Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 24

Acción de Hilbert. Ecuaciones de estructura de Cartan

Acción de Hilbert

Las ecuaciones de Einstein pueden obtenerse de un principio variacional. La acción de Hilbert (o de Hilbert-Einstein) es

$$\boxed{S[g_{ij}] = \frac{c^3}{16\pi G}\int (-R - 2\Lambda)\sqrt{|g|}\, d^4x}$$

signatura (+ - - -)

Para efectuar la variación usaremos que

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\; g_{ij}\,\delta g^{ij}$$

(sale de $d\ln[\det g_{ij}] = g^{ij}\delta g_{ij} = -g_{ij}\,\delta g^{ij}$)

$$\delta R = \delta(g^{ij} R_{ij}) = \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij}\,\delta R_{ij}$$

Para calcular $g^{ij}\,\delta R_{ij}$ en un evento P cualquiera usaremos una carta localmente inercial con origen en P. De esa forma vale que

$$\Gamma^m_{mp}(P) = 0, \qquad g_{mn,p}(P) = 0$$

Entonces

$$g^{mn}\,\delta R_{mn} = g^{mn}\,\delta R^p{}_{mpn} = g^{mn}\left(\delta\Gamma^p_{mn,p} - \delta\Gamma^p_{mp,n}\right)$$

$$= \left(g^{mn}\,\delta\Gamma^p_{mn} - g^{mp}\,\delta\Gamma^n_{mn}\right)_{,p}$$

Aunque las componentes de una conexión no transforman tensorialmente, las componentes de la diferencia de dos conexiones sí transforman como componentes de un tensor. Por lo tanto, el resultado es tensorial; es la cuadridivergencia de un vector. Para pasarlo a una carta arbitraria alcanza con reemplazar la derivada común por derivada covariante:

$$g^{ij}\,\delta R_{ij} = \left(g^{ij}\,\delta\Gamma^k_{ij} - g^{ik}\,\delta\Gamma^j_{ij}\right)_{;k}$$

Como este término de la variación es una divergencia, se puede usar el teorema de la divergencia para convertirlo en un término de borde que no contribuye al resultado de la variación (no hay variación en los bordes).

Entonces la variación de la acción de Hilbert da

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G}\,\delta\int(-R-2\Lambda)\sqrt{|g|}\,d^4x$$

$$= -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left[(R+2\Lambda)\underbrace{\delta\sqrt{|g|}}_{-\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,g_{ij}\,\delta g^{ij}} + \underbrace{\delta R}_{\delta g^{ij}R_{ij} + \underbrace{g^{ij}\,\delta R_{ij}}_{\text{término de borde}}}\sqrt{|g|}\right]d^4x$$

$$\boxed{\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left[R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij}\right]\delta g^{ij}\sqrt{|g|}\,d^4x + \text{términos de borde}}$$

signatura $(+\,-\,-\,-)$

En presencia de materia la acción es $S = S_{H\text{-}E} + S_{mat}$. La variación de esta acción respecto de la métrica debe conducir a las ecuaciones de Einstein con fuentes. Por lo tanto, el llamado tensor de energía-momento "métrico" es tal que

$$\delta S_{mat} = \int\frac{1}{2c}\,T_{ij}\,\delta g^{ij}\sqrt{|g|}\,d^4x \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_{ij} = \frac{2c}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{ij}}}$$

derivada funcional

signatura $(+\,-\,-\,-)$

Invariancia de gauge de la acción

Es importante destacar que algunas variaciones de la métrica en la acción de Hilbert-Einstein no generan dinámica, porque la acción es indiferente a esas variaciones sobre cualquier evolución de las 10 variables dinámicas g_{ij}. Eso ocurre cuando la variación de la métrica tiene la forma

$$\bar{\bar{g}} \rightarrow \bar{\bar{g}} + \pounds_{\bar{\xi}} \bar{\bar{g}}$$

es decir, $$\delta g^{ij} = \left(\pounds_{\bar{\xi}} \bar{\bar{g}}\right)^{ij} = \xi^k g^{ij}{}_{,k} + g^{kj} \xi^i{}_{,k} + g^{ik} \xi^j{}_{,k}$$

Cuando no hay torsión vale reemplazar las derivadas comunes por derivadas covariantes. En ese caso, si la conexión es métrica se anula el primer término:

$$\delta g^{ij} = g^{kj} \xi^i{}_{;k} + g^{ik} \xi^j{}_{;k} = 2\, \xi^{(i;j)}$$

Entonces la variación de la acción queda

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int 2\, \overbrace{G_{ij}\, \xi^{(i;j)}}^{G^{ij}\, \xi_{(i;j)}} \sqrt{|g|}\, d^4x \;+\; \text{términos de borde}$$

Como el tensor de Einstein es simétrico y tiene cuadri-divergencia nula:

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int 2 \left(G^{ij}\, \xi_i\right)_{;j} \sqrt{|g|}\, d^4x \;+\; \text{términos de borde}$$

El primer término se convierte en un término de borde usando el teorema de la divergencia. Por lo tanto, el tipo de variación considerada no aporta a la dinámica.* Aunque la acción no es en sí misma invariante, como sucede con las transformaciones de gauge en el electromagnetismo, el hecho que estas variaciones sólo producen términos de borde indica que si se dotara la acción con un término de borde apropiado entonces podría lograrse una acción invariante ante transformaciones de la forma $\delta g = \pounds_{\xi}\, g$.

* Como ya vimos, la invariancia de gauge reduce a 2 el número de grados de libertad (en n=4).

Bibliog.: Gasperini

Ecuaciones de estructura de Cartan

El uso del cálculo exterior permite lograr expresiones reveladoras para la torsión y la curvatura. La torsión quedará dada en términos de las derivadas exteriores de las 1-formas de la base del espacio cotangente, mientras que la curvatura resulta de la derivada exterior de 1-formas definidas por la conexión. Así, la base $\{\tilde{\mathbf{E}}^a\}$ y la conexión se comportan como potenciales para la torsión y la curvatura. Esta formulación fue desarrollada por Elie Cartan en 1922.

Comencemos por la definición conocida de la torsión,

$$T(\ ;\bar{U},\bar{V}) \doteq \nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U},\bar{V}]$$

Este tensor de tipo $\binom{1}{2}$ se descompone en una base cualquiera como

$$T = T^a{}_{bc}\,\bar{E}_a\otimes\tilde{E}^b\otimes\tilde{E}^c = \bar{E}_a\otimes\frac{1}{2}T^a{}_{bc}\,\tilde{E}^b\wedge\tilde{E}^c \doteq \bar{E}_a\otimes\tilde{\tilde{T}}^a$$

donde hemos explotado la antisimetría del tensor para definir una 2-forma $\tilde{\tilde{T}}^a$ "valuada" en el espacio tangente; es decir, $\tilde{\tilde{T}}^a$ es un conjunto de 2-formas que ante cambio de base transforman como componentes de un vector para que $\bar{E}_a\otimes\tilde{\tilde{T}}^a$ resulte un tensor $\binom{1}{2}$.

Calculemos las componentes $T^a{}_{bc}$:

$$T^a{}_{bc} = T(\tilde{E}^a;\bar{E}_b,\bar{E}_c) = \langle\tilde{E}^a,\ \nabla_{\bar{E}_b}\bar{E}_c - \nabla_{\bar{E}_c}\bar{E}_b - [\bar{E}_b,\bar{E}_c]\rangle$$

$$= \langle\tilde{E}^a, (\Gamma^d_{cb} - \Gamma^d_{bc})\,\bar{E}_d - (E_b^i\,\partial_i E_c^j - E_c^i\,\partial_i E_b^j)\,\partial_j\rangle$$

$$= \left(\Gamma^a_{cb} - E^a_j\,E^i_b\,\partial_i E^j_c\right) - (c\leftrightarrow b)$$

Los dos términos contribuyen igual a $\tilde{\tilde{T}}^a = \frac{1}{2} T^a{}_{bc}\, \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$. Por otro lado sabemos que $E^a_j\, \partial_i E^j_c = -E^j_c\, \partial_i E^a_j$, pues $E^a_j E^j_c = \delta^a_c$. Entonces

$$\tilde{\tilde{T}}^a = \Big(\Gamma^a_{cb} + E^j_c\, \underbrace{E^i_b\, \partial_i E^a_j\Big)\, \tilde{E}^b}_{\tilde{d}x^i \ (\text{usar } \tilde{E}^b = E^b_k\, \tilde{d}x^k)} \wedge \tilde{E}^c = \Gamma^a_{cb}\, \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c + \underbrace{\partial_i E^a_j\, \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j}_{\tilde{d}\tilde{E}^a}$$

Definimos la conexión de spin, como el siguiente conjunto de 1-formas

$$\boxed{\tilde{\omega}^a{}_c \doteq \Gamma^a_{cb}\, \tilde{E}^b}$$

índice de derivación

lo que nos permite escribir

$$\boxed{\tilde{\tilde{T}}^a = \tilde{d}\tilde{E}^a + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{E}^c \doteq D\tilde{E}^a}$$

La derivada exterior covariante D no sólo actúa como la derivada exterior d, en el sentido que toma una p-forma y da una (p+1)-forma, cumpliendo todas las reglas de la derivada exterior; la presencia del término de conexión implica que si se aplica D a una p-forma valuada en el espacio tangente entonces resulta un objeto tensorial de ese mismo carácter:

$$\tilde{E}^a \rightarrow \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a\, \tilde{E}^a \quad \Rightarrow \quad D\tilde{E}^a \rightarrow D\tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a\, D\tilde{E}^a$$

No hace falta demostrar esto; así debe funcionar debido al carácter tensorial de la torsión $T = \bar{E}_a \otimes D\tilde{E}^a$. En cambio la derivada exterior d no tiene esa propiedad, pues involucraría derivadas de los coeficientes $\Lambda^{a'}{}_a$. No hay en esto nada que no sepamos ya; el término de conexión de spin se transforma adecuadamente para compensar las derivadas de los $\Lambda^{a'}{}_a$ que provienen de la derivada exterior común:

$$\tilde{E}^a \to \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a \tilde{E}^a \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega}^a{}_c \to \tilde{\omega}^{a'}{}_{c'} = \Gamma^{a'}{}_{c'b'} \tilde{E}^{b'}$$

Ejercicio: usando la transformación de la conexión afín y la base obtener que

$$\boxed{\tilde{\omega}^{a'}{}_{c'} = \Lambda^{a'}{}_a \, \tilde{\omega}^a{}_c \, \Lambda^c{}_{c'} + \Lambda^{a'}{}_a \, d\Lambda^a{}_{c'}}$$

Como se puede ver, la diferencia de dos conexiones de spin es un tensor.

Entonces hemos obtenido que la torsión es la derivada exterior covariante de la base del espacio cotangente:

$$\boxed{T = \bar{E}_a \otimes \tilde{\tilde{T}}^a = \bar{E}_a \otimes D\tilde{E}^a}$$

Veamos ahora qué puede decirse de la curvatura. El tensor de Riemann es

$$R(\ ;\bar{C}, \bar{A}, \bar{B}) \doteq [\nabla_{\bar{A}}, \nabla_{\bar{B}}]\,\bar{C} - \nabla_{[\bar{A}, \bar{B}]}\,\bar{C}$$

Este tensor de tipo $\binom{1}{3}$ se descompone en una base cualquiera como

$$R = R^d{}_{cab} \, \bar{E}_d \otimes \tilde{E}^c \otimes \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b = \bar{E}_d \otimes \tilde{E}^c \otimes \frac{1}{2} R^d{}_{cab} \, \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$$

donde fue aprovechada la antisimetría de las dos últimas entradas del Riemann. La estructura del Riemann contiene una familia de 2-formas valuadas en el espacio tangente:

$$\boxed{\tilde{\tilde{R}}^d{}_c \doteq \frac{1}{2} R^d{}_{cab} \, \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b}$$

tal que $R = \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^d \otimes \tilde{\tilde{R}}^c{}_d$.

Calculemos los valores de $R^d{}_{cab}$

$$R^d{}_{cab} = R(\tilde{E}^d; \bar{E}_c, \bar{E}_a, \bar{E}_b) = \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a}\nabla_{\bar{E}_b}\bar{E}_c - \nabla_{\bar{E}_b}\nabla_{\bar{E}_a}\bar{E}_c - \nabla_{[\bar{E}_a,\bar{E}_b]}\bar{E}_c\rangle$$

Explotando la antisimetría,

$$R^d{}_{cab} = \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a}\left(\Gamma^f_{cb}\,\bar{E}_f\right) - \nabla_{(E_a^i\,\partial_i E_b^j)\partial_j}\bar{E}_c\rangle - (a \leftrightarrow b)$$

Notemos que $\bar{E}_f = E^k_f\,\partial_k \Rightarrow \partial_j = E^f{}_j\,\bar{E}_f$. Así podemos reemplazar

$$(E_a^i\,\partial_i E_b^j)\,\partial_j = E_a^i\,E^f{}_j\,\partial_i E_b^j\,\bar{E}_f \overset{E^f{}_j E^j_b = \delta^f_b}{=} - E_a^i\,E_b^j\,\partial_i E^f_j\,\bar{E}_f$$

Entonces

$$R^d{}_{cab} = \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a}\left(\Gamma^f_{cb}\,\bar{E}_f\right) + E_a^i\,E_b^j\,(\partial_i E^f_j)\,\nabla_{\bar{E}_f}\bar{E}_c\rangle - (a \leftrightarrow b)$$

$$= \langle \tilde{E}^d, E_a^i\,(\partial_i \Gamma^f_{cb})\,\bar{E}_f + \Gamma^f_{cb}\,\Gamma^g_{fa}\,\bar{E}_g + E_a^i\,E_b^j\,(\partial_i E^f_j)\,\Gamma^g_{cf}\,\bar{E}_g\rangle - (a \leftrightarrow b)$$

$$= E_a^i\,\partial_i \Gamma^d_{cb} + \Gamma^f_{cb}\,\Gamma^d_{fa} + E_a^i\,E_b^j\,(\partial_i E^f_j)\,\Gamma^d_{cf} - (a \leftrightarrow b)$$

Si se tratara de una base coordenada obtendríamos la expresión conocida de las componentes del Riemann. Cuando el resultado obtenido se combina con $\tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$ para construir $\tilde{\tilde{R}}^d{}_c = \frac{1}{2} R^d{}_{cab}\,\tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$, aparecerá la combinación

$$E_a^i\,\tilde{E}^a = \underbrace{E_a^i\,E^a_k}_{\delta^i_k}\,\tilde{d}x^k = \tilde{d}x^i$$

junto con $E_b^j\,\tilde{E}^b = \tilde{d}x^j$. Además, en el segundo término se forma $\tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c$.

Entonces $\quad \tilde{\tilde{R}}^d{}_c = \frac{1}{2} R^d{}_{cab}\, \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b = d\Gamma^d_{cb} \wedge \tilde{E}^b + \tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c + \Gamma^d_{cf}\, d\tilde{E}^f =$

$$= d(\underbrace{\Gamma^d_{cb}\, \tilde{E}^b}_{\tilde{\omega}^d{}_c}) + \tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{R}}^d{}_c = \tilde{d}\tilde{\omega}^d{}_c + \tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c}$$

Ante un cambio de base, la conexión de spin transforma apropiadamente para que la curvatura se comporte tensorialmente:

$$\tilde{E}^a \longrightarrow \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a \tilde{E}^a \quad \Rightarrow \quad \tilde{\tilde{R}}^d{}_c \longrightarrow \tilde{\tilde{R}}^{d'}{}_{c'} = \Lambda^{d'}{}_d\, \Lambda^c{}_{c'}\, \tilde{\tilde{R}}^d{}_c$$

Sería incorrecto pretender ver a $\tilde{\tilde{R}}^d{}_c$ como la derivada exterior covariante de la conexión de spin, pues la conexión de spin no es tensorial.

▶ Los resultados obtenidos para la torsión y la curvatura constituyen las ecuaciones de estructura de Cartan,

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\tilde{T}}^a &= \tilde{d}\tilde{E}^a + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{E}^c = D\tilde{E}^a \\ \tilde{\tilde{R}}^d{}_c &= \tilde{d}\tilde{\omega}^d{}_c + \tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c \end{aligned}}$$

que exhiben a la base y la conexión de spin como potenciales para la torsión y la curvatura.

Es interesante ver lo que sucede cuando aplicamos dos veces la derivada exterior covariante a un conjunto de p-formas $\tilde{\phi}^a$ valuada en el espacio tangente:

$$D^2\tilde{\phi}^a = D(d\tilde{\phi}^a + \tilde{\omega}^a{}_b \wedge \tilde{\phi}^b) = \overbrace{d(\tilde{\omega}^a{}_b \wedge \tilde{\phi}^b)}^{d\tilde{\omega}^a{}_b \wedge \tilde{\phi}^b - \tilde{\omega}^a{}_b \wedge d\tilde{\phi}^b} + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge (d\tilde{\phi}^c + \tilde{\omega}^c{}_b \wedge \tilde{\phi}^b)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D^2\tilde{\phi}^a = \tilde{\tilde{R}}^a{}_b \wedge \tilde{\phi}^b}$$

En particular, como $\tilde{\tilde{T}}^a = D\tilde{E}^a$, resulta

$$\boxed{D\tilde{\tilde{T}}^a = \tilde{\tilde{R}}^a{}_b \wedge \tilde{E}^b}$$

1ra. identidad de Bianchi

Por otro lado, si tomamos la derivada exterior covariante a la curvatura:

$$DR^a{}_b = dR^a{}_b + \underbrace{\tilde{\omega}^a{}_c \wedge R^c{}_b - \tilde{\omega}^c{}_b \wedge R^a{}_c}$$

dos términos de conexión: uno para cada índice con los signos que corresponden a cada tipo de índice.

$$DR^a{}_b = d\left(d\tilde{\omega}^a{}_b + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{\omega}^c{}_b\right) + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \left(d\tilde{\omega}^c{}_b + \tilde{\omega}^c{}_d \wedge \tilde{\omega}^d{}_b\right)$$
$$- \tilde{\omega}^c{}_b \wedge \left(d\tilde{\omega}^a{}_c + \tilde{\omega}^a{}_d \wedge \tilde{\omega}^d{}_c\right)$$

$$= d\tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{\omega}^c{}_b - \tilde{\omega}^a{}_c \wedge d\tilde{\omega}^c{}_b + \ldots$$

$$= \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{\omega}^c{}_d \wedge \tilde{\omega}^d{}_b - \tilde{\omega}^c{}_b \wedge \tilde{\omega}^a{}_d \wedge \tilde{\omega}^d{}_c = 0$$

$$\boxed{D\tilde{\tilde{R}}^a{}_b = 0}$$

2da. identidad de Bianchi

Nótese que hasta aquí no hemos introducido la métrica. En su intercambio epistolar con Einstein, Cartan abogaba por distinguir la conexión de la métrica, y verlas como dos estructuras separadas.

En presencia de una métrica podemos trabajar con bases ortonormales (también llamadas "vierbeins" o tétradas), que indicaremos con $\{\bar{E}_{\hat{a}}\}$. En tal caso la métrica es

$$\tilde{\tilde{g}} = \eta_{ab}\, \tilde{E}^{\hat{a}} \otimes \tilde{E}^{\hat{b}} \quad \Rightarrow \quad \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} = \tilde{\tilde{g}}(\bar{E}_{\hat{a}}, \bar{E}_{\hat{b}}) = \eta^{ab}$$

- Las tétradas se relacionan entre ellas vía transformaciones de Lorentz locales (dejan el símbolo de Minkowski invariante, preservando la ortonormalidad).

- Una conexión métrica es aquella que cumple la regla de Leibniz ante el producto escalar. Luego, la derivada covariante de la expresión anterior da

$$0 = \left(\nabla_{\bar{E}_{\hat{c}}} \bar{E}_{\hat{a}}\right) \cdot \bar{E}_{\hat{b}} + \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \nabla_{\bar{E}_{\hat{c}}} \bar{E}_{\hat{b}} = \Gamma^{\hat{d}}_{\hat{a}\hat{c}}\, \bar{E}_{\hat{d}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} + \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \left(\Gamma^{\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}\, \bar{E}_{\hat{d}}\right)$$

$$= \Gamma^{\hat{d}}_{\hat{a}\hat{c}}\, \eta_{db} + \Gamma^{\hat{d}}_{\hat{b}\hat{c}}\, \eta_{ad}$$

Multiplicando por $\tilde{E}^{\hat{c}}$: $\boxed{\tilde{\omega}^{\hat{d}}{}_{\hat{a}}\, \eta_{db} + \tilde{\omega}^{\hat{d}}{}_{\hat{b}}\, \eta_{ad} = 0}$ conexión métrica

Aunque la conexión de spin no transforma como componentes de un tensor, es fácil verificar que este resultado no es alterado por transformaciones locales de Lorentz. El resultado significa que $\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}} \doteq \eta_{ac}\, \tilde{\omega}^{\hat{c}}{}_{\hat{b}}$ es antisimétrico.

- La metricidad de la conexión implica que $\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}} = \eta^{bc}\, \tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}}{}_{\hat{c}}$ es antisimétrico.

- El símbolo de Minkowski es un conjunto de 0-formas valuado en el espacio tangente; la conexión métrica implica que $D\eta_{ab} = 0$:

$$D\eta_{ab} = \underbrace{\tilde{d}\eta_{ab}}_{0} - \tilde{\omega}^{\hat{c}}{}_{\hat{a}}\, \eta_{cb} - \tilde{\omega}^{\hat{c}}{}_{\hat{b}}\, \eta_{ac} = 0$$

← si la conexión es métrica

- La conexión métrica también implica que $D\,\varepsilon_{abc\ldots} = 0$:

$$D\,\varepsilon_{ab\ldots} = \underbrace{\tilde{d}\,\varepsilon_{ab\ldots}}_{0} - \tilde{\omega}^{\hat{f}}{}_{\hat{a}}\, \varepsilon_{fb\ldots} - \tilde{\omega}^{\hat{f}}{}_{\hat{b}}\, \varepsilon_{af\ldots} - \ldots$$

(si $a\, b \ldots$ son diferentes, usar que la diagonal de $\tilde{\omega}^{\hat{f}}{}_{\hat{h}}$ se anula por antisimetría. Para pares de índices iguales, usar la antisimetría del símbolo de Levi-Civita para cancelar los términos de conexión).

La conexión de Levi-Civita resulta de pedir metricidad y torsión nula. La condición de metricidad involucra $\frac{n}{2}(n+1)$ relaciones entre 1-formas, que totalizan $n \times \frac{n}{2}(n+1)$ ecuaciones. Por otro lado la anulación de $\tilde{\tilde{T}}^a$ involucra n relaciones entre 2-formas, que totalizan $n \times \frac{n}{2}(n-1)$ ecuaciones. Así tenemos un total de n^3 ecuaciones que fijan completamente las n^3 componentes de la conexión.

Acción de Hilbert-Einstein: sea la n-forma

$$\varepsilon_{fgcd\ldots}\tilde{\tilde{R}}^{\hat{f}\hat{g}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} \wedge \ldots = \frac{1}{2}\varepsilon_{fgcd\ldots} R^{\hat{f}\hat{g}}{}_{\hat{a}\hat{b}}\, \underbrace{\tilde{E}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} \wedge \ldots}_{n \text{ factores}}$$

que será proporcional al escalar de curvatura por el volumen métrico. En efecto, $a\, b\, c\, d \ldots$ tienen que ser todos distintos para que no se anule el producto wedge; pero también tienen que ser $f\, g\, c\, d \ldots$ todos distintos para que no se anule el símbolo de Levi-Civita. Entonces en la sumatoria sólo sobreviven los términos donde ab coincide con fg. Como tanto ab como fg son antisimétricos en la curvatura, y se contraen con objetos antisimétricos, tendremos cuatro contribuciones iguales para cada par de valores; por ejemplo para el par 12 tendremos:

$$\varepsilon_{12\ldots} R^{\hat{1}\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}}\, \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \ldots = \varepsilon_{21\ldots} R^{\hat{2}\hat{1}}{}_{\hat{1}\hat{2}}\, \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \ldots = \varepsilon_{12\ldots} R^{\hat{1}\hat{2}}{}_{\hat{2}\hat{1}}\, \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \ldots = \varepsilon_{21\ldots} R^{\hat{2}\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{1}}\, \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \ldots$$

Por otro lado, al escalar de curvatura $R^{ab}{}_{ab}$ contribuyen dos términos iguales por cada par de índices: $R^{12}{}_{12} + R^{21}{}_{21} + \ldots$. Estas diferentes multiplicidades son canceladas por el factor 1/2 en la expresión del comienzo. En suma, necesitamos dos términos por cada par de índices para construir el escalar de curvatura.

Sin embargo, cada uno de estos dos términos viene acompañado por (n-2)! términos iguales que provienen del resto de los índices en $\varepsilon_{abcd\ldots}$:

$$\varepsilon_{fgcd\ldots}\,\tilde{\tilde{R}}^{\hat{f}\hat{g}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\tilde{E}^{\hat{d}}\wedge\ldots=(n-2)!\,\underset{\text{escalar de curvatura}}{R}\;\underbrace{\tilde{E}^{\hat{0}}\wedge\tilde{E}^{\hat{1}}\wedge\ldots\wedge\tilde{E}^{\widehat{n-1}}}_{\tilde{\Omega}=\sqrt{|g|}\,\tilde{dx}^0\wedge\tilde{dx}^1\wedge\ldots\wedge\tilde{dx}^{n-1}}$$

En la acción de Hilbert-Einstein en n=4 dimensiones tenemos que

$$\boxed{\underset{\text{signatura }(+---)}{(-R-2\Lambda)}\sqrt{|g|}\,\tilde{dx}^0\wedge\ldots\wedge\tilde{dx}^3=\varepsilon_{abcd}\left(\underset{\text{signatura }(+---)}{-\frac{1}{2}}\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}}-\frac{2\Lambda}{4!}\tilde{E}^{\hat{a}}\wedge\tilde{E}^{\hat{b}}\right)\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\tilde{E}^{\hat{d}}}$$

Variación "a la Palatini": En 1919 Attilio Palatini mostró que variando la acción respecto de la conexión y la métrica independientemente, se obtenía la conexión de Levi-Civita y las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto no es necesario presuponer la conexión de Levi-Civita, sino que alcanza con la hipótesis de metricidad. En la formulación que estamos viendo deberíamos variar respecto de la tétrada y la conexión de spin independientemente:

$$\delta\tilde{\tilde{R}}^a{}_b=d\,\delta\tilde{\omega}^a{}_b+\underbrace{\delta\tilde{\omega}^a{}_c\wedge\tilde{\omega}^c{}_b}_{-\tilde{\omega}^{\hat{c}}{}_{\hat{b}}\wedge\delta\tilde{\omega}^{\hat{a}}{}_{\hat{c}}}+\tilde{\omega}^a{}_c\wedge\delta\tilde{\omega}^c{}_b=D\,\delta\tilde{\omega}^a{}_b$$

es un tensor (diferencia de conexiones)

$$\Rightarrow\ \delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}\,\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\tilde{E}^{\hat{d}}\right)=\varepsilon_{abcd}\,D\delta\tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\tilde{E}^{\hat{d}}\underset{\text{conexión métrica}}{=}2\,\varepsilon_{abcd}\,\delta\tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\underset{\tilde{\tilde{T}}^{\hat{d}}}{D\tilde{E}^{\hat{d}}}+\text{término de borde}$$

$$\delta_E\left(\varepsilon_{abcd}\,\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\tilde{E}^{\hat{d}}\right)=-2\,\varepsilon_{abcd}\,\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}}\wedge\tilde{E}^{\hat{c}}\wedge\delta\tilde{E}^{\hat{d}}$$

Las ecuaciones dinámicas de vacío son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_{abcd}\, \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{\tilde{T}}^{\hat{d}} = 0 \\[1em] \varepsilon_{abcd} \left(\tilde{\tilde{R}}^{\hat{a}\hat{b}} - \frac{\Lambda}{3} \tilde{E}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{b}} \right) \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} = 0 \end{array}}$$

- La primera ecuación significa que la torsión debe anularse: hay tantas ecuaciones como componentes de $\tilde{\tilde{T}}^d$ (6 elecciones para ab por 4 componentes de la 3-forma), que es el número de componentes de $\delta\tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}}$. Por lo tanto la conexión es la de Levi-Civita.

- La segunda ecuación corresponde a las ecuaciones de Einstein.

▷ Ejercicio: mostrar que si la conexión es la de Levi-Civita entonces

$$\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2} \left(C_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} - C_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} - C_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}} \right) \tilde{E}^{\hat{c}}$$

donde los $C_{ab}{}^{c}$ son los coeficientes de rotación de Ricci:

$$C_{ab}{}^{c} \doteq -\, d\tilde{E}^{c}(\bar{E}_a, \bar{E}_b) = -\left(\pounds_{\bar{E}_a} \tilde{E}^{c} \right)(\bar{E}_b)$$

ver propiedades de la derivada de Lie

Para ello, mostrar que $\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}}$ es antisimétrica, y que anula las componentes $T^{\hat{c}}(\bar{E}_{\hat{a}}, \bar{E}_{\hat{b}})$ de la torsión.

▷ Ejercicio: mostrar que

$$[\bar{E}_a, \bar{E}_b] = C_{ab}{}^{c}\, \bar{E}_c$$