Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 14

Tensor de energía-momento
Ecuaciones de Einstein

Conservación local

El modelo de ley de conservación en Relatividad es la conservación de la carga eléctrica, que en Relatividad Especial corresponde a la ecuación de continuidad

$$\partial_k j^k = 0$$

donde j^k es el cuadrivector densidad de carga-corriente:

$$j^k \doteq (\underbrace{\rho}_{\text{densidad de carga}} c, \underbrace{\vec{j}}_{\text{carga que atraviesa una superficie por unidad de área y de tiempo}})$$

Separando la parte temporal de la espacial, la ecuación de continuidad queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

cuya forma integral es

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv}_{\text{carga contenida en } \mathcal{V}} = - \underbrace{\oint\!\!\oint_{S(\mathcal{V})} \vec{j} \cdot \vec{dS}}_{\text{carga que sale de } \mathcal{V} \text{ por unidad de tiempo}}$$

La carga no se crea ni se destruye. Si la carga contenida en un volumen fijo $\mathcal{V}$ aumenta es porque entra carga (flujo negativo) a través de la superficie del volumen. La conservación es local; sucede en cada evento del espacio-tiempo, como lo manifiesta la ecuación diferencial. La Relatividad no admite leyes de conservación con compensaciones simultáneas a distancia porque la simultaneidad no es absoluta en Relatividad.

Conservación de la energía-cantidad de movimiento

La conservación de la energía-cantidad de movimiento de un sistema continuo -como un campo, un fluido, dos campos en interacción, etc.- obedece un esquema similar. Elementos de volumen del sistema continuo que están en contacto intercambian localmente energía y cantidad de movimiento. Estas magnitudes se describen mediante densidades.

Para hablar de la conservación de $p^i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ tenemos el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{carga} & \longrightarrow & j^k \\
\downarrow & & \\
p^i & \longrightarrow & T^{ik}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
p^0 = \frac{E}{c} & \longrightarrow & \\
p^1 & \longrightarrow & \\
p^2 & \longrightarrow & \\
p^3 & \longrightarrow &
\end{array}
\left(\begin{array}{c|ccc}
T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\
T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\
T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\
T^{30} & \underbrace{T^{31}} & \underbrace{T^{32}} & \underbrace{T^{33}}
\end{array}\right)
$$

p^i por unidad de volumen $\times\ c$

p^i que atraviesa una superficie por unidad de área y de tiempo

En particular T^{00} es la densidad de energía, y es positivo cualquiera sea la convención utilizada para la signatura de la métrica. $T^{\alpha\beta}$, con $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, es el tensor de esfuerzos (fuerzas entre volúmenes contiguos por unidad de superficie); $T^{\alpha\beta}\, dS_\beta$ es el flujo de p^α por unidad de tiempo a través de una superficie $\vec{dS}$.

La conservación local de la energía-cantidad de movimiento se expresa en la ecuación de continuidad

$$\partial_k T^{ik} = 0 \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

que en Relatividad General se convierte en $\boxed{T^{ik}{}_{;k} = 0}$

del mismo modo que la conservación de la carga se convierte en $j^k{}_{;k} = 0$.

Fluido perfecto

En un fluido perfecto en reposo las únicas fuerzas entre volúmenes contiguos son perpendiculares a la superficie que los separa, cualquiera sea la orientación de esa superficie, y están caracterizadas por una única magnitud: la presión p. No existen fuerzas tangenciales o "de corte". Esto implica que el tensor de esfuerzos es isótropo,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = p\, \delta^{\alpha\beta}$$

Por otro, en el fluido perfecto en reposo y en equilibrio termodinámico no hay transferencia de energía entre elementos contiguos, por lo que la forma que el tensor de energía-momento tiene en el sistema inercial donde el fluido se encuentra en reposo es:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Los valores de la densidad de energía ρ y presión p hidrostáticos caracterizan completamente al fluido perfecto. Estas dos cantidades se relacionan a través de una ecuación de estado que depende del fluido.

La expresión obtenida para el tensor puede descomponerse así:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}}_{-p\, g^{ij}}$$

De esta forma el último término es proporcional al tensor métrico (estamos trabajando en una carta cartesiana de Relatividad Especial). Podemos asociar el primer término con la forma del tensor $U^i U^j$, donde $U^i = dx^i/d\tau$ es la cuadrivelocidad de los elementos del fluido; en la carta utilizada, que es una carta comóvil, es $U^i = (c, 0, 0, 0)$:

$$U^i U^j = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así concluimos que

$$\boxed{T^{ij} = (\rho + p)\, c^{-2}\, U^i U^j - p\, g^{ij}}$$

para la signatura $(+---)$

Pero esta relación es tensorial; por lo tanto no sólo vale en la carta comóvil sino que vale en cualquier carta. Mas aún, no sólo vale en la geometría de Minkowski sino que vale en cualquier otra geometría con el tensor métrico correspondiente, pues en Relatividad General rige el acoplamiento mínimo.

Campo electromagnético

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$\boxed{T^{ij} = -\frac{1}{\mu_0}\left(F^{ik}F^{j}{}_{k} - \frac{1}{4}g^{ij}F^{kl}F_{kl}\right)}$$

signatura de la métrica $(+\,-\,-\,-)$

$$T^{ij} = \left(\begin{array}{c|c} \rho & c^{-1}\vec{S} \\ \hline c^{-1}\vec{S} & T^{\alpha\beta} \end{array}\right) \qquad \rho = \frac{c^{-2}E^2 + B^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B}$$ vector de Poynting

$$\begin{pmatrix} \rho - \dfrac{c^{-2}E_x^2 + B_x^2}{\mu_0} & -\dfrac{c^{-2}E_xE_y + B_xB_y}{\mu_0} & -\dfrac{c^{-2}E_xE_y + B_xB_y}{\mu_0} \\ \cdots & \rho - \dfrac{c^{-2}E_y^2 + B_y^2}{\mu_0} & -\dfrac{c^{-2}E_yE_z + B_yB_z}{\mu_0} \\ \cdots & \cdots & \rho - \dfrac{c^{-2}E_z^2 + B_z^2}{\mu_0} \end{pmatrix}$$

T^{ij} es simétrico. En n=4 tiene traza nula: $T^{i}{}_{i} = 0$.

Gas de fotones

Podemos considerar un gas de fotones como una configuración donde el campo fluctúa al azar. Si hay isotropía los valores promediados son:

$$\langle \vec{E} \rangle = 0 = \langle \vec{B} \rangle$$

$$\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \langle E_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

$$\langle E_x E_y \rangle = 0 \quad , \text{ etc.}$$

Lo mismo para $\vec{B}$

Entonces el tensor de energía-momento promediado es

$$\langle T^{ij} \rangle = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{3} \end{pmatrix}$$

que es el tensor de energía-momento de un gas de fotones, donde vemos que la ecuación de estado del gas es

$$\boxed{p = \frac{\rho}{3}}$$

gas de fotones

Teorema de la divergencia y conservación

Ya hemos visto la forma integral de la conservación de la carga, que involucra el uso del teorema de la divergencia:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint\!\!\oint_{S(\mathcal{V})} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

donde Q es la carga contenida en el volumen $\mathcal{V}$. La forma manifiestamente covariante de esta relación se obtiene a partir del teorema de la divergencia cuadridimensional:

$$\int_U j^k{}_{;k}\, dv = \int_{\partial U} j^k\, d\Sigma_k$$

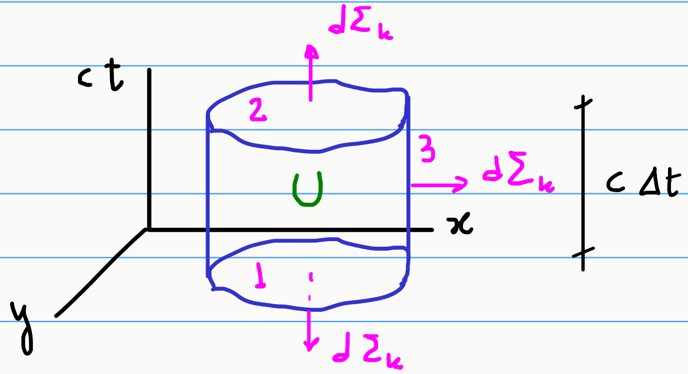
Como $j^k{}_{;k} = 0$ (ecuación de continuidad) entonces la forma integral de la conservación de la carga es

$$\int_{\partial U} j^k \, d\Sigma_k = 0$$

que equivale a la relación integral mencionada al comienzo. Recordemos que

$$d\Sigma_k = n_k \, d\Sigma$$

donde n_k es la normal unitaria, y $d\Sigma$ es el volumen inducido en el borde ∂U.



$$\int_{\partial U} = \int_1 + \int_2 + \int_3$$

Las hipersuperficies 1 y 2 son espaciales; corresponden a un subespacio de eventos en un dado instante t_1 y un dado instante t_2. Sobre esas hipersuperficies los covectores n_k sólo tienen componente 0, y las integrales se realizan sobre el espacio a un dado t.

$$\text{carga}(t_2) = \int_2 \underbrace{j^0}_{\text{densidad de carga}} d\Sigma_0 \,, \qquad \text{carga}(t_1) = -\int_1 j^0 \, d\Sigma_0$$

$$\Delta\,\text{carga} = \int_1 j^k \, d\Sigma_k + \int_2 j^k \, d\Sigma_k$$

Como $\int_{\partial U} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\,\text{carga} = -\int_3 j^k \, d\Sigma_k$

Como la hipersuperficie 3 es temporal, allí $d\Sigma_k$ sólo tiene componentes espaciales; por lo tanto en la integral sólo participan las componentes espaciales de j^k, que corresponden a la densidad de corriente. La integral sobre la hipersuperficie 3 es el flujo de la corriente. En caso que este flujo se anule, entonces la carga permanece constante. Así vemos que la ecuación $\int_{\partial U} j^k d\Sigma_k = 0$ efectivamente equivale a la relación integral mencionada al comienzo.

Queremos ver cuáles son las magnitudes integrales conservadas que se derivan de la ecuación de continuidad

$$T^{ik}{}_{;k} = 0$$

Para usar el teorema de la divergencia en este caso, debemos recordar que el mismo fue obtenido para un vector (no para un tensor); la demostración hizo uso de la igualdad $V^i{}_{;i} = |g|^{-1/2}\partial_i(|g|^{1/2}V^i)$ válida para vectores en la conexión de Levi-Civita (también para tensores $\binom{p}{0}$ totalmente antisimétricos). De modo que $T^{ik}{}_{;k} = 0$ no lleva a la conservación de la integral $\int T^{ik} d\Sigma_k$ sobre una hipersuperficie espacial. En cambio, si encontráramos un vector tal que

$$(T^{ik} V_i)_{;k} = 0$$

entonces sí podríamos concluir la conservación de la "carga"

$$P = \int_{\substack{\text{hipersuperficie} \\ \text{espacial}}} T^{ik} V_i \, d\Sigma_k$$

La propiedad requerida para el vector $\bar{V}$ corresponde a

$$0 = \left(T^{ik} V_i\right)_{;k} = \underbrace{T^{ik}{}_{;k}}_{0} V_i + T^{ik} V_{i;k}$$

simétrico

$$\Rightarrow \quad V_{(i;k)} = 0$$

$\bar{V}$ es un vector de Killing

Cada vector de Killing conlleva la conservación de una magnitud integral P asociada a la energía-momento. Este resultado para sistemas continuos es análogo al que ya obtuvimos para una partícula libre, que dice que si $\bar{V}$ es un vector de Killing entonces se conserva $p^i V_i$.

El espacio-tiempo de Minkowski está dotado de 10 vectores de Killing independientes (simetría maximal), que representan 4 traslaciones (en espacio y en tiempo), 3 rotaciones y 3 boosts. Así resultan las conservaciones de la energía, momentos lineales y angulares, y la relación $\vec{P} = c^{-2}E\,\vec{u}_C$ de un sistema aislado ($\vec{u}_C$ es la velocidad del centro de inercia).

Ecuaciones de Einstein

En Relatividad General las ecuaciones dinámicas para el campo gravitatorio-inercial son ecuaciones para las componentes del tensor métrico. Una vez obtenido el tensor métrico la conexión queda determinada, pues la conexión de Levi-Civita depende de la métrica y sus primeras derivadas. Para que las ecuaciones sean independientes de la carta, deberán tener carácter tensorial; deberán consistir en un tensor igualado a cero o, lo que es lo mismo, un tensor igualado a otro tensor.

El potencial gravitatorio newtoniano está gobernado por la ecuación

cte. de gravitación universal

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m \qquad \text{ó} \qquad \nabla^2 \frac{2\Phi}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho$$

densidad de masa

entra en g_{00} de campo débil

densidad de energía en reposo

Ahora bien, la densidad de energía es parte del tensor energía-momento, y las derivadas segundas de la métrica son parte de la curvatura. Como el tensor energía-momento es simétrico, Einstein pensó que debería igualarse al tensor de Ricci, que también es simétrico. Luego se convenció de que el sector geométrico de la ecuación debeería poseer divergencia idénticamente nula (esto es, independiente de si la métrica cumple o no las ecuaciones) para imponer la conservación de la energía-cantidad de movimiento. Esta condición de "conservación automática" es análoga a la que se tiene en el electromagnetismo: $d * \tilde{F} = -\mu_0 * \tilde{J}$ impone la conservación de la carga ($d * \tilde{J} = 0$).

Entonces Einstein concluye que es el tensor $G_{ij} \doteq R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$, que conocemos como tensor de Einstein y cumple que $G^i{}_{j;i} = 0$, quien debe entrar en las ecuaciones. Las ecuaciones de Einstein

$$G_{ij} = k\, T_{ij}$$

son ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales que determinan la dinámica del tensor métrico. La constante de proporcionalidad k debe ser tal que permita recuperar el valor newtoniano en el límite de campo débil.

Tiempo después, y por razones que discutiremos luego, Einstein decidió agregar un término que no afectaba ni la simetría ni la anulación de la divergencia. La propia métrica tenía esas dos propiedades; entonces propuso

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda\, g_{ij} = k\, T_{ij}}$$

signatura $(+---)$

Por el momento ignoraremos la constante Λ, que sería una nueva constante universal a la que Einstein denominó constante cosmológica.

Tomando la traza de la ecuación de Einstein original tenemos que

$$R - \frac{1}{2}\, 4\, R = k\, T \qquad \text{donde } T \doteq T^{i}{}_{i}$$

$\Rightarrow \quad -R = kT$, lo que permite reescribir las ecuaciones como

$$R_{ij} = k\left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right)$$

Nótese que en todo evento donde haya vacío se anula el Ricci.

Consideremos un campo débil; luego existen cartas donde la métrica se desvía poco de la de Minkowski: $g_{ij} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) + h_{ij}$, $|h_{ij}| << 1$.

Aproximando al orden más bajo en la perturbación h_{ij} no entrarán en el Ricci los productos de símbolos de Christoffel, que son cuadráticos en derivadas de la perturbación. Entonces

$$R_{ij} = R^{l}{}_{ilj} \simeq \frac{1}{2}\eta^{kl}\left(h_{kj,il} + h_{il,kj} - h_{kl,ij} - h_{ij,kl}\right)$$

En particular, en un campo estático es $h_{ij,0} = 0$, y resulta

$$R_{00} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{kl} h_{00,kl} \overset{\text{signatura }(+---)}{=} \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 \frac{2\phi}{c^2} = \frac{4\pi G}{c^4}\rho$$

Este resultado se debe igualar a $k\left(T_{00} - \frac{1}{2}T\right)$ donde el propio T_{ij} debe ser entendido como una perturbación. Por lo tanto, $T_{00} \simeq T^{00} = \rho$. Además la materia no relativista cumple que $p << \rho \Rightarrow T \simeq \rho$. Así llegamos a

$$\frac{4\pi G}{c^4}\rho \simeq k\left(T_{00} - \frac{1}{2}T\right) \simeq \frac{k\rho}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{8\pi G}{c^4}}$$