Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 12

Tensor métrico. Geodésicas. Conexión de Levi-Civita

Tensor métrico: para definir un producto interno de vectores es necesario introducir un tensor simétrico de tipo $\binom{0}{2}$, que tome dos vectores para dar un número independiente del orden de los vectores. El tensor que tiene ese papel se denomina tensor métrico,

$$g = g_{ab}\,\tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b \quad , \quad g_{ab} = g_{ba} \quad \forall a,b$$

Producto interno de vectores:

$$\bar{U}\cdot\bar{V} \doteq g(\bar{U},\bar{V}) = g_{ab}\,U^a V^b = \bar{V}\cdot\bar{U}$$

La existencia de una métrica otorga norma a los vectores, $|\bar{U}| = (\bar{U}\cdot\bar{U})^{1/2}$, y permite definir el ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \bar{U}\cdot\bar{V}/(|\bar{U}|\;|\bar{V}|)$. También permite definir una noción de distancia entre puntos vecinos de la variedad. La distancia entre dos puntos cuyas coordenadas difieren infinitesimalmente, x^i y $x^i + \Delta x^i$, queda definida como la norma del vector

$$\overline{\Delta x} \equiv \Delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \Delta x^i \to 0$$

Recordemos que los Δx^i infinitesimales transforman como componentes de un vector:

$$\Delta x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\Delta x^i \quad , \quad \Delta x^i \to 0$$

Entonces, en el límite de una separación infinitesimal, la distancia entre dos puntos vecinos es

$$ds^2 \doteq \lim_{\Delta x^i \to 0} g(\overline{\Delta x}, \overline{\Delta x}) = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

que es la forma cuadrática de los diferenciales de las coordenadas que define la distancia en las geometrías de Riemann.

La Relatividad utiliza una geometría pseudo-riemanniana ya que la métrica no es definida positiva. En ese caso ds no se llama distancia sino intervalo.

El tensor métrico permite establecer una correspondencia entre los espacios tangente y cotangente. A partir de un vector $\bar{V}$ definimos una 1-forma

$$\tilde{V} \doteq g(\bar{V}, \ ) = g(\ , \bar{V})$$

$\tilde{V}$ es una 1-forma porque espera un vector para dar un número:

$$\tilde{V}(\bar{U}) = g(\bar{V}, \bar{U}) = \bar{V} \cdot \bar{U} = g_{ab} V^a U^b$$

Entonces las componentes de $\tilde{V}$ son $\quad V_b = g_{ab} V^a = g_{ba} V^a$

Comúnmente decimos que el tensor métrico se usa para "bajar" índices. También podemos concebir la operación de "subir" índices para asociar un vector a una 1-forma; en ese caso utilizaremos el tensor $\binom{2}{0}$ inverso del tensor métrico, que llamaremos g^{ab} :

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$$

Entonces

$$g^{ab} V_b = V^a$$

En este sentido podemos decir que $g^{ab} g_{bc} = g^a{}_c$; por lo tanto

$$g^a{}_c = \delta^a_c$$

Bases ortonormales

Ahora que tenemos el concepto de norma de un vector y de ángulo entre vectores podemos definir bases ortonormales. Una base de Π_P es ortonormal si

$$\delta_{ab} = \bar{E}_a \cdot \bar{E}_b = g(\bar{E}_a, \bar{E}_b) = g_{ab}$$

Pero en la geometría pseudo-riemanniana de la Relatividad diremos en su lugar que la base es ortonormal si

$$g_{ab} = \bar{E}_a \cdot \bar{E}_b = \eta_{ab}$$

donde η_{ab} es el símbolo de Minkowski: $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

Las bases coordenadas no son, en general, ortonormales pues

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = g_{ij} \neq \eta_{ij}$$

Es bueno mencionar en este punto que la construcción de las coordenadas normales de Riemann, que logran la anulación de $\Gamma^i_{(jk)}$ en el origen, puede hacerse a partir de una base ortonormal en el origen. Como de la construcción resulta que $\partial/\partial X^m|_P = \bar{E}_m$, entonces en tal caso resulta que en el origen vale que $g_{mn}(P) = \eta_{mn}$.

Si $\{\bar{E}_a\}$ es ortonormal entonces la base dual es

$$\tilde{E}^a = \eta^{ab}\, g(\bar{E}_b, \ )$$

En efecto $\tilde{E}^a(\bar{E}_c) = \eta^{ab}\, g(\bar{E}_b, \bar{E}_c) = \eta^{ab}\eta_{bc} = \delta^a_c$ ✓

Como $g_{ab} = g(\bar{E}_a, \bar{E}_b) = \eta_{ab}$ cuando la base es ortonormal, entonces se tiene

$$\boxed{g = \eta_{ab}\, \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b}$$

bases ortonormales

Pasamos de una base ortonormal a otra mediante transformaciones de Lorentz, pues el símbolo de Minkowski es invariante lorentziano.

Volumen métrico

En cualquier base ortonormal el volumen métrico se escribe

$$\boxed{\tilde{\Omega} = \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 \wedge \cdots \wedge \tilde{E}^n}$$

(las transformaciones de Lorentz tienen determinante igual a 1; por lo tanto la componente de $\tilde{\Omega}$ vale 1 en cualquier base ortonormal).

En particular, si usamos las coordenadas normales de Riemann construidas a partir de una base ortonormal es

$$\tilde{\Omega} = \widetilde{dX}^1 \wedge \widetilde{dX}^2 \wedge \cdots \wedge \widetilde{dX}^n$$

en el origen. Como ya fue demostrado, esto significa que en una carta cualquiera el volumen métrico tiene la forma

$$\boxed{\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\; \widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^2 \wedge \cdots \wedge \widetilde{dx}^n}$$

Geodésicas: la existencia de una métrica permite medir la longitud de una curva, como la integral de la distancia entre puntos vecinos de la curva:

$$\Delta s = \int \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\, d\lambda$$

donde $x^i = x^i(\lambda)$ son las ecuaciones parámetricas de la curva.

Llamaremos "geodésica" a la curva entre dos puntos dados cuya longitud sea estacionaria. Por lo tanto la geodésica debe cumplir ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano $L = \sqrt{g_{kj}\, \dot{x}^k \dot{x}^j}$; esto es,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ef}\, \dot{x}^e \dot{x}^f}}\, g_{ij}\, \dot{x}^j\right) - \frac{1}{2}\, \frac{1}{\sqrt{g_{ef}\, \dot{x}^e \dot{x}^f}}\, \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\, \dot{x}^k \dot{x}^j = 0$$

Es conveniente reparametrizar la curva definiendo un parámetro μ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ef}\, \dot{x}^e \dot{x}^f}}\, \frac{d}{d\lambda} \equiv \frac{d}{d\mu}$$

Es decir que $d\mu = \sqrt{g_{ef}\, dx^e dx^f}$; el nuevo parámetro mide la longitud de la curva.

Entonces

$$\frac{d}{d\mu}\left(g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

Ley de conservación: como ocurre en todo Lagrangiano, si una coordenada es cíclica obtenemos una ley de conservación (1er. Teorema de Noether). En nuestro caso, si el tensor métrico no depende explícitamente de la coordenada x^i entonces la ecuación dinámica dice que se conserva $g_{ij}\, dx^j/d\mu$.

Como vemos, el problema de obtener las geodésicas de una geometría riemanniana es equivalente al problema de obtener la línea de universo de una partícula libre en una geometría pseudo-riemanniana. En este último caso, el párametro μ no será la longitud sino el tiempo propio τ de la partícula multiplicado por c, y habrá que multiplicar la integral por $-mc$ para dar con la acción de la partícula "libremente gravitante" (una métrica no trivial indicará la presencia de potenciales del campo gravitatorio-inercial). La ley de conservación que acabamos de ver corresponderá a la conservación de una componente del covector cantidad de movimiento, $p_i = g_{ij}\, p^j = m\, g_{ij}\, dx^j/d\tau$, cuando las componentes de la métrica no dependan de x^i. Las derivadas de las componentes del tensor métrico aparecen en las ecuaciones dinámicas jugando el papel de la "fuerza" que produce el cambio de las componentes del covector p_i; la cuadrivelocidad de la partícula forma parte de esa "fuerza".

Avancemos con la ecuación de la geodésica derivando el primer término:

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{d\mu^2} + \frac{dx^j}{d\mu}\frac{d}{d\mu}g_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

$$\frac{d}{d\mu}g_{ij} \rightarrow \frac{dx^k}{d\mu}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Multiplicando por g^{li},

$$\frac{d^2x^l}{d\mu^2} + g^{li}\left(g_{ij,k} - \frac{1}{2}g_{kj,i}\right)\frac{dx^k}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

Como $\frac{dx^k}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu}$ es simétrico, en la contracción sólo sobrevive la parte simétrica en kj de la expresión en el paréntesis:

$$\boxed{\frac{d^2x^l}{d\mu^2}+\frac{1}{2}\,g^{li}\left(g_{ij,k}+g_{ik,j}-g_{kj,i}\right)\frac{dx^k}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu}=0}$$

Ecuación de la geodésica

Autoparalelas y geodésicas: en un espacio euclidiano las rectas tienen la doble propiedad de ser autoparalelas y geodésicas. Pero vemos que estas dos propiedades provienen de estructuras diferentes. Mientras una viene de la conexión, la otra viene de la métrica. ¿Será posible combinar ambas propiedades en las geometrías riemannianas tal como sucede en la geometría euclidiana? Sí, si miramos el segundo término de la ecuación anterior como un término de conexión. Para ello deberíamos utilizar una conexión cuya parte simétrica en base coordenada sea

$$\Gamma^l_{(jk)}=\frac{1}{2}\,g^{li}\left(g_{ij,k}+g_{ik,j}-g_{kj,i}\right)$$

(no importa qué valor tenga la torsión). La longitud, o el tiempo propio, juega entonces el papel de parámetro afín de la autoparalela. Nótese que ésta es la parte no tensorial de la conexión, la parte que se puede anular en un punto por medio de una elección apropiada de la carta. Si la Relatividad General se formulara con una conexión de este tipo se lograría establecer la relación esperada entre potencial y campo: $\Gamma\sim\partial g$. ¿Qué dirá la Relatividad General sobre la parte antisimétrica de los símbolos de Christoffel? (la parte tensorial de la conexión, que corresponde a la torsión). Simplemente dirá que el espacio-tiempo carece de torsión. Así la ecuación anterior da la totalidad de la conexión en Relatividad General. Se llama la conexión de Levi-Civita:

$$\boxed{\Gamma^l_{jk}=\frac{1}{2}\,g^{li}\left(g_{ij,k}+g_{ik,j}-g_{kj,i}\right)}$$

Conexión métrica: una conexión se dice "métrica" si es tal que se anula la derivada covariante del tensor métrico,

$$\nabla g(\,,\,) = 0 \quad \text{ó} \quad g_{ij;k} = 0 \quad \forall\, i,j,k$$

La única conexión métrica sin torsión es la conexión de Levi-Civita. En efecto

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^l_{ik}\, g_{lj} - \Gamma^l_{jk}\, g_{il} = 0 \qquad (1)$$

Permutando cíclicamente los índices:

$$g_{jk,i} - \Gamma^l_{ji}\, g_{lk} - \Gamma^l_{ki}\, g_{jl} = 0 \qquad (2)$$

$$g_{ki,j} - \Gamma^l_{kj}\, g_{li} - \Gamma^l_{ij}\, g_{kl} = 0 \qquad (3)$$

Ahora hacemos (1)+(2)-(3), y usamos que la torsión es nula ($\Gamma^l_{kj} = \Gamma^l_{jk}$):

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} - 2\,\Gamma^l_{ik}\, g_{lj} = 0 \quad \checkmark$$

Cuando la conexión es métrica vale la regla de Leibniz para la derivada del producto escalar de vectores, $\nabla_{\bar V}(\bar U\cdot\bar W) = (\nabla_{\bar V}\bar U)\cdot\bar W + \bar U\cdot(\nabla_{\bar V}\bar W)$, pues

$$(g_{ij}\, U^i W^j)_{;k} = g_{ij}\,(U^i{}_{;k} W^j + U^i W^j{}_{;k})$$

En particular, si $\bar U, \bar W$ se transportan paralelamente en la dirección de $\bar V$, entonces $\nabla_{\bar V}(\bar U\cdot\bar W) = \overbrace{\nabla_{\bar V}\bar U}^{0}\cdot\bar W + \bar U\cdot\overbrace{\nabla_{\bar V}\bar W}^{0} = 0$; esto significa que el transporte paralelo de las conexiones métricas preserva normas y ángulos. Así, si una autoparalela es temporal en un punto ($\bar U\cdot\bar U > 0$) entonces es temporal en todos sus puntos, y otro tanto si es espacial o nula.

Cuando la conexión es métrica la operación de subir y bajar índices conmuta con la derivada covariante: $g_{ij}\,(A^i{}_{;k}) = (g_{ij}A^i)_{;k} = A_{j;k}$

La geometrización del campo gravitatorio-inercial

Ya tenemos configurados todos los elementos geométricos que entrarán en la formulación de la Relatividad General. Podemos completar el cuadro comparativo con la gravedad de Newton:

	Newton	Einstein		En el origen de una carta localmente inercial:
potencial	Φ	g_{ik}	tensor métrico	η_{ik}
fuerza	$\partial\Phi$	∂g_{ik}	conexión de Levi-Civita	Se anula (Principio de equivalencia)
"mareas"	$\partial^2\Phi$	$\partial^2 g_{ik}$	curvatura de Riemann $(\partial\Gamma)$	No se anula, pues la curvatura es tensorial. Es un campo físico (desviación geodésica)

Propiedades de la conexión de Levi-Civita

Sea un tensor $\binom{p}{0}$ totalmente antisimétrico; entonces

$$F^{ij\cdots}{}_{;i} = F^{ij\cdots}{}_{,i} + \Gamma^{i}_{li}\, F^{lj\cdots} + \Gamma^{j}_{li}\, F^{il\cdots} + \cdots$$

Como la torsión es nula ($\Gamma^{j}_{[li]}=0$), el último término y los que siguen se anulan.

Además, para la conexión de Levi-Civita vale que

$$\Gamma^{l}_{jl} = \frac{1}{2}\, g^{li}\left(g_{ij,l} + g_{il,j} - g_{lj,i}\right)$$

Los términos primero y último, contraídos con g^{li}, se cancelan (usar que $g^{li}=g^{il}$). Entonces

$$\Gamma^{l}_{jl} = \frac{1}{2}\, g^{li}\, g_{il,j} = \partial_j\left[\ln|\det(g_{ij})|^{1/2}\right]$$

(el resultado vale para cualquier matriz y su inversa, incluso si la matriz no es simétrica).

Reemplazando este resultado obtenemos

$$F^{ij\cdots}{}_{;i} = F^{ij\cdots}{}_{,i} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\right)_{,i} F^{ij\cdots}$$

$$\boxed{F^{ij\cdots}{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(\sqrt{|g|}\,F^{ij\cdots}\right)}$$

Este resultado se aplica en particular a la divergencia covariante de un vector, que entonces es igual a la definición de divergencia que dimos en el contexto del cálculo exterior y el volumen métrico:

$$\boxed{V^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,V^i\right)_{,i} \equiv \mathrm{div}_{\tilde{\Omega}}\,\bar{V}}$$

Si el vector proviniera del gradiente de una función, $V^i = g^{ji}\partial_j\phi$ estaríamos ante el Laplaciano $\Delta\phi$ (o el d'Alembertiano $\Box\phi$, según sea el caso), que tendría dos expresiones equivalentes:

$$g^{ji}\phi_{;ji} \underset{\uparrow}{=} \left(g^{ji}\partial_j\phi\right)_{;i} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(\sqrt{|g|}\,g^{ji}\,\partial_j\phi\right)$$

la conexión es métrica; además $\phi_{;j} = \phi_{,j}$ — la conexión es de Levi-Civita

Ejercicio: usando la definición del operador estrella de Hodge mostrar que para una 2-forma F en n=4 resulta

$$(*\,d*F)_i = -g_{ij}\,\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k\left(\sqrt{|g|}\,F^{kj}\right)$$

Luego concluir que en la conexión de Levi-Civita vale que

$$(*d*F)_i = F_i{}^k{}_{;k}$$

Hemos visto que la acción de la partícula libremente gravitante

$$S_{libre} = -mc \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

conduce a la ecuación de la geodésica, que en la conexión de Levi-Civita (o en cualquier otra que difiera de ésta en un término de torsión) es

$$U^i U^j{}_{;i} = 0 \quad ó \quad \nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0 \quad ó \quad \frac{D\bar{U}}{D\tau} = 0$$

donde $\bar{U} = \dfrac{d}{d\tau}$ es la cuadrivelocidad de la partícula: $U^j = \dfrac{dx^j}{d\tau}$

Remarquemos que las cuatro ecuaciones $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$ no son independientes porque siempre es $\bar{U} \cdot \bar{U} = c^2$; por lo tanto $\bar{U} \cdot \nabla_{\bar{U}}\bar{U} \equiv 0$, lo que liga las cuatro ecuaciones (hay tres grados de libertad).

Así mismo, acabamos de ver que la ecuación dinámica que resulta de la acción electromagnética, $* \, d * \tilde{F} = -\mu_o \, \tilde{j}$ puede releerse en términos de la conexión de Levi-Civita como

$$F^{ik}{}_{;k} = -\mu_o \, j^i$$

En ambos casos las acciones que conocemos de Relatividad Especial, ahora escritas para una métrica general, conducen a ecuaciones dinámicas que pueden reelerse fácilmente en términos de la conexión de Levi-Civita; basta tomar las leyes formuladas en la carta cartesiana de Relatividad Especial y reemplazar la derivada común por la derivada covariante.