Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 13

Teorema de Gauss y tensor de Riemann con conexión de Levi-Civita.
Postulados de la Relatividad General
Partícula libremente gravitante
Vectores de Killing

El teorema de Gauss

Del teorema de Stokes generalizado hemos obtenido como caso particular el teorema de la divergencia

$$\int_U (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V})\, \tilde{\omega} = \int_{\partial U} n_i V^i \tilde{\alpha}$$

donde $\tilde{n}$ es una 1-forma normal a ∂U y $\tilde{\alpha}$ es una (n-1)-forma tal que

$$\tilde{\omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha}$$

Si $\tilde{\omega}$ es el volumen métrico $\tilde{\Omega}$ entonces ,

$$\mathrm{div}_{\tilde{\Omega}} \bar{V} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|}\, V^i\right)$$

que coincide con $V^i_{\ ;\,i}$ si la conexión es la de Levi-Civita, como vimos la clase pasada. Veamos el miembro derecho del teorema; debemos descomponer el volumen métrico como $\tilde{\Omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha}$. Consideremos una carta tal que $x^1 = a$ sobre ∂U , y la región U corresponde a $x^1 < a$. Entonces $\tilde{dx}^1$ es una forma normal a ∂U , pues su aplicación a un vector tangente a ∂U da cero (x^1 es constante a lo largo de curvas en ∂U). Nos gustaría tener una 1-forma normal unitaria, para lo cual observamos que

$$\|\tilde{dx}^1\|^2 = g^{-1}(\tilde{dx}^1, \tilde{dx}^1) = g^{11} \qquad \text{(puede ser positivo o negativo)}$$

Entonces la 1-forma normal unitaria es

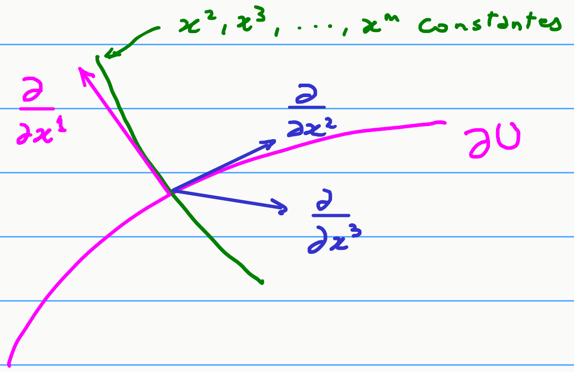
$$\tilde{n} = |g^{11}|^{-\frac{1}{2}}\ \widetilde{dx^1}$$

y la descomposición del volumen métrico queda

$$\hat{\Omega} = \sqrt{|g|}\ \widetilde{dx^1} \wedge \widetilde{dx^2} \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx^n} = |g|^{\frac{1}{2}}\,|g^{11}|^{\frac{1}{2}}\ \tilde{n} \wedge \widetilde{dx^2} \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx^n}$$

Si las coordenadas se eligen tales que

$$g_{1k} = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \qquad k = 2, 3, \ldots$$



La métrica resulta diagonal por bloques:

$$g_{ik} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11} & 0 \\ \hline 0 & h_{uv} \end{array}\right)$$

Entonces $\quad |g| = |g_{11}|\,|h| = |g^{11}|^{-1}\,|h|$

Así la descomposición del volumen métrico resulta $\quad \tilde{\Omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha}\quad$ con

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{|h|}\ \widetilde{dx^2} \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx^n} \qquad \text{volumen inducido en } \partial U$$

El teorema de Gauss es entonces

$$\boxed{\int_U V^i{}_{;i}\ dv = \int_{\partial U} V^i\, d\Sigma_i}$$

$dv = \sqrt{|g|}\ dx^1 dx^2 \ldots dx^n$

$d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$

$d\Sigma$: volumen inducido en ∂U

$\quad = \sqrt{|h|}\ dx^2 \ldots dx^n$

El tensor de Riemann en la conexión de Levi-Civita

En la conexión de Levi-Civita las componentes del tensor de Riemann son

$$\boxed{R_{\ell kij} = g_{\ell m} R^m{}_{kij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\ell j}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^\ell \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^\ell \partial x^i}\right) + g_{mn}\left(\Gamma^m_{ki}\Gamma^n_{\ell j} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^n_{\ell i}\right)}$$

El último paréntesis no coincide con el que aparece en la forma original del Riemann porque contiene contribuciones de las derivadas de los símbolos de Christoffel.

A las dos relaciones ya conocidas entre estas componentes, se agrega una tercera:

$$i)\ R_{\ell k(ij)} = 0 \quad , \quad ii)\ R_{\ell [kij]} = 0 \quad , \quad iii)\ R_{\ell kij} = R_{ij\ell k}$$

La nueva propiedad modifica el conteo de componentes independientes. Conviene pensar la propiedad (iii) como $R_{AB} = R_{BA}$ donde A y B representan un par de índices antisimétricos ij o lk, por la propiedad (i). Por lo tanto, cada índice A, B corre por $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ valores distintos. Pero la propiedad (iii) dice que R_{AB} es simétrica en sus dos índices; por lo tanto tiene $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes independientes.

Por otro lado, la propiedad (ii) constituye una condición adicional sólo si los cuatro índices son diferentes (es decir, sólo si $n > 3$). En efecto, aunque ℓ no participa de la antisimetrización, ocurre que

$$3\, R_{\ell[kij]} = R_{\ell kij} + R_{\ell ijk} + R_{\ell jki} =$$

kij diferentes

(i)

$$= R_{k\ell ji} + R_{kji\ell} + R_{ki\ell j} = 3\, R_{k[\ell ji]}$$

(i) y (iii)

ℓji diferentes

Hay $\binom{n}{4}$ formas de elegir cuatro índices diferentes entre n. Entonces el número de componentes independientes del Riemann en la conexión de Levi-Civita es:

$$I = \overbrace{\frac{1}{2} N(N+1)}^{R_{AB}} - \binom{n}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} n(n-1)\right]\left[\frac{1}{2} n(n-1)+1\right] - \binom{n}{4} = \frac{n^2}{12}(n^2-1)$$

El término $\binom{n}{4}$ se anula si n < 4:

$$\binom{n}{4} = \frac{n}{24}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$n=1 \longrightarrow I=0$ (no hay curvatura intrínseca en $n=1$)

$n=2 \longrightarrow I=1$ hay una sola componente relevante en superficies: es la curvatura de Gauss $K = -\frac{R_{1212}}{g}$.

$n=3 \longrightarrow I=6$ es igual al número de componentes independientes del Ricci. Toda la información del Riemann está contenida en el Ricci, que es simétrico.

$n=4 \longrightarrow I=20$ (el Ricci tiene 10 componentes independientes, pues es simétrico)

Tensor de Ricci, escalar de curvatura

Las simetrías del Riemann provistas por la conexión de Levi-Civita hacen que el Ricci resulte simétrico, $R_{ik} = R^{\ell}{}_{i\ell k} = R_{ki}$, y tenga la forma

$$R_{ij} = R^{\ell}{}_{i\ell j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}\, \Gamma^k_{ij}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \ln \sqrt{|g|} - \Gamma^k_{\ell i} \Gamma^{\ell}_{jk}$$

Se define el escalar de curvatura R como la traza del Ricci:

$$\boxed{R \doteq R^i{}_i}$$

El tensor de Riemann en n=2 y n=3

En n=2 toda la información del Riemann está en el escalar de curvatura:

$$R_{lijk} = \frac{R}{2}\left(g_{lj}\, g_{ik} - g_{lk}\, g_{ij}\right) \qquad , \quad n = 2$$

En n=3 toda la información del Riemann está en el Ricci:

$$R_{lijk} = g_{lj} R_{ik} + g_{ik} R_{lj} - g_{ij} R_{lk} - g_{lk} R_{ij} - \frac{R}{2}\left(g_{lj}\, g_{ik} - g_{lk}\, g_{ij}\right), \quad n = 3$$

Tensor de Weyl

Debido a las simetrías del Riemann, todas sus contracciones conducen a $\pm R_{ij}$ o se anulan. Por eso conviene definir un tensor que contenga la información del Riemann que no está en el Ricci; deberá ser un tensor del tipo del Riemann cuyas trazas se anulen. Definimos el tensor de Weyl:

$$C_{ijkl} \doteq R_{ijkl} + \frac{2}{n-2}\left(g_{i[l} R_{k]j} + g_{j[k} R_{l]i}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}\, R\, g_{i[k}\, g_{l]j}$$

El tensor de Weyl tiene las mismas simetrías que el Riemann, y sus trazas se anulan: $C^i{}_{jil} = 0$, etc. El número de componentes independientes es igual al del Riemann menos el del Ricci. El tensor de Weyl es invariante ante "transformaciones conformes" de la métrica: $g_{ij} \longrightarrow W^2(x)\, g_{ij}$.

El tensor de Einstein

El tensor de Einstein se denomina así porque es una combinación de tensores que entra en las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Es un tensor simétrico que se define como

$$\boxed{G_{ij} \doteq R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R}$$

Es de segundo orden en derivadas de la métrica, y tiene divergencia idénticamente nula:

$$\boxed{G^{i}{}_{j;i} \equiv 0}$$

Demostración) si partimos de las identidades de Bianchi,

$$R^{l}{}_{kij;m} + R^{l}{}_{kjm;i} + R^{l}{}_{kmi;j} = 0$$

y contraemos los índices l i:

$$R_{kj;m} + \underbrace{R^{l}{}_{kjm;l}}_{g^{lm} R_{mkjm} = g^{lm} R_{kmmj}} - R_{km;j} = 0$$

Ahora contraemos k m subiendo antes el índice k:

$$R^{k}{}_{j;k} + g^{lm} R_{mj;l} - R_{,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 R^{k}{}_{j;k} = R_{,j}$$

$$\Rightarrow \quad G^{k}{}_{j;k} = R^{k}{}_{j;k} - \frac{1}{2} \delta^{k}_{j} R_{,k} = 0 \quad ✓$$

La formulación de la Relatividad General

i) La Relatividad General postula que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de n=4 dimensiones, dotada de una métrica con signatura lorentziana (+---), y conexión de Levi-Civita (conexión métrica sin torsión).

ii) Las leyes para los campos de materia y radiación que se conocen en Relatividad Especial, y que se formulan a partir de acciones que tienen carácter geométrico (son invariantes ante cambio general de coordenadas), contienen la métrica de la geometría plana del espacio-tiempo de Minkowski. Para incluir plenamente los efectos del campo gravitatorio-inercial sobre dichos campos será suficiente que esa métrica no esté dada de antemano, como en Relatividad Especial, sino que sea determinada por la distribución de energía y materia del universo (en una interpretación del desideratum machiano). De esa manera las leyes físicas mantendrán la forma que tenían en la carta cartesiana de la Relatividad Especial, salvo por el cambio de la derivada común por la derivada covariante. Los efectos del campo gravitatorio-inercial sobre la dinámica de los campos de materia y radiación se realiza así a través de la presencia de la métrica y la conexión de Levi-Civita en las ecuaciones dinámicas. La Relatividad General no incluye acoplamientos de la materia y la radiación con la curvatura (segundas derivadas de la métrica), los que podrían provenir del agregado de términos de curvatura (que no se manifestarían en la geometría plana de Minkowski) a las acciones de esos campos. En ese sentido decimos que el acoplamiento con el campo gravitatorio-inercial es "mínimo". El acoplamiento mínimo permite que valga el Principio de equivalencia: en cada evento existen cartas localmente inerciales donde se anula localmente la conexión (se anulan las primeras derivadas de la métrica), y se recupera la forma que las leyes físicas tienen en la carta cartesiana de la Relatividad Especial (la carta puede elegirse para que la métrica sea diag(1,-1,-1,-1) en el origen). Esto no sucedería así si hubiera acoplamiento con la curvatura, pues la curvatura es un tensor y no puede anularse mediante un cambio de carta.

iii) A las leyes conocidas en Relatividad Especial se agregará las ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio-inercial, que serán ecuaciones diferenciales de segundo orden para las componentes del tensor métrico (es decir, ecuaciones relacionadas con la curvatura). La fuente de estas ecuaciones será el tensor de energía-momento de los campos de materia y radiación distribuidos en el universo. Estas son las ecuaciones de Einstein que enunciaremos más adelante.

Líneas de universo de partícula libre (libremente gravitante) y rayos de luz

Como ya fue descripto, la variación de la acción de partícula libre conduce a la ecuación de las geodésicas, que son autoparalelas de la conexión de Levi-Civita cuyo paramétro afín es el tiempo propio de la partícula. El enunciado del Principio de inercia dice ahora que las partículas libres de fuerza describen geodésicas temporales del espacio-tiempo.

Del mismo modo los rayos de luz describen geodésicas nulas del espacio-tiempo, formando así los conos de luz de cada evento, que dota al espacio-tiempo de una estructura causal.

Al comienzo del curso vimos que el potencial gravitatorio newtoniano debía reflejarse en la estructura de la componente g_{00} de la métrica, para poder reproducir el corrimiento al rojo gravitatorio exigido por el Principio de equivalencia. La relación es $g_{00} \simeq 1 + 2c^{-2}\Phi$ en campo débil ($|\Phi| << c^2$). Veremos ahora que este aspecto de la métrica de campo débil permite recuperar el movimiento newtoniano de la partícula en un potencial gravitatorio. Para esto desarrollaremos la acción de la partícula libre para velocidades no relativistas y campo débil. El campo gravitatorio-inercial es débil si existe una carta donde la métrica es aproximadamente Minkowski. Si en esa carta la evolución de las coordenadas espaciales, $x^\alpha(\tau)$, es tal que $|dx^\alpha(\tau)| << dx^0(\tau)$ entonces los sectores espacial-temporal y espacial-espacial de la métrica se pueden aproximar por los valores minkowskianos; entonces en la acción tendremos

$$-mc\,ds = -mc\sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j} \simeq -mc\left[\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)dx^{o\,2} - \delta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta\right]^{1/2}$$

$$= -mc^2 dt\left[\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}\right]^{1/2} \simeq -mc^2 dt\left[1+\frac{\Phi}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{|\vec{u}|^2}{c^2} + \dots\right]$$

$$\simeq \left[-mc^2 + \frac{1}{2}m\,|\vec{u}|^2 - m\,\Phi + \dots\right]dt$$

Vemos así cómo emerge el Lagrangiano clásico, con su término de energía potencial gravitatoria newtoniana. Esto muestra que en el límite considerado se recupera la dinámica clásica de la partícula en un campo gravitatorio.

Habíamos mencionado que el movimiento sobre una geodésica conserva componentes del covector energía-cantidad de movimiento cuando la métrica no depende de las respectivas coordenadas conjugadas. Concretamente, en el movimiento de partícula libremente gravitante se conserva una componente p_i si y sólo si las componentes de la métrica no dependen de x^i. Esto no hace más que reflejar la ley de conservación clásica donde la coordenada en cuestión debe ser cíclica en el potencial. En Relatividad, las componentes de la métrica son potenciales para el movimiento de la partícula.

Así, si la métrica no depende de x^o se conserva p_o. En la aproximación de velocidades no relativistas y campo débil esperamos reencontrar la conservación de la energía mecánica clásica. En efecto, $p_o = g_{oj}\,p^j = m\,g_{oj}\dfrac{dx^j}{d\tau} \simeq m\,g_{oo}\dfrac{dx^o}{d\tau}$

pues en $g_{o\alpha}\,dx^\alpha$ la métrica se aproxima por su valor minkowskiano. Además

$$g_{oo} \simeq 1+\frac{2\Phi}{c^2}\quad,\quad d\tau = \frac{ds}{c} \simeq dt\left(1-\frac{1}{2}\frac{|\vec{u}|^2}{c^2}+\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

Entonces $c\,p_o \simeq m\left(1+\dfrac{2\Phi}{c^2}\right)c^2\underbrace{\dfrac{dt}{dt}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{|\vec{u}|^2}{c^2}-\dfrac{\Phi}{c^2}\right)}_{\simeq\,\frac{dt}{d\tau}} \simeq mc^2+\dfrac{1}{2}mu^2+m\Phi$ ✓

Vectores de Killing

La ley de conservación sobre las geodésicas, tal como la hemos formulado, depende de si una coordenada es cíclica o no en las componentes de la métrica. Sería interesante tener una formulación que se independice de la carta utilizada. La idea es averiguar en qué condiciones se conserva la proyección de la energía-cantidad de movimiento sobre un campo $\bar{V}$. Recordemos que la ecuación de la geodésica se resume en

$$\frac{D\bar{U}}{D\tau} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{D\bar{p}}{D\tau} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{D\tilde{p}}{D\tau} = 0$$

pues $\bar{p} = m\bar{U}$, y la operación de bajar índices conmuta con la derivada covariante.

Entonces para que se conserve $p^i V_i$ a lo largo de la geodésica, debe ser

$$0 = \frac{D}{D\tau}\left(p^i V_i\right) = \underbrace{\left(\frac{D\bar{p}}{D\tau}\right)^i}_{0} V_i + p^i \left(\frac{D\tilde{V}}{D\tau}\right)_i = p^i \frac{dx^k}{d\tau} V_{i;k}$$

$$= m\, U^i U^k V_{(i;k)}$$

El resultado dice que $\bar{p} \cdot \bar{V}$ se conserva si $\bar{V}$ es un "vector de Killing", que es aquel que satisface la condición

$$\boxed{V_{(i;k)} = 0} \qquad \text{vector de Killing}$$

También se puede probar que $V_{ij}\, p^i p^j$ se conserva si V_{ij} es un tensor de Killing:

$$V_{(ij;k)} = 0 \qquad \text{tensor de Killing}$$

Nótese que, en ausencia de torsión, la condición anterior corresponde a

$$(\pounds_{\bar{V}}\, g)_{ij} = V^k g_{ij,k} + g_{kj} V^k{}_{,i} + g_{ik} V^k{}_{,j}$$

$$= V^k \underbrace{g_{ij;k}}_{0 \text{ conexión métrica}} + g_{kj} V^k{}_{;i} + g_{ik} V^k{}_{;j}$$

$$= V_{j;i} + V_{i;j}$$

Un vector de Killing es aquel que cumple $\boxed{\pounds_{\bar{V}}\, g = 0}$

lo que habla de una simetría del tensor métrico; el tensor métrico es Lie-dragueado por $\bar{V}$.