Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 4

Espacio topológico. Variedad diferenciable. Espacio tangente

Topología

- Espacio topológico : es un par $(\mathbb{E}, \tau)$ donde $\mathbb{E}$ es un conjunto cualquiera, y τ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{E}$ (que puede ser no numerable) con las siguientes propiedades:

i) $\phi, \mathbb{E} \in \tau$

ii) la intersección de un número finito de elementos de τ pertenece a τ

iii) la unión de elementos de τ pertenece a τ

Los elementos de τ son los "abiertos" de $\mathbb{E}$. Se dice que τ es una "topología" sobre $\mathbb{E}$.

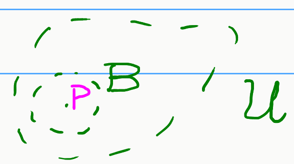
- Ejemplos:

1) Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, y τ el conjunto formado por los intervalos abiertos (a,b) y sus uniones. Esta es la topología "estándar" usual en $\mathbb{R}$.

2) Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$. Los elementos de $\mathbb{E}$ son n-uplas $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$. Se define una "bola" de radio r alrededor de p como el conjunto

$$B_r(p) = \{ q \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2 < r^2 \}$$

Un conjunto $\mathcal{U}$ pertenece a la topología estándar de $\mathbb{R}^n$ si $\forall\, p \in \mathcal{U}\ \exists\, r > 0$ tal que $B_r(p) \subseteq \mathcal{U}$



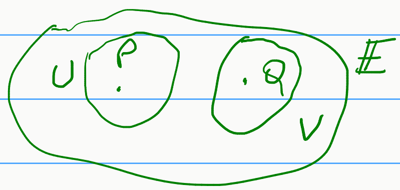
3) sea $\mathbb{E}$ un conjunto cualquiera. $\tau = \{\phi, \mathbb{E}\}$ es la topología "indiscreta" o "caótica".

4) sea $\mathbb{E}$ un conjunto cualquiera. $\tau =$ familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{E}$ es la topología "discreta".

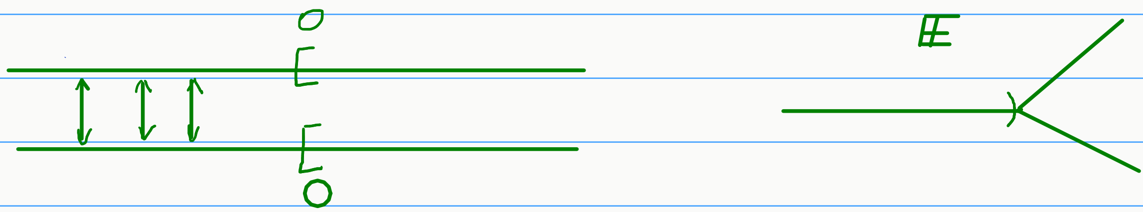
5) Topología "inducida" (heredada): sea $\mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{E}_1$, definimos $\tau_2 = \{ U \cap \mathbb{E}_2 \,/\, U \in \tau_1 \}$ (probar que τ_2 es una topología).
Por ejemplo, la topología usual de $\mathbb{R}^2$ induce una topología sobre una curva en $\mathbb{R}^2$.

▶ Un subconjunto de $\mathbb{E}$ se dice "cerrado" si su complemento es abierto.

▶ Espacio de Hausdorff : un espacio topológico es de Hausdorff si dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{E}$ existen dos abiertos U, V tales que $P \in U$, $Q \in V$ y $U \cap V = \phi$.



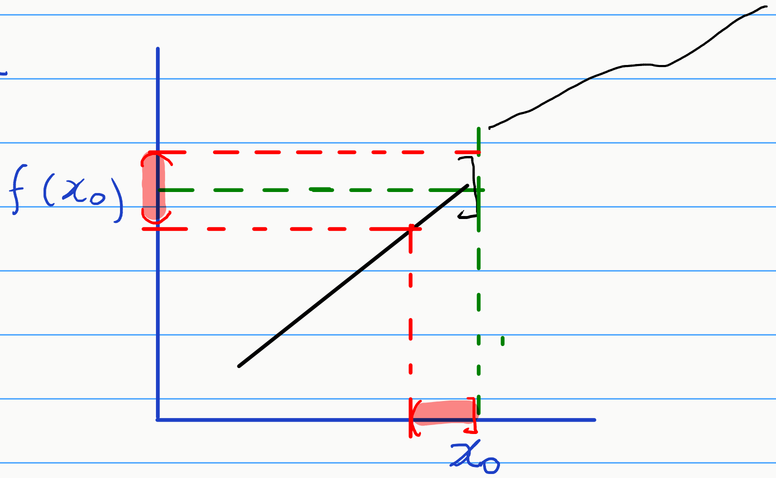
Contraejemplo: consideremos dos rectas reales con la topología usual, y construyamos $\mathbb{E}$ identificando las semirrectas abiertas $x<0$



Todavía $\mathbb{E}$ tiene dos "ceros", y no es posible encontrar dos abiertos con intersección nula tales que cada "cero" está contenido en uno solo de ellos.

Idea de continuidad

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



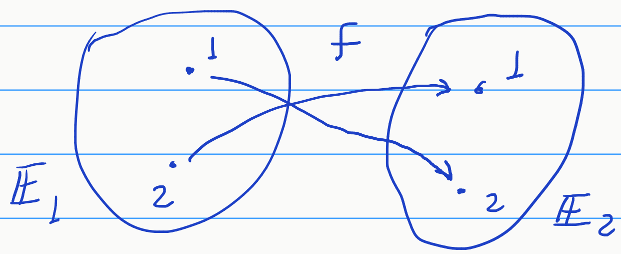
la preimagen de un abierto no es un abierto (con la topología usual de $\mathbb{R}$): la función no es continua.

Función continua: sean (E_1, τ_1) y (E_2, τ_2) dos espacios topológicos. Una función $f: E_1 \to E_2$ se dice continua si la preimagen de todo abierto de τ_2 es un abierto de τ_1.

Teorema: f, g son continuas entonces $g \circ f$ es continua.

Homeomorfismo: es toda biyección bicontinua.

Contraejemplo



$\tau_1 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, E_1\}$ topología discreta

$\tau_2 = \{\phi, E_2\}$ topología indiscreta

f es continua, pero f^{-1} no es continua $\Rightarrow$ f no es homeomorfismo

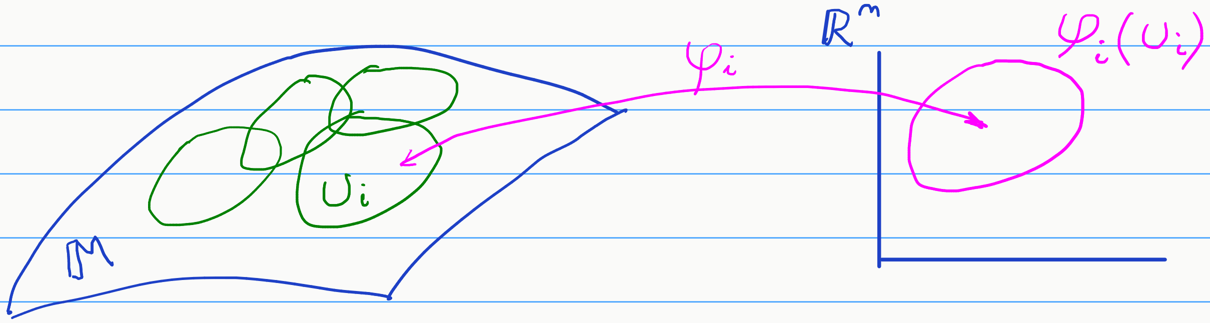
Variedad topológica : una variedad topológica $\mathbb{M}$ ("manifold") de dimensión n es un par $(\mathbb{E}, \{(U_i, \varphi_i)\})$ donde

i) $\mathbb{E}$ es un espacio topológico de Hausdorff

ii) $\{U_i\}$ es un cubrimiento de $\mathbb{E}$ por abiertos

iii) $\varphi_i : \mathbb{E} \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo con la topología de $\varphi_i(U_i)$ inducida por la topología estándar de $\mathbb{R}^n$

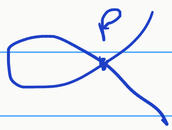
Se suele pedir también que la topología admita una base numerable.



$\boxed{\text{La idea básica es que una variedad topológica es localmente como } \mathbb{R}^n \text{ con su topología estándar, aunque globalmente podrían diferir.}}$

La superficie de una esfera es una variedad topológica de $n=2$.

En cambio la curva

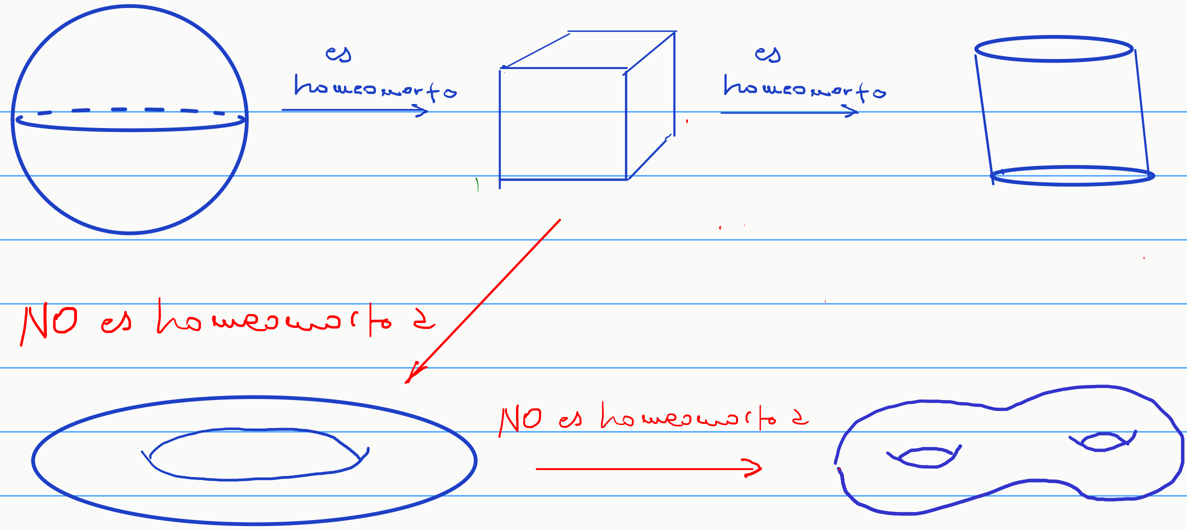


no es una variedad porque el entorno de P no es asimilable a un entorno de $\mathbb{R}$

La Topología estudia las propiedades comunes a espacios que son homemorfos entre sí: conexidad, compacidad, número de "agujeros", etc.

Conexidad: un espacio es conexo si no es unión disjunta de dos abiertos.

Compacidad: un espacio (o subespacio) es compacto si para cualquier cubrimiento por abiertos existe un subcubrimiento finito. En particular $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado (teorema de Heine-Borel).

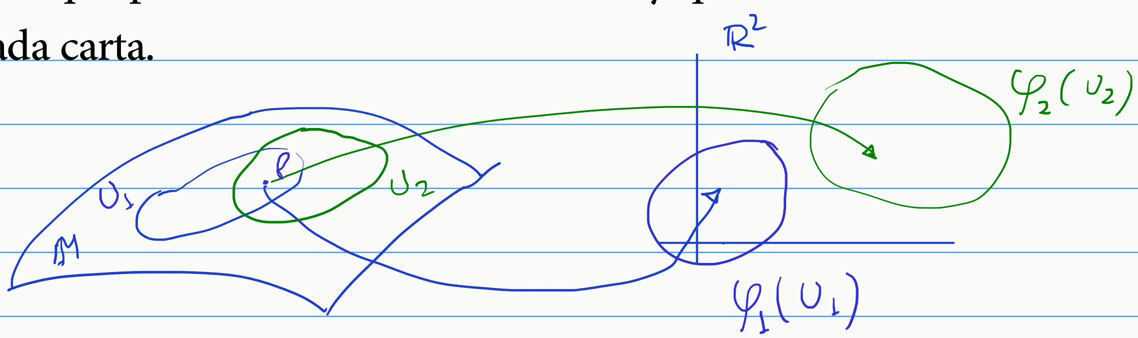


La topología global del toro es distinta a la de la esfera. En cambio, localmente todos estos ejemplos son como $\mathbb{R}^2$ (son espacios topológicos de 2 dimensiones)

- Carta: cada par (U_i, φ_i) es una carta local (una asignación de coordenadas)

- Atlas: es el conjunto de cartas locales $\{(U_i, \varphi_i)\}$ que cubren $\mathbb{M}$.

- Coordenadas : las cartas sirven para asignar coordenadas a cada punto de $\mathbb{E}$. $\varphi_i(P)$ es una n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, que otorga coordenadas a P en la carta (U_i, φ_i). Como los U_i son abiertos, necesariamente se solapan. Así habrá puntos que pertenecen a distintas cartas, y que reciben distintas coordenadas en cada carta.

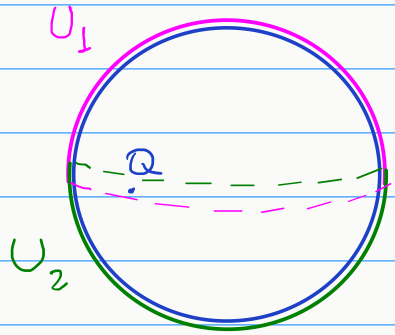


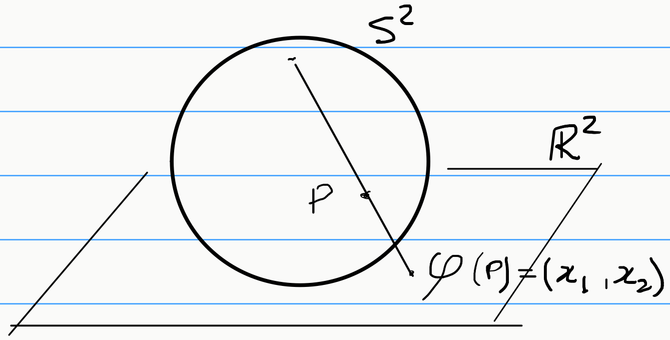
$\varphi_1(P) = (x_1, \dots, x_n)$

$\varphi_2(P) = (y_1, \dots, y_n)$

Si la topología global de la variedad es como la de $\mathbb{R}^n$, entonces es posible cubrir la variedad con una única carta. Pero en general no es así.

Por ejemplo, la esfera S^2 precisa al menos dos cartas (dos abiertos) para cubrirla,





Proyección estereográfica

que se pueden lograr, por ejemplo, con dos proyecciones estereográficas: una desde el Polo Norte y otra desde el Polo Sur.

En la zona de solapamiento de las cartas conviven dos asignaciones de coordenadas: un mismo punto Q es descripto por coordenadas (x_1, x_2) y (y_1, y_2).
Podemos considerar las funciones que describen el cambio de coordenadas:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2) \quad , \quad y_2 = y_2(x_1, x_2)$$

Diremos que las cartas son C^k-relacionadas si existen y son continuas las derivadas parciales de orden k de estas funciones (son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$).

Variedades diferenciables

Variedad C^k: variedad dotada de un "atlas maximal" de cartas C^k-relacionadas.

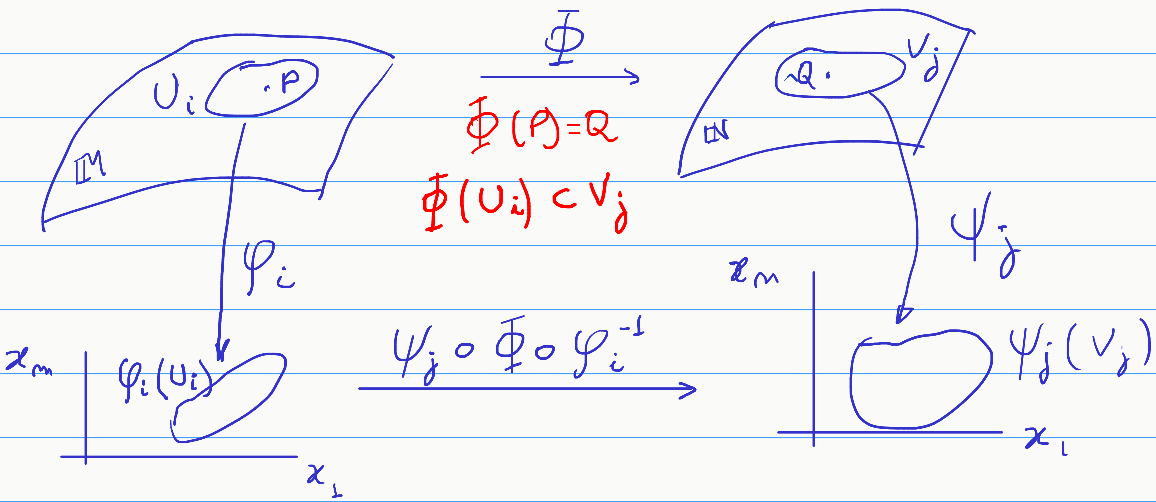
La compatibilidad entre atlas C^k es una relación de equivalencia. La unión de los atlas C^k pertenecientes a una misma clase de equivalencia forma un "atlas maximal C^k", que es la estructura que caracteriza la variedad C^k.

Variedad diferenciable: es una variedad C^∞ de dimensión constante m.

La idea es introducir en la variedad la posibilidad de derivar funciones. Una función definida sobre M puede llevarse a una función en $\mathbb{R}^m$ por medio de las cartas. Allí se la deriva y el resultado puede ser retrotraído a M. Como las cartas son C^k-relacionadas, la diferenciabilidad de una función f definida sobre M no es afectada por la carta usada en el procedimiento.

Difeomorfismo

Sea Φ un mapa continuo entre dos variedades diferenciables $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ de dimensiones m y n.



Diremos que Φ es diferenciable en P si $\forall i,j$ las funciones $\psi_j \circ \Phi \circ \varphi_i^{-1}$ son C^∞ en $\varphi_i(P)$. Como estas funciones están definidas entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, la noción de diferenciabilidad es la usual.

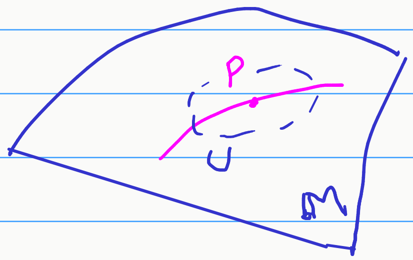
Un difeomorfismo es un mapeo biyectivo y diferenciable entre variedades de igual dimensión, cuya inversa es también diferenciable.
Dos variedades diferenciables se dicen difeomorfas si existe un difeomorfismo entre las mismas, lo cual habla de una equivalencia entre sus estructuras diferenciables.

$\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ podrían ser el mismo espacio topológico con dos atlas maximales distintos. En ese caso el difeomorfismo indicaría la diferenciabilidad de los cambios de coordenadas entre las cartas de uno y otro atlas.

Espacio vectorial tangente

Consideremos una curva sobre una variedad diferenciable

$$x^i = x^i(\lambda) \qquad i = 1, \dots, n$$



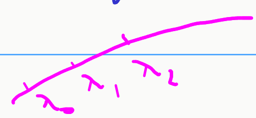
La curva es un objeto geométrico. Sus ecuaciones paramétricas no son más que su realización en $\mathbb{R}^n$ a través de una carta (U, φ).

Como objeto geométrico, la curva es un mapeo

$$\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{M}$$

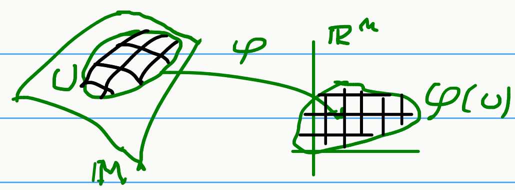
que a cada valor del parámetro real λ le asigna un punto de $\mathbb{M}$.

La curva está constituida tanto por su "recorrido" como por su parametrización.



Supondremos que el mapeo γ es diferenciable en P. Esto significa que las n funciones $x^i(\lambda)$ son diferenciables en $\lambda = \lambda_P$.

Nota: por abuso pensamos las coordenadas como si estuviesen en $\mathbb{M}$



Dada una función $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, queremos ver cómo cambia f sobre la curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} f[x^i(\lambda)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda}$$

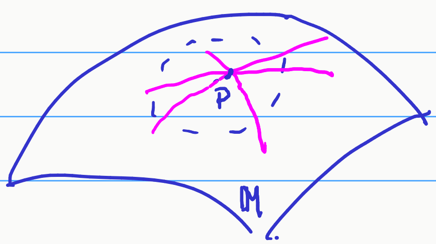
Como la función f es arbitraria, podemos ver el resultado anterior como una relación entre operadores de derivación. En cada punto P de la curva vale que

$$\boxed{\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda_P} = \left.\frac{dx^i}{d\lambda}\right|_{\lambda_P} \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

(usamos la convención de Einstein para la sumatoria)

En el miembro derecho de este resultado el objeto geométrico $d/d\lambda$, la derivación en la dirección de la curva, aparece descompuesto en dos factores dependientes de la carta.

La derivación en la dirección de cualquier curva que pasa por P puede verse como una combinación lineal de las derivadas parciales $\partial/\partial x^i$, que forman así una base para este tipo de derivaciones.



Más aun: cualquier combinación $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ puede verse como una derivación en la dirección de una curva que pasa por P; basta tomar

$$x^i(\lambda) = x^i_P + v^i(\lambda - \lambda_P) + a^i(\lambda-\lambda_P)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dx^i}{d\lambda}\right|_{\lambda_P} = v^i$$

Las derivaciones en la dirección de las curvas que pasan por P forman un espacio vectorial en P, cuya base es $\{\partial/\partial x^i\}$, que llamamos espacio vectorial tangente T_P.

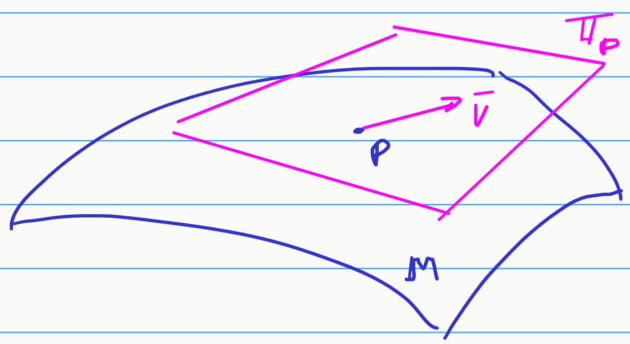
$$\bar{V} \in T_P \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{V} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \quad , \quad v^i \in \mathbb{R}$$

El nombre "tangente" obedece a que las componentes v^i de los vectores de T_P en la base coordenada $\{\partial/\partial x^i\}$ tienen la forma

$$v^i = \left.\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_P}$$

que en un espacio euclidiano serían las componentes del vector tangente a la curva.

Representamos T_P y sus elementos así:



Los vectores son derivaciones. Actúan sobre funciones y dan por resultado números:

$$\bar{V}(f) \in \mathbb{R}$$

El número no es más que la derivada de f en la dirección de $\bar{V}$ en P:

$$\boxed{\bar{V}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_P}$$