0.1 Ejercicio 1

En cuanto al ítem a, la geometría interior a una cascar esférica no puede tener singularidades en $r = 0$ y por lo tanto la constante de integración M debe ser nula. Haciendo eso, la métrica es la de Minkowski en esféricas. Además, como la métrica de Schwarzschild no depende del tiempo y es la más general de todas con simetría esférica, no hay radiación monopolar (al igual que en electromagnetismo).

En el ítem b, la trayectoria de un fotón que solo se mueve en dirección radial está dada por

$$0 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\ c^2\ dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\ dr^2,$$

o bien,

$$|d\,(c\ t)| = \frac{|dr|}{\left|1 - \frac{r_s}{r}\right|}.$$

Si $r > r_s$, t es temporal y el futuro se elije por supuesto en $t > 0$. Esto implica que los conos apuntan hacia arriba (en el plano $(r, c\ t)$). Además, la pendiente $\frac{|d(c\ t)|}{|dr|}$ tiende a 1 cuando $r \to \infty$ (son conos de 45°), aumenta a medida que disminuye r, y tiende a infinito cuando $r \to r_s$.

Si $r < r_s$, r es temporal. Elijiendo el futuro de forma tal de que un rayo de luz no pueda traspasar el horizonte de eventos, los conos deben apuntar hacia la izquierda. La pendiente que ahora es $\frac{|dr|}{|d(c\ t)|}$ tiende a cero cuando $r \to r_s$, aumenta a medida que disminuye r, y tiende a infinito cuando $r \to 0$.

En cuanto al ítem c, como la fuente y el observador están quietos y $r > r_s$, el tiempo propio de ambos está dado por

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\ dt.$$

Como la diferencia de tiempo coordenado entre los dos pulsos de luz es la misma, se tiene entonces que

$$\frac{\Delta\tau_f}{\Delta\tau_{obs}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_f}}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_{obs}}}},$$

o bien,

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_f} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_f}}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_{obs}}}}.$$

Como $r_{obs} > r_f$, $\nu_{obs} < \nu_f$ y por lo tanto el observador ve la frecuencia corrida al rojo.

Finalmente, en el d, si se le aplica una cuadrifuerza K^μ a un objeto, sus ecuaciones de movimiento están dadas por

$$m\ \left(\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\ U^\alpha\ U^\beta\right) = K^\mu.$$

Se quiere entonces que esta cuadrifuerza sea tal que el cuerpo esté en reposo, es decir,

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \frac{d(c\ t)}{d\tau} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$d\tau = \left(\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}}\right)\ dt$$

y r_0 es la posición del cuerpo. Por ende,

$$K^\mu = \frac{m\ c^2}{1 - \frac{r_s}{r_0}}\ \Gamma^\mu_{00}\,(r_0)\,.$$

Como

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\ g^{\mu\gamma}\ \left(g_{\gamma 0,0} + g_{\gamma 0,0} - g_{00,\gamma}\right) = -\frac{1}{2}\ g^{\mu\gamma}\ g_{00,\gamma} = -\frac{1}{2}\ g^{\mu r}\ g_{00,r} = \frac{1}{2}\ g^{\mu r}\ \frac{r_s}{r^2},$$

entonces

$$K^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{G\ m\ M}{r_0^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

0.2 Ejercicio 3

En cuanto al ítem a, en primer lugar notar que

$$r = \bar{r} \ \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2 .$$

Por un lado, se tiene que

$$\frac{dr}{d\bar{r}} = \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)\ \frac{r_s}{2\ \bar{r}} = \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)\ \left(1 - \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right).$$

Por el otro,

$$1 - \frac{r_s}{r} = \frac{r - r_s}{r} = \frac{\bar{r}\ \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2 - r_s}{\bar{r}\ \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2 - \frac{r_s}{\bar{r}}}{\left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^2}.$$

Luego,

$$ds^2 = -c^2\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\ dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\ dr^2 + r^2\ d\Omega^2 = -\left(\frac{1 - \frac{r_s}{4\ \bar{r}}}{1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}}\right)^2\ c^2\ dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{4\ \bar{r}}\right)^4\ \left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\ d\Omega^2\right).$$

En cuanto al b, si $\bar{r} \to \infty$ se tiene que

$$ds^2 \simeq -\left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right)\ c^2\ dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{\bar{r}}\right)\ \left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\ d\Omega^2\right),$$

que coincide con la geometría correspondiente a la región de campo débil.