Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires (UBA)

**Relatividad General**

**Profesor: Rafael Ferraro**

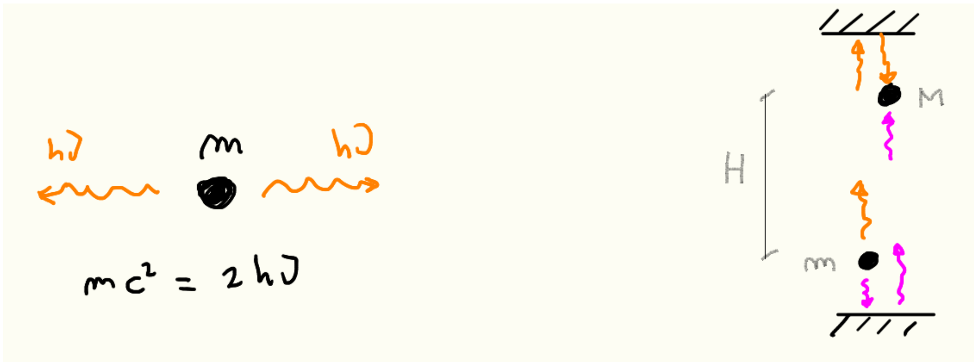
**Clase 3**
7 de septiembre de 2020

**Campo gravitatorio-inercial**
**Principio de equivalencia**

# 1 El problema de formular la interacción gravitatoria en Relatividad

En la Física de Newton la gravedad es una fuerza que depende de una distancia. Esta formulación es satisfactoria en el contexto clásico, donde las leyes de la Física no cambian de forma ante transformaciones de Galileo. Pero no es aceptable en el contexto de la Relatividad Especial, donde la interacción paradigmática es la electromagnética, que se propaga a velocidad finita, y donde la fuerza depende de distancias y velocidades.

Vamos a dar un argumento que muestra que una formulación relativista de la gravedad en el espacio-tiempo de Minkowski no sería posible. Consideremos una partícula de masa $m$ que se desintegra en dos fotones de energía $h\nu$, de modo que $mc^2 = 2h\nu$. Podemos imaginar un experimento donde los fotones de la desintegración "suben" un campo gravitatorio (uno de los fotones es reflejado por un espejo). Una vez que ascendieron una altura $H$ se encuentran para crear una nueva partícula. Si el campo gravitatorio no afectara la frecuencia de los fotones entonces los fotones alcanzarían la altura $H$ con la misma frecuencia $\nu$ y generarían una partícula de la misma masa $m$. Pero en tal caso se violaría la conservación de la energía porque



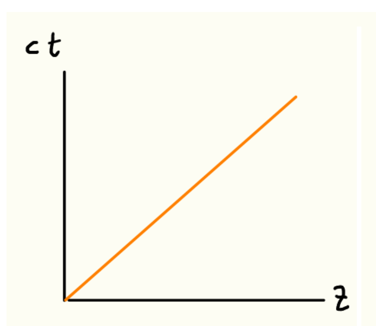

la partícula tendría además de su energía $mc^2$ la energía potencial gravitatoria $mgH$. Por lo tanto la frecuencia debe ser afectada: a la altura $H$ la frecuencia debe ser $\nu'$ para crear una masa $Mc^2 = 2h\nu'$ tal que

$$Mc^2 + MgH = mc^2$$

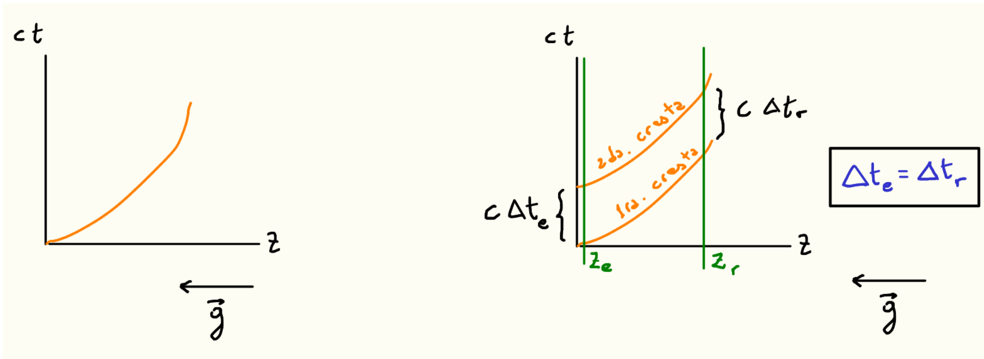
es decir

$$2h\nu' \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) = 2h\nu$$

Entonces la frecuencia debería disminuir cuando la luz sube un potencial gravitatorio. Este efecto, que aquí es visto como una consecuencia de la conservación de la energía, se llama **corrimiento al rojo gravitatorio**. Veamos por qué no resulta posible modelar este corrimiento en el espacio-tiempo de Minkowski. Sabemos que en ausencia de gravedad, y en un sistema inercial, las líneas de universo de los rayos de luz son rectas a $45^o$, Supongamos que un campo gravitatorio estático afecta esta línea de uni-




verso de alguna manera (ver Figura). Para entender qué le sucedería a la frecuencia en ese caso, consideremos un emisor fijo en $z = z_e$ que emite una




onda de período $T$. Dos crestas sucesivas de la onda que se emiten en $z_e$ con una diferencia de tiempo coordenado $\Delta t_e$ siguen las líneas de universo de rayos de luz hasta llegar hasta un receptor fijo en la posición $z = z_r$. Como el campo es estático, la línea de universo de la 2da. cresta es igual a la que corresponde a la 1ra. cresta, pero trasladada en el tiempo. Las crestas llegan a $z_r$ con una diferencia de tiempo coordenado $\Delta t_r$. En el espacio-tiempo de Minkowski el tiempo coordenado $t$ coincide con el tiempo medido por relojes en reposo en el sistema de referencia ($\Delta\tau = c^{-1}\Delta s$; pero $\Delta s = c\ \Delta t$ cuando $\Delta\vec{r} = 0$). El tiempo coordenado $t$ es el tiempo medido por los relojes del emisor y el receptor, que son los relojes utilizados para medir el período de emisión $T$ y el de recepción $T\,'$; entonces es $T = \Delta t_e$ y $T\,' = \Delta t_r$. Pero en la figura vemos que es $\Delta t_e = \Delta t_r$; por lo tanto, el esperado corrimiento de frecuencia, necesario para la conservación de la energía, no parece modelable en la geometría de Minkowski.

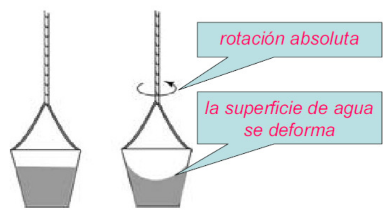
# 2 El privilegio de los sistemas inerciales

## 2.1 Principio de inercia y espacio absoluto de Newton

El **Principio de inercia** afirma que una partícula libre de fuerzas realiza un movimiento rectilíneo uniforme. Es evidente que este enunciado no puede ser válido en cualquier sistema de referencia. Como sabemos, el Principio de inercia y demás leyes fundamentales de la Física son válidos en los sistemas de referencia inerciales. Para reconocer si un laboratorio es inercial o no bastaría entonces observar el movimiento de una partícula libre de fuerzas. Pero, ¿cómo sabemos que la partícula está libre de fuerzas? Dado que existen fuerzas que se ejercen “a distancia”, ¿cómo podemos estar seguros de que no hay fuerzas “a distancia” actuando sobre la partícula?

En la visión Newton esta cuestión se resuelve diciendo que los laboratorios inerciales son aquellos que se trasladan uniformemente respecto del **espacio absoluto**. Para Newton, la aceleración de la que habla su 2da Ley es la **aceleración absoluta**, que es la aceleración respecto del espacio absoluto.

Aunque Newton admitía que **el movimiento absoluto es indetectable** (sólo es detectable el movimiento relativo), también pensaba que la aceleración absoluta era un concepto válido. Según Newton, la existencia de la rotación absoluta se demuestra, por ejemplo, con el efecto que produce sobre la superficie del agua en un balde cuando el balde está en rotación.




En un laboratorio acelerado aparecen los efectos centrífugo, de Coriolis, etc. que no aparecerían en un sistema inercial. Por lo tanto la diferencia entre un laboratorio acelerado y uno inercial es algo que se puede reconocer físicamente.

Distintos laboratorios inerciales están en traslación relativa unos respecto de otros. La equivalencia de los sistemas inerciales frente a las leyes fundamentales de la Física no hace más que reflejar la **indetectabilidad del estado de movimiento absoluto** de un laboratorio, poniendo de relieve, en cambio, el **carácter absoluto de los cambios de estados de movimiento**. Esto es así tanto en la Física Clásica como en Relatividad Especial. Las leyes fundamentales son válidas en estos sistemas de referencia y no en otros. Por lo tanto los fenómenos físicos que se derivan de las leyes fundamentales son incapaces de revelar el **estado de movimiento** de un laboratorio. El estado de movimiento es una **noción relativa**; no tiene sentido afirmar que un laboratorio está en reposo absoluto porque no hay experimento que revele tal condición. Por el contrario, el **cambio de estado de movimiento** del laboratorio puede ser detectado mediante un experimento. De esa forma, la existencia de una **aceleración** tiene el rango de una **noción absoluta**.

## 2.2 Crítica de Mach (1883)

⧫ El privilegio de un sistema de referencia sobre otro debe reconocer una causa física.
⧫ El espacio absoluto de Newton no es una causa física. Por lo tanto no es una explicación legítima para el privilegio de los sistemas de referencia inerciales.
⧫ El carácter **inercial** de un sistema de referencia no puede ser otorgado por el espacio absoluto de Newton sino por la relación del sistema de referencia con la distribución de materia en el universo. Un sistema inercial debería ser aquel que no está en rotación respecto de las estrellas "fijas", y que se traslada uniformemente respecto del centro de masa del universo.
⧫ Si el espacio estuviese vacío no habría manera de privilegiar un sistema de referencia respecto de otro.
⧫ El balde de Newton no revela la rotación absoluta sino la rotación relativa al resto del universo. No sabemos cuál sería el comportamiento de la superficie de agua si el resto del universo no existiese, o si el balde fuera suficientemente grueso como para competir con el resto del universo.

### 2.2.1 Principio de Mach

Einstein bautizó Principio de Mach a la idea de que los efectos inerciales sobre un sistema físico, como el efecto centrífugo y otros, provienen de la relación entre el sistema físico y el resto del universo. Esta idea es uno de los disparadores de la Relatividad General.

## 2.3 Principio de equivalencia

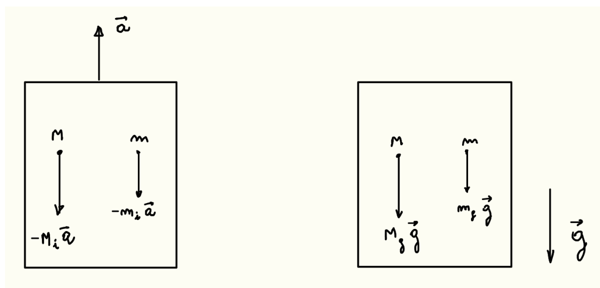
La igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria lleva a la ley de caída universal de los cuerpos (todos los cuerpos caen con la misma aceleración). Desde los tiempos de Galileo esta ley era vista como un mero hecho, sin ningún significado más profundo. Para Einstein, en cambio, la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria indicaba que las fuerzas de inercia y gravitatorias eran de la misma naturaleza. Así como las masas "cercanas" producen fuerzas gravitatorias, las masas "lejanas" producen fuerzas de inercia (siguiendo a Mach).

Por lo tanto, formular satisfactoriamente una teoría de la interacción gravitatoria implicará conocer también cómo son las leyes de la Física en sistemas acelerados. La importancia de estas reflexiones como puntos de partida para tal formulación, sugiere elevar a la categoría de Principio las consecuencias de la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria:

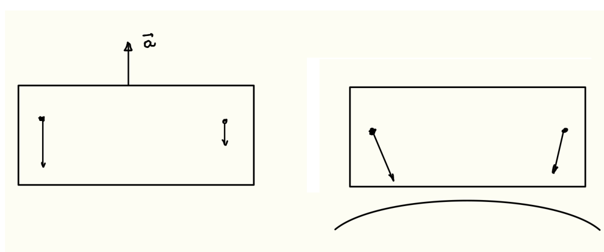
### 2.3.1 Principio de equivalencia débil

"La trayectoria espacio-temporal de una partícula libremente gravitante no depende más que de las condiciones iniciales" (es decir, no depende de las propiedades de la partícula).[1]

Una consecuencia de la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria es la imposibilidad de distinguir **localmente** un laboratorio acelerado, por un lado, de un laboratorio inercial en presencia de un campo gravitatorio, por el otro: Si $\vec{g} = -\vec{a}$ entonces las fuerzas son iguales en ambos laborato-



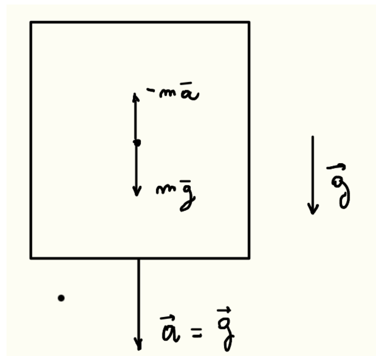

rios. Esta equivalencia es **local** porque si consideramos regiones extendidas detectaremos que el campo gravitatorio converge hacia sus fuentes:[2]




Consecuentemente, en un laboratorio en caída libre (es decir, si $\vec{a} = \vec{g}$) el **campo gravitatorio-inercial** se anula localmente: lo que permite otra

[1] El Principio de equivalencia *fuerte* dice que la energía gravitatoria interna de un sistema autogravitante contribuye en igual cantidad a su masa inercial y a su masa gravitatoria. Es decir que la energía gravitatoria interna también gravita.

[2] También es local en la dimensión temporal. Aun en un laboratorio de pequeñas dimensiones podríamos detectar la convergencia de la gravedad esperando un tiempo suficientemente largo.




versión del Principio de equivalencia débil: "Los efectos de todo campo gravitatorio-inercial sobre el movimiento de las partículas pueden eliminarse localmente con un cambio adecuado de sistema de referencia".

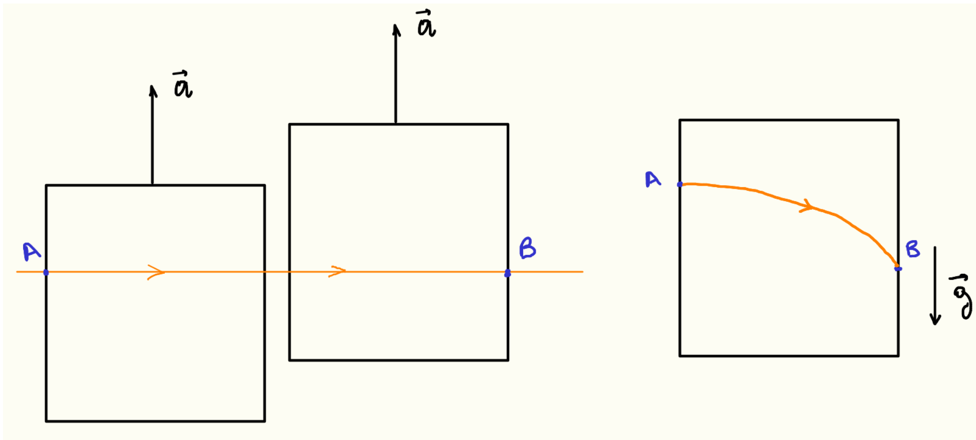
En cada evento del espacio-tiempo un sistema en caída libre será llamado **localmente inercial**, debido a que en tal sistema la dinámica de la partícula se verá como la conocemos en un sistema inercial de Relatividad Especial.

Pero Einstein fue más allá, y pensó que no sólo la Dinámica se desenvolvería en un sistema en caída libre tal como la conocemos en Relatividad Especial sino que lo mismo sucedería con cualquier otra teoría física que tuviese una formulación en el marco de la Relatividad Especial. Concretamente, el electromagnetismo y, en consecuencia, los fenómenos ópticos:

### 2.3.2 Principio de equivalencia de Einstein

"Los efectos del campo gravitatorio-inercial pueden eliminarse localmente cambiando a un sistema de referencia adecuado donde las leyes de la Física tienen la forma que conocemos en Relatividad Especial."

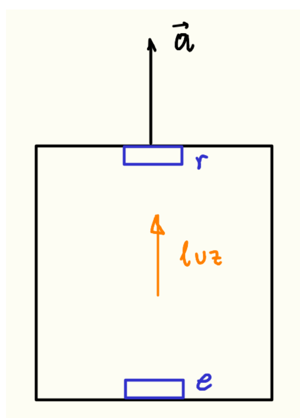
Dicho de otro modo, lo que le suceda a la luz en un laboratorio acelerado deberá sucederle también en un laboratorio inercial (en el sentido newtoniano del término) en presencia de gravedad. Ahora bien, en un laboratorio acelerado un rayo de luz no viaja en línea recta sino que se deflecta; por lo tanto concluimos que la luz debería deflectarse en presencia de gravedad (**la luz gravita**): Además, la frecuencia de la luz en un campo gravitatorio debería sufrir los mismos efectos que sufre en un sistema acelerado. Consideremos un sistema de emisor-receptor separado por una altura $H$, en




movimiento uniformemente acelerado (en sentido newtoniano):

$$z_e = \frac{1}{2}\ a\ t^2\ , \qquad\qquad z_r = H + \frac{1}{2}\ a\ t^2$$

Consideremos dos crestas de la onda sucesivas separados por un período $T$




:

$$\text{1ra. cresta} \quad : \qquad\qquad z = c\ t\ ,$$

$$\text{2da. cresta} \quad : \qquad\qquad z = c\ (t - T) + \frac{1}{2}\ a\ T^2$$

La 1ra. cresta llega al receptor en un instante $t_1$:

$$c\ t_1 = H + \frac{1}{2}\ a\ t_1^2$$

mientras que la 2da. cresta llega al receptor en un instante $t_2$:

$$c\ (t_2 - T) + \frac{1}{2}\ a\ T^2 = H + \frac{1}{2}\ a\ t_2^2$$

El período de recepción es $T\ ' = t_2 - t_1$, que se obtiene restando estas dos ecuaciones:

$$c\ (T\ ' - T) + \frac{1}{2}\ a\ T^2 = \frac{1}{2}\ a\ (t_2^2 - t_1^2)$$

o bien, reemplazando $t_2 = T\ ' + t_1$,

$$c\ (T\ ' - T) + \frac{1}{2}\ a\ T^2 = \frac{1}{2}\ a\ T\ '^2 + a\ T\ '\ t_1$$

Despreciando $T$, $T\ '$ frente al tiempo de viaje $t_1 \simeq H/c$ (por cierto $H$ es mucho mayor que la longitud de onda), obtenemos

$$c\ (T\ ' - T) \simeq \frac{a\ H}{c}\ T\ '$$

y en términos de la frecuencia

$$1 - \frac{\nu\ '}{\nu} \simeq \frac{a\ H}{c^2}$$

que es el resultado obtenido al comienzo mediante otro tipo de razonamiento. Según el Principio de equivalencia, cuando un rayo de luz “sube” un campo gravitatorio la frecuencia debería debilitarse (**corrimiento al rojo gravitatorio**) de acuerdo a la relación

$$1 - \frac{\nu\ '}{\nu} \simeq \frac{g\ H}{c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$$

donde $\phi$ es el potencial gravitatorio. Este corrimiento fue medido por primera vez en el campo gravitatorio terrestre por Pound y Rebka en 1960. Nótese que para aproximar el tiempo de viaje $t_1$ por $H/c$ la velocidad $a\ t_1$ alcanzada por el receptor debe ser mucho menor que $c$; entonces es $aH << c^2$. Consecuentemente, la expresión del corrimiento al rojo gravitatorio vale para $\Delta\phi << c^2$ (campo gravitatorio débil). Esta expresión es utilizada por el sistema GPS para comparar la marcha de los relojes en órbita respecto los relojes en la Tierra.

Ya habíamos adelantado que este corrimiento de frecuencias entre emisor y detector en reposo relativo en un campo gravitatorio no puede ser modelado en el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, podríamos modelarlo aceptando que el campo gravitatorio se expresa a través de una dependencia de la métrica con la posición (es decir, abandonando la geometría de Minkowski). Así el tiempo medido por un reloj fijo al emisor sería

$$\Delta\tau_e = c^{-1}\Delta s_e = c^{-1}\sqrt{g_{ij}\Delta x^i \Delta x^j} = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_e)}\ \Delta t_e\ ,$$

mientras que un reloj fijo al receptor mediría

$$\Delta\tau_r = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_r)}\ \Delta t_r\ .$$

Aunque los tiempos coordenados entre crestas sucesivas son iguales como hemos dicho ($\Delta t_e = \Delta t_r$), los relojes miden tiempos distintos; por lo tanto los períodos son distintos:

$$\frac{\nu\,'}{\nu} = \frac{T}{T\,'} = \frac{\sqrt{g_{00}(\vec{r}_e)}}{\sqrt{g_{00}(\vec{r}_r)}}$$

Para obtener $\nu\,'/\nu \simeq 1 - c^{-2}\Delta\phi$ en campo débil, debería ser

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2}\ , \qquad\qquad |\phi| << c^2\ .$$

En ausencia de gravedad recuperamos el valor minkowskiano.

# 3 Principio general de relatividad

La noción de campo gravitatorio-inercial hace que la separación de los sistemas de referencia en “buenos” y “malos” pierda entidad. Las leyes de la Física deben incluir la interacción entre el campo gravitatorio-inercial y el resto de los sistemas físicos. Esas leyes deben ser utilizables en cualquier sistema de referencia, con tal que conozcamos el campo gravitatorio-inercial en el sistema de referencia elegido; en eso consiste la **generalización** del Principio de relatividad. No obstante, en cada evento del espacio-tiempo han de existir sistemas localmente inerciales donde se anula localmente el campo gravitatorio-inercial, y las leyes toman la forma que conocemos en Relatividad Especial.

El campo gravitatorio-inercial está determinado por la distribución y el movimiento de la materia en el universo. No debe ser visto como una fuerza, sino que se manifiesta en las leyes de la Física a través del tensor métrico que describe la geometría del espacio-tiempo. Por lo tanto, necesitaremos también una ley que diga cómo la materia del universo determina el tensor métrico. Ese tensor métrico se reducirá localmente a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski cuando adoptemos un sistema localmente inercial.