_{\bar{v}}\bar{A})\big|_P + \cdots$$

En $\quad \Delta\bar{A} = \delta\bar{A}_{1^{er}\,camino} - \delta\bar{A}_{2^{do}\,camino} = \delta\bar{A}_{Q\to R} + \delta\bar{A}_{R\to P} - \delta\bar{A}_{Q\to S} - \delta\bar{A}_{S\to P}$

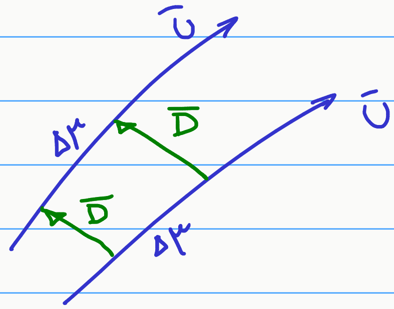
sólo sobreviven los términos $\Delta\mu\,\Delta\lambda$:

$$\boxed{\Delta\bar{A} = \Delta\lambda\,\Delta\mu\left(\nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{v}}\bar{A} - \nabla_{\bar{v}}\nabla_{\bar{u}}\bar{A}\right)_P = \Delta\lambda\,\Delta\mu\; R(\,;\bar{A},\bar{u},\bar{v})\big|_P}$$

El tensor de Riemann mide el cambio de un vector ante transporte paralelo en un camino cerrado. Su par de índices antisimétricos se relacionan con el "área" encerrada por el camino.

- **Espacio plano:** un espacio se dice plano si el tensor de Riemann se anula en todos sus puntos.

- **Desvío de las autoparalelas** ("desviación geodésica")



Consideremos una congruencia de autoparalelas : $\nabla_{\bar U}\bar U = 0$

y un campo $\bar D$ tal que $[\bar U,\bar D]=0$

($\bar U$, $\bar D$ "cierran cuadriláteros")

Entonces

$$R(\ ;\bar U,\bar U,\bar D) \underset{[\bar U,\bar D]=0}{=} [\nabla_{\bar U},\nabla_{\bar D}]\,\bar U \underset{\nabla_{\bar U}\bar U=0}{=} \nabla_{\bar U}\nabla_{\bar D}\bar U$$

Por otro lado, si la torsión es nula es

$$\nabla_{\bar U}\bar D - \nabla_{\bar D}\bar U = [\bar U,\bar D] = 0$$

Luego

$$\boxed{R(\ ;\bar U,\bar U,\bar D) = \nabla_{\bar U}\nabla_{\bar U}\bar D}$$

El tensor de curvatura de Riemann también mide la "aceleración" la "separación" entre autoparalelas.

Notación: puede ser práctica la siguiente notación

dado $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ entonces $\nabla_{\bar{V}}\bar{U} \equiv \frac{D\bar{U}}{D\lambda}$

Es decir $\left(\frac{D\bar{U}}{D\lambda}\right)^i = (\nabla_{\bar{V}}\bar{U})^i = V^k\left(U^i{}_{,k} + \Gamma^i_{jk}U^j\right) = \frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk}U^jV^k$

Así el desvío de las autoparalelas se escribe

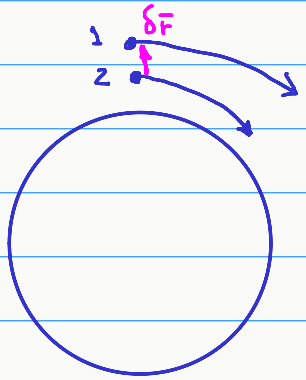
$$R(\ ;\bar{U},\bar{U},\bar{D}) = \frac{D^2\bar{D}}{D\mu^2}$$

Tensor de Ricci: es el tensor $\binom{0}{2}$ que resulta de una contracción del Riemann,

$$\boxed{R_{kj} \doteq R^l{}_{klj}}$$

Fuerza de mareas

En la teoría de Newton consideremos dos partículas vecinas en caída libre en un campo gravitatorio no uniforme. Sus trayectorias son



$$\bar{r}_2(t) = \bar{r}_1(t) + \delta\vec{r}(t)$$

Las ecuaciones de movimiento de cada partícula son:

$$\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi(\bar{r}_1) \quad , \quad \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi(\bar{r}_2)$$

Restando las ecuaciones: $\dfrac{d^2 \delta \bar{r}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\Phi(\bar{r}_2) + \bar{\nabla}\Phi(\bar{r}_1)$

donde $\bar{\nabla}\Phi(\bar{r}_2) = \bar{\nabla}\Phi(\bar{r}_1 + \delta\bar{r})$

En componentes cartesianas es $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}(\bar{r}_1 + \delta\bar{r}) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}(\bar{r}_1) + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\, \delta x^\beta$

Entonces $$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\delta\bar{r} = -(\delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla})\,\bar{\nabla}\Phi}$$

En un campo no uniforme, las partículas en caída libre experimentan aceleraciones relativas que, al orden más bajo, provienen de las derivadas segundas del potencial gravitatorio. Así, trayectorias que son inicialmente paralelas, $\delta\dot{\bar{r}}(t=0) = 0$, no permanecerán paralelas. Esta "fuerza de mareas" es el único vestigio de gravitación que sobrevive en un sistema localmente inercial (laboratorio en caída libre), donde el campo gravitatorio-inercial se anula.

La formulación del campo gravitatorio-inercial en Relatividad

Hasta aquí tenemos la siguiente situación:

	Newton	geometría	
potencial	Φ	g_{ik}	corrimiento al rojo gravitatorio en campo débil
fuerza	$\partial\Phi$ $\xrightarrow{\text{Pcipio. de Equivalencia}}$	? $\Gamma^{i}_{(jk)}$	se anula en el origen de las coordenadas normales de Riemann y otras cartas
"mareas"	$\partial^2\Phi$	R "=" $\partial\Gamma$	desvío de autoparalelas