1 Ejercicio 10

En cuanto al ítem a, como
$$\tilde{d}\left(\tilde{d}\tilde{\gamma}\right) = 0 \tag{1}$$
para toda p-forma $\tilde{\gamma}$, entonces $\tilde{\beta}$ no es única, ya que
$$\tilde{d}\left(\tilde{\beta} + \tilde{d}\tilde{\gamma}\right) = \tilde{d}\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}. \tag{2}$$
En cuanto al ítem b, sea
$$\tilde{\omega} = \frac{1}{p!}\ \omega_{i_1\cdots i_p}\ \tilde{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{i_p}. \tag{3}$$
Se tiene entonces que
$$\tilde{d}\tilde{\omega} = \frac{1}{p!}\ \partial_k\omega_{i_1\cdots i_p}\ \tilde{d}x^k \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{i_p}. \tag{4}$$
Como
$$\tilde{d}x^k \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{i_p} \neq 0 \tag{5}$$
si y solo si
$$k \neq i_1 \neq \cdots \neq i_p, \tag{6}$$
si p es igual a la dimensión del espacio no hay elecciones posibles de estos $p+1$ índices de forma tal de que sean todos distintos. Por lo tanto, en este caso se tiene que
$$\tilde{d}\tilde{\omega} = 0. \tag{7}$$
Finalmente, en el ítem c, hay que probar en primer lugar que
$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0. \tag{8}$$
Conviene escribir
$$\tilde{\alpha} = \alpha_x\ \tilde{d}x + \alpha_y\ \tilde{d}y, \tag{9}$$
donde
$$\alpha_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \tag{10}$$
y
$$\alpha_y = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{11}$$
Se tiene que
$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = \partial_j\alpha_i\ \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^i = \partial_1\alpha_2\ \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 + \partial_2\alpha_1\ \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1 = \left(\partial_1\alpha_2 - \partial_2\alpha_1\right)\ \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 = \left(\partial_x\alpha_y - \partial_y\alpha_x\right)\ \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y. \tag{12}$$
Es fácil ver que
$$\partial_x\alpha_y = \partial_y\alpha_x \tag{13}$$
y por lo tanto
$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0. \tag{14}$$
Para probar que es la derivada exterior del ángulo polar, basta con recordar que
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$
y ver que
$$\tilde{d}\theta = \partial_x\theta\ \tilde{d}x + \partial_y\theta\ \tilde{d}y = -\frac{y}{x^2+y^2}\ \tilde{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\ \tilde{d}y = \alpha_x\ \tilde{d}x + \alpha_y\ \tilde{d}y = \tilde{\alpha}. \tag{16}$$
Finalmente, para que $\tilde{\alpha}$ sea globalmente exacta, por un lado hay que quitar el origen de la topología para que esté bien definida, y por el otro hay que quitar el eje x para que el ángulo polar esté bien definido, ya que si $y = 0$, θ vale lo mismo para todo x.

2 Ejercicio 11

En cuanto al ítem a, por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}\left(\ ,\tfrac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}p_i\wedge\tilde{d}q^i\left(\ ,\tfrac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{d}p_i\otimes\tilde{d}q^i-\tilde{d}q^i\otimes\tilde{d}p_i\right)\left(\ ,\tfrac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{d}p_i\ \tilde{d}q^i\left(\tfrac{d}{dt}\right)-\tilde{d}q^i\ \tilde{d}p_i\left(\tfrac{d}{dt}\right)\right)\\=\sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{dq^i}{dt}\ \tilde{d}p_i-\tfrac{dp_i}{dt}\ \tilde{d}q^i\right).\end{aligned}\tag{17}$$

Por el otro,

$$\tilde{d}H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\ \tilde{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\ \tilde{d}q^i\right).\tag{18}$$

Luego,

$$\tilde{\omega}\left(\ ,\frac{d}{dt}\right)=\tilde{d}H\tag{19}$$

si y solo si

$$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\tag{20}$$

y

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}.\tag{21}$$

Para responder el ítem b, notar que

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\ \tilde{d}Q^i+\tilde{d}F=\sum_{i=1}^{n}p_i\ \tilde{d}q^i\tag{22}$$

implica

$$\tilde{d}\sum_{i=1}^{n}P_i\ \tilde{d}Q^i+\tilde{d}\tilde{d}F=\tilde{d}\sum_{i=1}^{n}p_i\ \tilde{d}q^i\tag{23}$$

y por lo tanto queda finalmente

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}P_i\wedge\tilde{d}Q^i=\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}p_i\wedge\tilde{d}q^i.\tag{24}$$

Entonces, valen las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables y la transformación es canónica.
Finalmente, en el ítem c se tiene que

$$\tilde{d}F=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\ \tilde{d}q^i+\frac{\partial F}{\partial Q^i}\ \tilde{d}Q^i\right)\tag{25}$$

y por lo tanto queda

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\ \tilde{d}Q^i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\ \tilde{d}q^i+\frac{\partial F}{\partial Q^i}\ \tilde{d}Q^i\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\ \tilde{d}q^i,\tag{26}$$

o bien,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}-p_i\right)\ \tilde{d}q^i+\left(P_i+\frac{\partial F}{\partial Q^i}\right)\ \tilde{d}Q^i\right]=0.\tag{27}$$

Como las q^i y las Q^i son independientes, esto pasa si y solo si

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q^i}\tag{28}$$

y

$$P_i=-\frac{\partial F}{\partial Q^i}.\tag{29}$$