Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

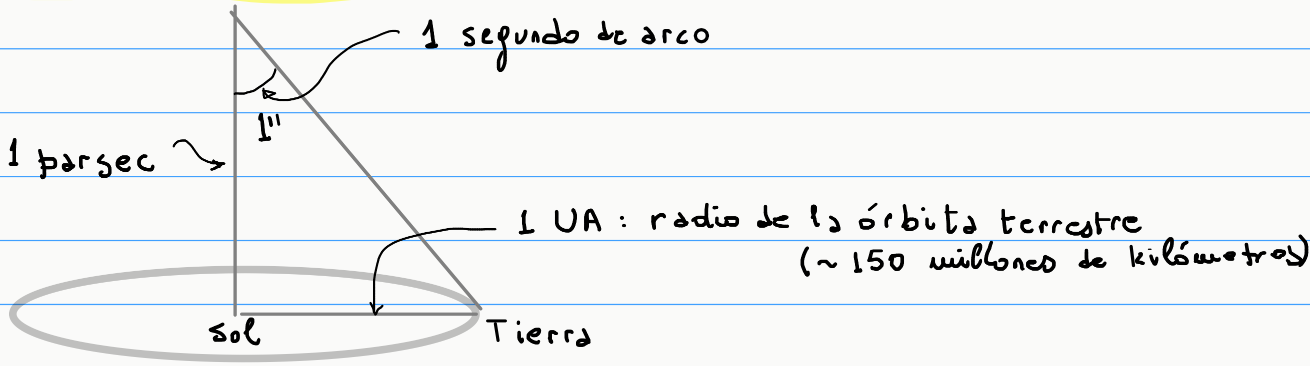
2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 18

Principio cosmológico. Universos de Friedmann-Robertson-Walker.
Corrimiento al rojo cosmológico

Unidad de distancia: el parsec



El parsec es la distancia desde la cual el radio de la órbita terrestre subtiende un ángulo de 1 segundo de arco.

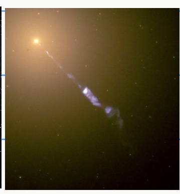
$$1 \text{ pc} = 3{,}26 \text{ años luz} = 3{,}09 \times 10^{16} \text{ m}$$

Escalas características:

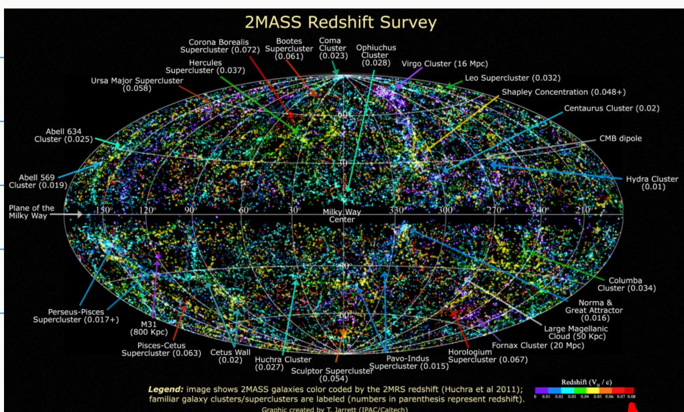
Galaxias ~ 1-50 kpc

Cúmulos de galaxias ~ 2-10 Mpc

Supercúmulos ~ 100 Mpc

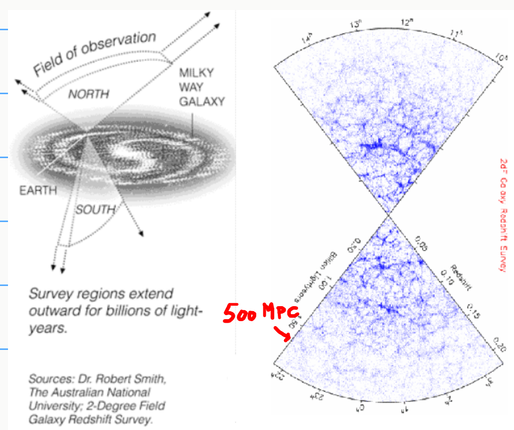


Andrómeda M87 1E 0657-56 (cúmulo Bullet)



Vecindario cósmico

300 Mpc



Simulación numérica de la distribución actual de materia: https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/galform/press/

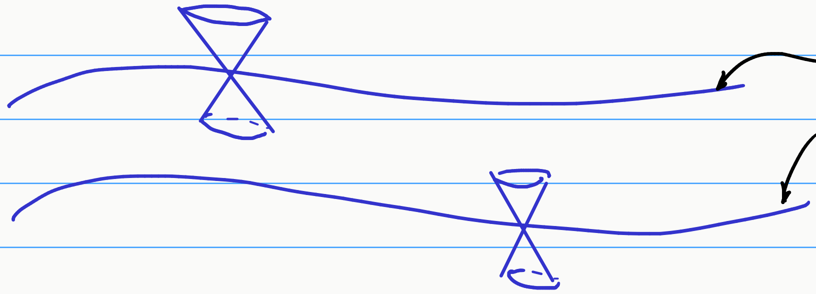
Principio cosmológico

A gran escala (mayor que 150 Mpc) el universo es isótropo y homogéneo. En esa primera aproximación, la energía-materia en él contenida es descripta mediante un fluido con tales características.

Nótese que son concebibles cosmologías homogéneas y anisótropas. Pero si el universo es isótropo en todos sus puntos, necesariamente es homogéneo.

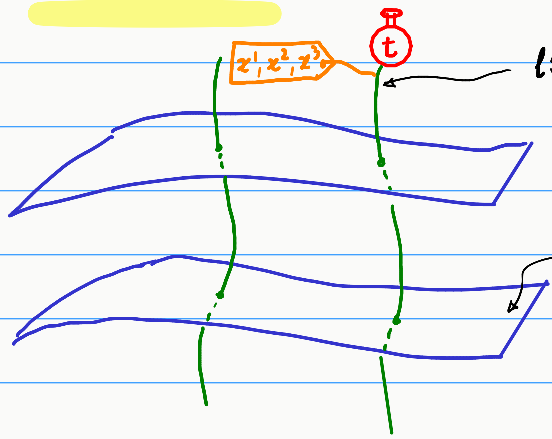
La hipótesis del Principio cosmológico es bastante fuerte porque involucra todo el universo, aun aquellas regiones de las que nada sabemos, ya sea por limitación tecnológica o porque están tan alejadas que todavía no hemos recibido luz proveniente de las mismas (esto sucedería si el universo tuviese una edad finita, o si el universo hubiese sido opaco a la propagación de la luz hasta cierta edad).

Las propiedades de homogeneidad e isotropía necesitan un enunciado más preciso en el marco de la Relatividad. Si pensamos que el universo puede evolucionar (su geometría puede cambiar), y que la densidad de materia acompañará esa evolución, entonces la homogeneidad (traducida como la uniformidad de la densidad y presión del fluido de materia-energía) debería verificarse en cada instante de la evolución. Pero la noción de simultaneidad no es absoluta en Relatividad. Por lo tanto la idea del Principio cosmológico se realiza diciendo que el espacio-tiempo admite una foliación de hipersuperficies espaciales tales que cada hoja de la foliación es homogénea. Es decir, cada hoja es un conjunto de eventos "simultáneos" que realizan la homogeneidad.



En cuanto a la isotropía, diremos que las líneas de universo del fluido de materia-energía no seleccionan direcciones privilegiadas sobre las hipersuperficies de homogeneidad; por lo tanto deben ser normales a las mismas. Si las líneas de universo de los elementos del fluido no fuesen normales, entonces sus cuadrivelocidades seleccionarían una dirección privilegiada en cada punto de la hipersuperficie: la dirección la proyección de la cuadrivelocidad sobre la hipersuperficie.

Carta comóvil



En la carta comóvil cada línea de universo del fluido está etiquetada por tres coordenadas (espaciales) x^1, x^2, x^3. La coordenada temporal $x^0 = ct$ es el tiempo propio a lo largo de cada línea (es decir, el tiempo de los relojes que se mueven con el fluido). Si los relojes son sincronizados sobre una hipersuperficie, entonces permanecerán sincronizados; si así no fuera se violaría la homogeneidad. Por lo tanto cada hipersuperficie está identificada con un valor de x^0.

En la carta comóvil el intervalo tiene la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\, d\ell^2$$

donde $d\ell^2$ es un elemento de arco sobre las hipersuperficies de homogeneidad (por lo tanto $d\ell^2$ es isótropo y homogéneo). Esto es así porque el "tiempo cosmológico" t es el tiempo propio de las líneas de coordenadas espaciales constantes ($g_{00} = 1$), y porque estas líneas son ortogonales a las hipersuperficies $t = cte$ ($g_{\alpha 0} = 0$). El factor de escala $a(t)$ implica la posibilidad de que las distancias evolucionen en el tiempo sin afectar la homogeneidad e isotropía.

La distancia en un espacio tridimensional isótropo y homogéneo puede escribirse como

$$d\ell^2 = e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 \overbrace{(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)}^{d\Omega^2}$$

Para determinar la función $\lambda(r)$ calcularemos la curvatura del espacio 3-dimensional y exigiremos que sea uniforme para realizar la homogeneidad:

$${}^{(3)}R = \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda(r)}\right)\right] \equiv k$$

$$\Rightarrow \qquad e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{k r^2}{6} - \frac{A}{r}}$$

Como no hay razón para que la métrica tenga un mal comportamiento en r=0 (r=0 es un punto cualquiera), entonces la constante de integración A se elige igual a cero. Si llamamos $K \equiv k/6$, el intervalo de los modelos cosmológicos isótropos y homogéneos escrito en una carta comóvil es

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\Omega^2\right)}$$

Los valores del factor de escala $a(t)$ y la curvatura espacial $6K$ quedarán determinados a través de las ecuaciones de Einstein por las características del fluido que llene el universo. Este tipo de geometrías fue estudiado por Friedmann en 1922; en 1935-1936 Robertson y Walker establecieron que es la forma más general para describir un universo isótropo y homogéneo. Decimos que el intervalo anterior describe las geometrías de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

En la carta comóvil las componentes de la cuadrivelocidad de los elementos de fluido son $U^i = dx^i/d\tau = dx^i/dt = (c, 0, 0, 0)$. Es fácil verificar que $\bar{U}$ satisface la ecuación de las geodésicas $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$:

$$\underbrace{\frac{dU^k}{d\tau}}_{0} + \Gamma^k_{ij}\, U^i U^j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Gamma^k_{00}}_{0}\, U^0 U^0 = 0$$

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\underset{0}{g_{0l,0}} + \underset{0}{g_{l0,0}} - \underset{1}{g_{00,l}}\right)$$

▷ Espacio plano, cerrado o abierto

Está claro que no necesitamos considerar más que los casos K=0, 1, -1. Cualquier otro factor no nulo puede absorberse en un cambio de coordenadas y factor de escala:

$$|K|\, r^2 \longrightarrow r^2 \,, \qquad |K|^{-1} a^2 \longrightarrow a^2$$

▷ K=0 corresponde a una geometría espacial plana. El elemento de arco dl^2 es la geometría euclidiana escrita en coordenadas esféricas:

$$dl^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

K=1 corresponde a la geometría esférica 3-dimensional; decimos que el espacio es cerrado. En efecto podemos hacer el cambio de coordenadas

$$\frac{dr^2}{1-r^2} = d\chi^2$$

Nótese que si usamos K adimensional, entonces r es adimensional y el factor de escala a(t) tiene unidades de longitud.

Entonces $r = \operatorname{sen}\chi$, y el elemento de arco $d\ell^2$ resulta

$$d\ell^2 = d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

Esta es la geometría de una 3-esfera de radio 1 sumergida en un espacio euclidiano 4-dimensional:

3-esfera $\quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$

Parametrización de la 3-esfera (S^3):

$$(x, y, z) = \operatorname{sen}\chi \left(\operatorname{sen}\theta \cos\varphi , \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi , \cos\theta \right)$$

$$w = \cos\chi$$

(se cumple la ecuación de S^3)

Distancia inducida sobre S^3:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

Si extendemos el rango de χ al intervalo $[0,\pi]$, entonces el volumen de S^3 es

$$\text{3-volumen} = \underbrace{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\chi \, d\chi}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 2\pi^2$$

En la geometría FRW este volumen espacial queda multiplicado por $a(t)^3$. Una 3-esfera es isótropa en cualquier punto (y, por lo tanto, es homogénea). Su simetría responde al grupo de rotaciones, que son transformaciones que mueven puntos sobre S^3 en todas direcciones sin afectar la métrica (isometrías).

Nótese que el rango $[0,\pi]$ para la coordenada χ implica que la coordenada r recorre dos veces el intervalo $[0,1]$.

K = -1 corresponde a la geometría hiperbólica 3-dimensional; decimos que el espacio es abierto. En efecto podemos hacer el cambio de coordenadas

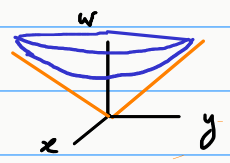
$$\frac{dr^2}{1+r^2} = d\chi^2$$

Entonces $r = \operatorname{senh}\chi$, y el elemento de arco $d\ell^2$ resulta

$$d\ell^2 = d\chi^2 + \operatorname{senh}^2\chi \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

Esta es la geometría de una 3-hiperboloide sumergido en un espacio de Minkowski 4-dimensional:

3-hiperboloide $\quad w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$



Parametrización del 3-hiperboloide:

$$(x, y, z) = \operatorname{senh}\chi \left(\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta \right)$$

$$w = \cosh\chi$$ (se cumple la ecuación del 3-hiperboloide)

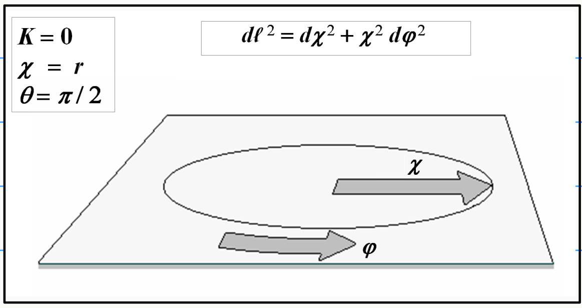
Distancia inducida sobre el 3-hiperboloide:

$$\left| dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right| = d\chi^2 + \operatorname{senh}^2\chi \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$ ✓

El 3-hiperboloide es isótropo en todo punto (en el sentido del espacio de Minkowski donde está sumergido); por lo tanto es homogéneo. Esta simetría se basa en el grupo de Lorentz, que son transformaciones que mueven puntos sobre el 3-hiperboloide en todas direcciones sin afectar la métrica (isometrías).

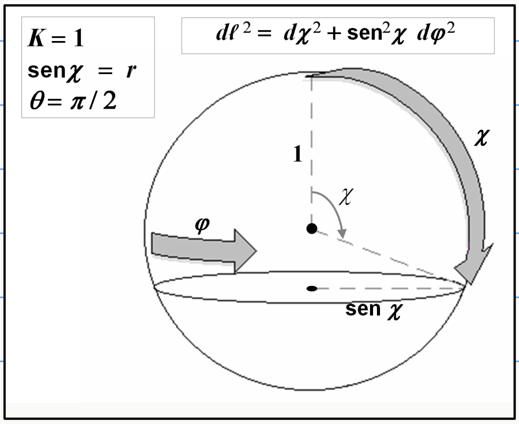
Podemos resumir los tres casos de las geometrías FRW en la siguiente forma:

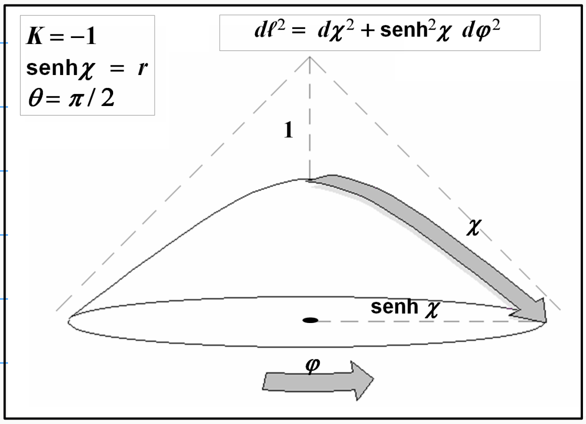
$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(d\chi^2 + f(\chi)^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2\right)\right)}$$



donde:

$$f(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{si } K=0 \\ \operatorname{sen}\chi & \text{si } K=1 \\ \operatorname{senh}\chi & \text{si } K=-1 \end{cases}$$

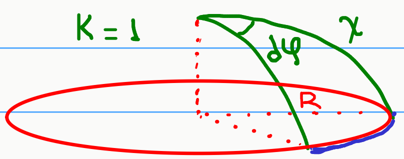




sumergido en Minkowski

La geometría plana se caracteriza porque el cociente entre la longitud del arco y la distancia al centro es igual al ángulo. La longitud del arco para χ fijo y $\theta = \pi/2$ es $d\ell = f(\chi)\, d\varphi$, mientras que la distancia de los puntos del arco al origen es χ. Por lo tanto la relación entre la longitud y el ángulo subtendido es

$$\frac{d\ell}{d\varphi} = f(\chi) = \begin{cases} = \chi & \text{si } K=0 \\ < \chi & \text{si } K=1 \\ > \chi & \text{si } K=-1 \end{cases}$$



$$d\ell = R\, d\varphi < \chi\, d\varphi$$

Recordemos que debemos multiplicar por el factor de escala para hablar de distancias en la geometría de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Cinemática del universo en expansión

Las ecuaciones de Einstein gobiernan la dinámica del factor de escala del universo, y darán cuenta de la expansión del mismo. Antes de ir a la dinámica, usemos la cinemática para averiguar qué tipo de fenómeno podría revelar el cambio del factor de escala al transcurrir el tiempo.

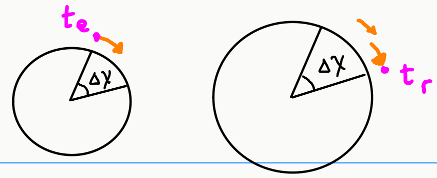
Consideremos una señal luminosa que es emitida desde una galaxia y recibida en otra galaxia. Recordemos que estamos trabajando en una carta comóvil, de manera que las galaxias mantienen fijas sus coordenadas espaciales (si despreciamos sus movimientos peculiares). Sin embargo la distancia entre ellas variará si el factor de escala varía. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir la carta de manera que la dirección que une ambas galaxias es una dirección radial; entonces las coordenadas θ, φ son iguales para el emisor y el receptor de la señal. En otras palabras, la isotropía nos dice que lo único que importa aquí es la distancia entre las galaxias, y cómo es su variación mientras la señal esté en viaje. Como la luz viaja por una geodésica nula radial, tenemos que

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a(t)^2\, d\chi^2 = 0$$

Integrando resulta:

$$\boxed{|\Delta\chi| = \int_{t_{emisión}}^{t_{recepción}} \frac{c\, dt}{a(t)}}$$

Si consideramos dos crestas sucesivas de la onda, emitidas con una diferencia de tiempo Δt_e igual al período de la fuente T_f (recordemos que la coordenada t es el tiempo propio de cada galaxia que integra el fluido de materia), tendremos que cada cresta recorre el mismo $|\Delta\chi|$ en un intervalo de tiempo distinto. Si la primera cresta lo hace en el intervalo (t_e, t_r), la segunda cresta lo hace en el intervalo ($t_e + T_f$, $t_r + T_{obs}$), donde T_{obs} es el período observado en el detector. Esta es una consecuencia del cambio de la distancia entre emisor y receptor debido a la expansión del universo.



El 1er pulso se emite en t_e y se recibe en t_r. Un pulso posterior demora más porque recorre una distancia mayor debido a la expansión del universo.

$$\overbrace{\int_{t_e+T_f}^{t_r+T_{obs}} \frac{c\,dt}{a(t)}}^{|\Delta\chi|} - \overbrace{\int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)}}^{|\Delta\chi|} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_r}^{t_r+T_{obs}} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+T_f} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

En un período de la luz el factor de escala no cambia sensiblemente; entonces

$$\frac{T_{obs}}{a(t_r)} = \frac{T_f}{a(t_e)}$$

Si el factor de escala está creciendo, entonces $T_{obs} > T_f$, lo que equivale a $\nu_{obs} < \nu_f$. Este resultado indica que la expansión del universo da lugar a un corrimiento al rojo cosmológico de frecuencias, que es la consecuencia de que la segunda cresta llega retrasada respecto de la primera porque tuvo que recorrer una distancia más larga. El corrimiento se detecta en las líneas de emisión y absorción de las galaxias. El corrimiento de frecuencia relativo es

$$\boxed{z \doteq \frac{\nu_f - \nu_{obs}}{\nu_{obs}} = \frac{\nu_f}{\nu_{obs}} - 1 = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1}$$

Si el factor de escala es una función monótona del tiempo, entonces a mayor distancia, o mayor tiempo de viaje, mayor será el corrimiento relativo z.
La teoría de la expansión del universo fue propuesta por Lemaître en 1927, y confirmada por Hubble en 1929 mediante la observación del corrimiento al rojo cosmológico en galaxias exteriores al grupo local.
Si vemos a z como una función del tiempo de emisión para un dado tiempo de recepción (que sería el tiempo actual), podemos diferenciar,

$$dz = -\frac{a_r}{a(t)^2}\,\dot{a}(t)\,dt = -a_r\,H(t)\,\frac{dt}{a(t)}$$

La relación entre $\dot{a}$ y a recibe el nombre de parámetro o "constante" de Hubble:

$$\boxed{H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

La expresión para dz permite hacer un cambio de variable en $|\Delta\chi| = \int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)}$:

$$\boxed{|\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c\,dz'}{a_r\,H(z')}}$$

pues z=0 si $t_e = t_r$ (tiempo de viaje nulo). Para valores pequeños de z podemos evaluar el integrando en z=0 (es decir, en $t=t_r$), y despejar z en función del valor actual de H, y la distancia actual a la fuente, $\sigma_r = a_r|\Delta\chi|$:

$$\boxed{z \approx c^{-1}\,H_r\,\sigma_r} \qquad \text{si} \quad z \ll 1$$

siendo el valor actual de H de unos 70 km s^{-1} Mpc^{-1} (si bien H tiene unidades de inversa de tiempo, se usa esta unidad por razones prácticas). Como $c^{-1}H_r$ es del orden de $10^{-4}\,Mpc^{-1}$, el uso de la expresión aproximada anterior se extiende hasta distancias actuales de unos 500-1000 Mpc.

Si derivamos respecto del tiempo la distancia entre galaxias,

$$\sigma(t) = a(t)\,|\Delta\chi| \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = \dot{a}(t)\,|\Delta\chi| = H(t)\,\sigma(t)$$

la expresión para z queda $\boxed{z \approx \frac{\dot{\sigma}_r}{c}}$ si $z \ll 1$

que evoca la expresión $z \approx v/c$ del efecto Doppler.