Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

# Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

**Profesor: Rafael Ferraro**

**Clase 5**

## Bases anholónomas. 1-formas. Espacio cotangente

Por cierto, deberíamos haber probado que los vectores que integran la base coordenada $\{\partial/\partial x^i\}$, también llamada holónoma, son linealmente independientes.

Es decir, $$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \iff v^i = 0$$

Demostración:

$\Leftarrow$) trivial

$\Rightarrow$) Apliquemos el operador $v^i \partial_i$ a las funciones $x^j$:

$$0 = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} x^j = v^i \delta^j_i = v^j \Rightarrow v^j = 0$$

Las $n$ derivaciones $\partial/\partial x^i$ son linealmente independientes, lo que muestra que $T_p$ tiene dimensión $n$.

Las $\partial/\partial x^i$ son derivaciones en la dirección de las curvas coordenadas.

▶ Campo vectorial: consiste en elegir un $\bar{V} \in T_p$ en cada $P \in M$. En un entorno $U$ escribiremos

$$\bar{V}(x^k) = v^i(x^k) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

▶ Bases anholónomas: no es imprescindible que la base sea coordenada. Cualquier conjunto $\{\bar{E}_a\}_{a=1,\dots,m}$ de $m$ vectores linealmente independientes es una buena base de $T_P$.

Así cualquier vector $\bar{V} \in T_P$ puede ser desarrollado como

$$\bar{V} = v^a \, \bar{E}_a$$

Los propios $\bar{E}_a$ pueden desarrollarse en la base coordenada:

$$\bar{E}_a = e^i_a \, \frac{\partial}{\partial x^i} \, ,$$

entonces: $\bar{V} = v^a e^i_a \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ , es decir $v^i = v^a e^i_a$

Mientras que los vectores de la base coordenada conmutan,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \, ,$$

no sucede lo mismo con los vectores de una base anholónoma:

$$\bar{E}_b(\bar{E}_a(f)) - \bar{E}_a(\bar{E}_b(f)) = \bar{E}_b(e^i_a \, \partial_i f) - \bar{E}_a(e^j_b \, \partial_j f) =$$

$$= e^j_b \, \partial_j (e^i_a \, \partial_i f) - e^i_a \, \partial_i (e^j_b \, \partial_j f) =$$

$$= e^j_b \, \partial_j e^i_a \, \partial_i f - e^i_a \, \partial_i e^j_b \, \partial_j f$$

Si nos deshacemos de $f$:

$$\boxed{\bar{E}_b \bar{E}_a - \bar{E}_a \bar{E}_b = (e^j_b \, \partial_j e^i_a - e^j_a \, \partial_j e^i_b) \, \partial_i}$$

Es importante notar que la distinción entre una base coordenada y una anholónoma requiere conocer el comportamiento de la base en un entorno del punto en cuestión, porque involucra derivadas de la base.

Ejemplo: en el espacio euclidiano de $n=2$ dimensiones solemos usar la base de versores polares:

$$\bar{E}_r = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y} \qquad \bar{E}_\theta = -\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

que es una base anholónoma. La base holónoma asociada a las coordenadas polares es

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y} = \bar{E}_r$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} = r\,\bar{E}_\theta$$

## Transformación de componentes ante cambio de base

Un cambio de base en $T_p$ es una transformación lineal:

$$\boxed{\bar{E}_a = \Lambda^{a'}{}_a \, \bar{E}_{a'}}$$

Un mismo vector $\bar{V}$ puede ser expresado en ambas bases:

$$\bar{V} = v^a \bar{E}_a = v^a \Lambda^{a'}{}_a \bar{E}_{a'} = v^{a'} \bar{E}_{a'}$$

Es decir $\boxed{v^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a v^a}$

En particular el cambio entre bases coordenadas es

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \qquad \text{es decir} \qquad \Lambda^{i'}{}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$$

entonces

$$\boxed{v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, v^i}$$

Los textos que no usan lenguaje geométrico definen vector como una n-upla $v^i$ que ante cambio de coordenadas se transforma como acabamos de ver. Pero debemos enfatizar que no es el vector quien se transforma; el vector es un objeto geométrico, independiente de la carta. Lo que se transforma son sus componentes, debido al cambio de base.

Las coordenadas mismas no se transforman como lo hacen las $v^i$. No hay un vector cuyas componentes sean las coordenadas. El paradigma de vector no es la posición sino la velocidad. En otras palabras, en general $\mathbb{M}$ no es un espacio vectorial.

## Campos vectoriales y líneas de campo

Dado un campo vectorial $\bar{V}(x^k)$, podríamos preguntarnos si es posible encontrar una curva que pase por P, cuyo vector tangente coincida con $\bar{V}(x^k) = v^i(x^k)\,\partial_i$ en cada punto de la curva.

Deberíamos encontrar una curva $x^i = x^i(\lambda)$ que pase por P tal que

$$\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} = v^i(x^k) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Estas ecuaciones son siempre integrables, y tienen solución única (al menos en un entorno de P). La curva así obtenida es la línea de campo de $\bar{V}$ que pasa por P.

# 1-formas. Espacio cotangente

- Las formas diferenciales o 1-formas (también llamadas "covectores") son funciones lineales reales definidas sobre $T_P$,

$$\tilde{\omega} : T_P \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Dado $\bar{V} \in T_P$, es $\tilde{\omega}(\bar{V}) \in \mathbb{R}$.

Notación alternativa: $\tilde{\omega}(\bar{V}) \equiv \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle$

- Linealidad: $\boxed{\tilde{\omega}(\alpha \bar{V} + \beta \bar{U}) = \alpha\, \tilde{\omega}(\bar{V}) + \beta\, \tilde{\omega}(\bar{U})}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \bar{V}, \bar{U} \in T_P$

Al igual que los vectores, las 1-formas son objetos geométricos, independientes de la carta. Asimismo, el número real que resulta de aplicar una 1-forma a un vector es independiente de la carta.

## Espacio dual o cotangente

Para convertir el conjunto de 1-formas en un espacio vectorial debemos definir la combinación lineal de 1-formas. Definimos

$$\langle \alpha \tilde{\omega} + \beta \tilde{\eta}, \bar{V} \rangle \doteq \alpha \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle + \beta \langle \tilde{\eta}, \bar{V} \rangle$$

El espacio vectorial de 1-formas se denomina espacio dual o cotangente en $P$, y se indica $T_P^*$.

En el cálculo con matrices las columnas actúan como vectores y las filas como 1-formas. En ese caso hay una operación que conecta ambos espacios: la trasposición. En nuestro caso no tenemos aún ninguna operación que conecte el espacio tangente con el espacio cotangente.

Veremos cómo se define una base coordenada en $T_P^*$.

## Diferencial de una función

Dada una función $f: M \to R$ definimos una 1-forma que llamaremos el diferencial de f :

$$\boxed{\langle \tilde{d}f, \bar{V} \rangle \equiv \tilde{d}f(\bar{V}) \underset{\text{definición}}{\doteq} \bar{V}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}} \qquad \forall\, \bar{V} \in T_P$$

El número real que resulta de aplicar $\tilde{d}f$ al vector $\bar{V}$ es la derivada de $f$ en la dirección de $\bar{V}$. Si $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \Rightarrow \tilde{d}f(\bar{V}) = \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_P$.

Si $f$ es la i-ésima coordenada de una carta :

$$\langle \tilde{d}x^i, \bar{V} \rangle = v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = v^j \delta^i_j = v^i$$

Lo que permite escribir $\tilde{d}f$ como :

$$\boxed{\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i}$$

En efecto, así resulta :

$$\langle \tilde{d}f, \bar{V} \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i, \bar{V} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \tilde{d}x^i, \bar{V} \rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad ✓$$

La notación puede sugerir que $\tilde{d}f$ es infinitesimal. Pero $\tilde{d}f$ es una 1-forma. Es una "máquina" lineal que espera un vector para dar un número real. Ese número es el valor de la derivada de $f$ en la dirección de $\bar{V}$.

Como las componentes de $\tilde{d}f$ en una base coordenada son $\partial f/\partial x^i$ , $\tilde{d}f$ se emparenta con la noción de gradiente. Como vemos el gradiente no es un vector sino un covector. Para ver el gradiente como vector necesitaremos una estructura adicional que vincule los espacios tangente y cotangente.

De la relación $v^i = \langle \tilde{dx}^i, \bar{v} \rangle = \langle \tilde{dx}^i, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = v^j \langle \tilde{dx}^i, \partial_j \rangle$

también se concluye que

$$\boxed{\langle \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta^i_j}$$

Esta es una relación de dualidad entre las bases coordenadas $\{\partial/\partial x^i\}$ de $T_P$ y $\{\tilde{dx}^i\}$ de $T_P^*$.

Para probar que $\{\tilde{dx}^i\}_{i=1,\dots,n}$ es una base $T_P^*$ debemos ver la independencia lineal de sus elementos; esto es

$$a_i \tilde{dx}^i = 0 \iff a_i = 0 \quad \forall i$$

Demostración:

$\Leftarrow$) trivial

$\Rightarrow$) $0 = \langle a_i \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \langle \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \delta^i_j = a_j$

En general cualquier 1-forma $\tilde{\omega} \in T_P^*$ se puede desarrollar en la base coordenada $\{\tilde{dx}^i\}$:

$$\boxed{\tilde{\omega} = \omega_i \tilde{dx}^i}$$

Nótese la ubicación de los índices

## Base anholónoma dual

La dualidad se puede definir también entre bases anholónomas. n 1-formas linealmente independientes $\{\tilde{E}^a\}$ forman una base de $T_p^*$ dual a la base $\{\bar{E}_a\}$ de $T_p$ si

$$\boxed{\langle \tilde{E}^a , \bar{E}_b \rangle = \delta^a_b}$$

Las $\tilde{E}^a$ se pueden expandir en la base coordenada:

$$\tilde{E}^a = e^a_i \, \tilde{dx}^i$$

Entonces $\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a = \omega_a e^a_i \tilde{dx}^i \Rightarrow \omega_i = \omega_a e^a_i$

Nótese que la dualidad implica que:

$$\boxed{\delta^a_b = \langle \tilde{E}^a , \bar{E}_b \rangle = e^a_i \, e^i_b}$$

Las componentes $\omega_a$ corresponden a aplicar $\tilde{\omega}$ a $\bar{E}_a$:

$$\tilde{\omega}(\bar{E}_b) = \langle \tilde{\omega} , \bar{E}_b \rangle = \langle \omega_a \tilde{E}^a , \bar{E}_b \rangle = \omega_a \underbrace{\langle \tilde{E}^a , \bar{E}_b \rangle}_{\delta^a_b} = \omega_b$$

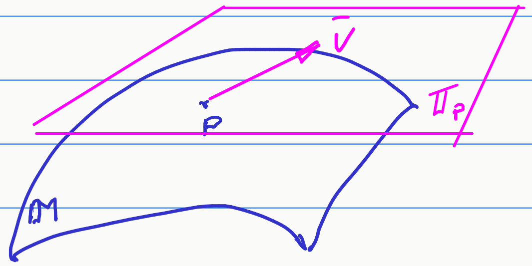
En términos de las respectivas componentes de $\tilde{\omega}$ y $\bar{V}$ es:

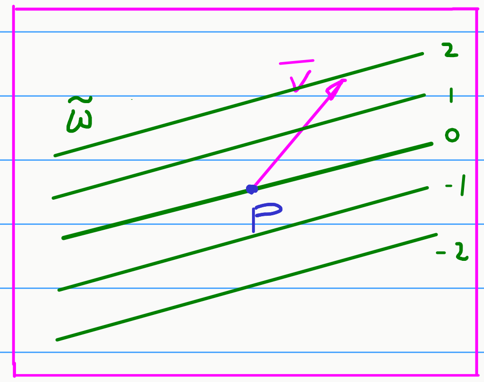
$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \langle \tilde{\omega} , \bar{V} \rangle = \omega_a V^b \langle \tilde{E}^a , \bar{E}_b \rangle = \omega_a V^b \delta^a_b = \omega_a V^a$$

$$\boxed{\langle \tilde{\omega} , \bar{V} \rangle = \omega_a V^a}$$

Nótese que usamos la dualidad

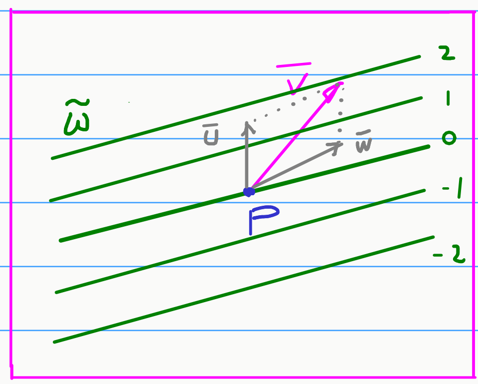
Representación gráfica de una 1-forma: así como un vector se representa con una flecha asociada a la curva sobre la cual opera en forma de derivada, ¿cómo se representa un operador que toma un vector para dar un número?




$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = 2$$

La representación gráfica respeta la linealidad:




$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = 2$$

Por ejemplo:

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{U}+\bar{W})$$

$$= \tilde{\omega}(\bar{U}) + \tilde{\omega}(\bar{W})$$

$$= 1,5 + 0,5 = 2$$

En dimensiones superiores usaremos un conjunto de hipersuperficies planas y paralelas; la hipersuperficie que contiene a P tendrá la etiqueta cero.

Nótese que no podemos representar la 1-forma mediante una flecha porque dos flechas no dan un número. Para que dos vectores den un número precisaríamos un producto interno de vectores, que requiere de un tensor métrico.

- Campo de 1-formas: consiste en elegir una $\tilde{\omega} \in \mathbb{T}_p^*$ en cada $P \in \mathbb{M}$. En un entorno $U$ escribiremos $\tilde{\omega}(x^k) = \omega_i(x^k)\, \tilde{d}x^i$.

- **Normal a una hipersuperficie:** estamos habituados a caracterizar una hipersuperficie (un subespacio de dimensión $n-1$) por medio de un vector normal a la misma. Sin embargo todavía no hemos introducido una noción de perpendicularidad. Por lo tanto la noción de vector normal no existe aún. En cambio podemos definir una **1-forma normal** $\tilde{n}$ tal que resulta cero cuando es aplicada a vectores tangentes a la hipersuperficie.

- Transformación de componentes ante cambio de base

Un cambio de base en $\mathbb{T}_p$ es $\bar{E}_a = \Lambda^{a'}{}_a\, \bar{E}_{a'}$

¿Cómo debe ser el cambio de base en $\mathbb{T}_p^*$ para preservar la dualidad entre las bases de $\mathbb{T}_p$ y $\mathbb{T}_p^*$ ?

Sea $\tilde{E}^a = \Lambda^a{}_{a'}\, \tilde{E}^{a'}$

enseguida veremos por qué se justifica usar el mismo símbolo $\Lambda$

La dualidad requiere que

$$\delta^a_b = \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = \langle \Lambda^a{}_{a'}\, \tilde{E}^{a'}, \Lambda^{b'}{}_b\, \bar{E}_{b'} \rangle =$$

$$= \Lambda^a{}_{a'}\, \Lambda^{b'}{}_b\, \underbrace{\langle \tilde{E}^{a'}, \bar{E}_{b'} \rangle}_{\delta^{a'}_{b'}} = \Lambda^a{}_{a'}\, \Lambda^{a'}{}_b$$

$\boxed{\Lambda^a{}_{a'} \text{ es la inversa de } \Lambda^{a'}{}_a}$

también vale que
$\delta^{a'}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_a\, \Lambda^a{}_{b'}$

Una misma 1-forma $\tilde{\omega}$ puede ser expresada en distintas bases:

$$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a = \omega_a \Lambda^a{}_{a'} \tilde{E}^{a'} = \omega_{a'} \tilde{E}^{a'}$$

Es decir $\boxed{\omega_{a'} = \Lambda^a{}_{a'} \, \omega_a}$ o también $\boxed{\Lambda^{a'}{}_a \, \omega_{a'} = \omega_a}$

▷ Casos particulares

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \underbrace{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}}_{\Lambda^{i'}{}_i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \underbrace{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}}_{\Lambda^{i'}{}_j} \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \Lambda^i{}_{i'} \Rightarrow \boxed{\tilde{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \tilde{d}x^{i'}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \omega_i}$$

---

$$\bar{E}_a = \underbrace{e^i_a}_{\Lambda^i{}_a} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \tilde{E}^a = \underbrace{e^a_i}_{\Lambda^a{}_i} \tilde{d}x^i$$

---

Históricamente los covectores o 1-formas fueron llamados "vectores covariantes", porque sus componentes se transforman como los vectores de la base de $T_p$, mientras que los vectores eran llamados "vectores contravariantes". Estas denominaciones oscurecen el carácter de estos objetos. Las componentes de los vectores y covectores se transforman de manera inversa a sus respectivas bases para garantizar que se comporten como objetos geométricos, independientes de cartas y de bases.