0.1 Ejercicio 2

En primer lugar, usando que la derivada covariante de la métrica y de su inversa es cero se tiene que

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \left(g^{\alpha\nu}\ T^{\mu}{}_{\alpha}\right)_{;\mu} = g^{\alpha\nu}{}_{;\mu}\ T^{\mu}{}_{\alpha} + g^{\alpha\nu}\ T^{\mu}{}_{\alpha;\mu} = g^{\alpha\nu}\ T^{\mu}{}_{\alpha;\mu} = g^{\alpha\nu}\ \left(T^{\mu}{}_{\alpha,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\mu}\ T^{\beta}{}_{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\ T^{\mu}{}_{\beta}\right)$$

Como

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho\,(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\,(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\,(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\,(t) \end{pmatrix}$$

y

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-k\ r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\,(t)\ r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2\,(t)\ r^2\ \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

se tiene entonces que

$$T^{\mu 0}{}_{;\mu} = g^{00}\ \left(T^{0}{}_{0,0} + \Gamma^{\mu}_{0\mu}\ T^{0}{}_{0} - \Gamma^{\beta}_{0\mu}\ T^{\mu}{}_{\beta}\right) = \frac{1}{c}\ \dot{\rho} + \left(\Gamma^{\mu}_{0\mu} - \Gamma^{0}_{00}\right)\ \rho + p\ \Gamma^{k}_{0k} = \frac{1}{c}\ \dot{\rho} + \Gamma^{k}_{0k}\ \left(\rho + p\right),$$

$$T^{\mu i}{}_{;\mu} = g^{ii}\ \left(\Gamma^{\mu}_{i\mu}\ T^{i}{}_{i} - \Gamma^{\beta}_{i\mu}\ T^{\mu}{}_{\beta}\right) = g^{ii}\ \left(\Gamma^{\mu}_{i\mu}\ p + \Gamma^{0}_{i0}\ \rho - \Gamma^{k}_{ik}\ p\right) = g^{ii}\ \left(\Gamma^{0}_{i0}\ p + \Gamma^{0}_{i0}\ \rho\right) = g^{ii}\ \Gamma^{0}_{i0}\ \left(\rho + p\right).$$

Además,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\ g^{\alpha\beta}\ \left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right)$$

y por lo tanto

$$\Gamma^{k}_{0k} = \frac{1}{2}\ g^{k\beta}\ \left(g_{\beta 0,k} + g_{\beta k,0} - g_{0k,\beta}\right) = \frac{1}{2}\ \sum_{k} g^{kk}\ \left(g_{k0,k} + g_{kk,0} - g_{0k,k}\right) = \frac{1}{2}\ \sum_{k} g^{kk}\ g_{kk,0} = \frac{1}{2\ c}\ \sum_{k} \frac{1}{a^2}\ \frac{d}{dt}\left(a^2\right) = \frac{3}{c}\ \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\Gamma^{0}_{i0} = \frac{1}{2}\ g^{0\beta}\ \left(g_{\beta i,0} + g_{\beta 0,i} - g_{i0,\beta}\right) = \frac{1}{2}\ g^{00}\ \left(g_{0i,0} + g_{00,i} - g_{i0,0}\right) = 0.$$

Reemplazando queda

$$T^{\mu 0}{}_{;\mu} = \frac{1}{c}\ \dot{\rho} + \frac{3}{c}\ \frac{\dot{a}}{a}\ \left(\rho + p\right),$$

$$T^{\mu i}{}_{;\mu} = 0.$$

Luego, la ecuación de conservación queda

$$\dot{\rho} + 3\ \frac{\dot{a}}{a}\ \left(\rho + p\right) = 0$$

para $\nu = 0$ y es trivial para $\nu = i$.
Si

$$p = \omega\ \rho$$

entonces

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\ \frac{\dot{a}}{a}\ \left(1 + \omega\right) = 0$$

y por ende

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\rho + 3\ \left(1+\omega\right)\ \ln a\right] = 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\ (1+\omega)}.$$

0.2 Ejercicio 4

En un universo espacialmente cerrado, $k = 1$ y por lo tanto haciendo

$$r = \sin \chi$$

el intervalo se puede esciribr como

$$ds^2 = -c^2 \ dt^2 + a^2 (t) \ \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \ \left(\sin^2 \theta \ d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right].$$

Como se trata de un rayo, $ds = 0$, y como es radial, $d\varphi = d\theta = 0$. Por lo tanto,

$$c \ dt = a \ d\chi$$

y esto implica que

$$\dot{a} = \frac{c}{a} \ \frac{da}{d\chi}.$$

Por otro lado, la ecuación de Einstein ${}^0{}_0$ (la de valores iniciales) para $k = 1$ y sin constante cosmológica se escribe como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{8 \ \pi \ G}{3 \ c^2} \ \rho.$$

Además, como se trata de materia no relativista, $p = 0$ y por lo tanto de la ecuación de conservación se deduce que

$$\rho \ a^3 = \rho_0 \ a_0^3.$$

Reemplazando en la ecuación de valores iniciales se tiene entonces

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + 1 = \frac{l}{a},$$

donde

$$l = \frac{8 \ \pi \ G}{3 \ c^4} \ \rho_0 \ a_0^3.$$

Usando lo obtenido anteriormente se tiene entonces que

$$\frac{1}{a^2} \ \left(\frac{da}{d\chi}\right)^2 + 1 = \frac{l}{a},$$

o bien,

$$\left(\frac{da}{d\chi}\right)^2 + a^2 = l \ a.$$

Derivando respecto de χ es tiene que

$$2 \ \frac{da}{d\chi} \ \frac{d^2a}{d\chi^2} + 2 \ a \ \frac{da}{d\chi} = l \ \frac{da}{d\chi}$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2a}{d\chi^2} + a = \frac{l}{2}.$$

Esto implica que

$$a = A \ \sin \chi + B \ \cos \chi + \frac{l}{2}.$$

En el comienzo del universo, a y χ son nulos, y por lo tanto

$$a \left(\chi = 0\right) = 0.$$

Además, usando este resultado, de la ecuación diferencial original se deduce que

$$\frac{da}{d\chi} \left(\chi = 0\right) = 0.$$

Esto implica que $A = 0$ y $B = -\frac{l}{2}$. Por lo tanto, finalmente se obtiene

$$a = \frac{l}{2} \ \left(1 - \cos \chi\right).$$

Esto implica que cuando el rayo completa una vuelta $\chi = 2\ \pi$, el universo recolapsa.
Finalmente, para un modelo de radiación, $p = \frac{\rho}{3}$ y por ende de la ecuación de conservación se deduce que

$$\rho\ a^4 = \rho_0\ a_0^4.$$

Reemplazando en la ecuación de valores iniciales ahora se tiene que

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + 1 = \left(\frac{d}{a}\right)^2,$$

donde

$$d = \sqrt{l\ a_0}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, ahora se obtiene

$$a = d\ \sin \chi$$

y como $a\,(\pi) = 0$, el rayo solo recorre la mitad del universo antes del recolapso.