

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 6

Tensores. p-formas. Áreas y volúmenes

Tensores

La relación $\langle \tilde{\omega}, \bar{v} \rangle = \omega_a v^a$,

y en particular $\langle \tilde{E}^a, \bar{v} \rangle = v^a$, $\langle \tilde{\omega}, \bar{E}_a \rangle = \omega_a$,

puede verse de dos maneras:

i) $\tilde{\omega}$ es una "máquina" lineal que espera un vector para dar un número $\tilde{\omega}: T_p \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}(\bar{v}) \in \mathbb{R}$

ii) pero también podríamos decir que \bar{v} es una máquina lineal que espera una 1-forma para dar un número:

$$\bar{v}: T_p^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{v}(\tilde{\omega}) \in \mathbb{R}$$

Entonces podemos definir máquinas lineales más generales, que tengan entradas ("ranuras") para varios vectores y 1-formas. Cuando estas ranuras se completan, la máquina da un número. Esta es la idea de "tensor". Un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ tiene r entradas o ranuras para 1-formas y s ranuras para vectores.

► Tensor: un tensor T es una aplicación lineal

$$T: \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ factores}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ factores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Las 1-formas son tensores $\binom{0}{1}$, y los vectores son tensores $\binom{1}{0}$.

Linealidad: $T(\dots, \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}, \dots) = \alpha T(\dots, \bar{v}, \dots) + \beta T(\dots, \bar{u}, \dots)$

para cualquier ranura de vectores, y lo mismo para cualquier ranura de 1-formas.

Podemos definir combinaciones lineales de tensores del mismo tipo para hacer de ellos un espacio vectorial en P :

$$\left(\alpha T_1 + \beta T_2 \right) (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) \doteq \alpha T_1 (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) + \beta T_2 (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s)$$

► Producto tensorial: a partir de vectores y 1-formas podemos construir tensores de rango más alto mediante el producto tensorial \otimes . Por ejemplo, $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ es un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ definido como:

$$\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{\eta}, \bar{U}) = \bar{V}(\tilde{\eta}) \tilde{\omega}(\bar{U}) = \langle \tilde{\eta}, \bar{V} \rangle \langle \tilde{\omega}, \bar{U} \rangle = V^a \omega_b \eta_a U^b$$

En particular $\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{E}^a, \bar{E}_b) = V^a \omega_b$

Son los componentes de $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$

Siempre se obtienen los componentes saturando las ranuras con elementos de las bases: $\bar{V}(\tilde{E}^a) = \langle \tilde{E}^a, \bar{V} \rangle = V^b \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = V^a$, etc.

De hecho alcanza con saber cómo actúa un tensor sobre los elementos de las bases de Π_P y Π_P^* para saber cómo actúa sobre cualquier colección de entradas (por linealidad).

Nótese que $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ se puede desarrollar en términos de sus componentes $V^a \omega_b$:

$$\bar{V} \otimes \tilde{\omega} = V^a \omega_b \bar{E}_a \otimes \tilde{E}^b$$

En efecto $\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{\eta}, \bar{U}) = V^a \omega_b \bar{E}_a(\tilde{\eta}) \tilde{E}^b(\bar{U}) = V^a \omega_b \eta_a U^b$

- Espacio vectorial $\Pi_s^r(\rho)$: está formado por los tensores de tipo $\binom{r}{s}$ en ρ . Por lo que acabamos de ver, cualquier tensor $\binom{r}{s}$ puede expresarse como

$$T = T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s} \bar{E}_{b_1} \otimes \dots \otimes \bar{E}_{b_r} \otimes \tilde{E}^{a_1} \otimes \dots \otimes \tilde{E}^{a_s}$$

donde los componentes $T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$ se obtienen como

$$T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s} = T(\tilde{E}_{a_1}, \dots, \tilde{E}_{a_s}; \bar{E}^{b_1}, \dots, \bar{E}^{b_r})$$

Vemos que $\Pi_s^r(\rho)$ es un producto tensorial de espacios:

$$\Pi_s^r(\rho) = \underbrace{\Pi_\rho \otimes \dots \otimes \Pi_\rho}_r \otimes \underbrace{\Pi_\rho^* \otimes \dots \otimes \Pi_\rho^*}_s$$

Dimensión: como cada factor tiene dimensión n , la dimensión de $\Pi_s^r(\rho)$ es n^{r+s} . En efecto, cada tensor está caracterizado por n^{r+s} componentes $T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$.

- Transformación de las componentes ante cambio de base

$$\bar{E}_b = \Lambda^b_{b'} \bar{E}_{b'}, \quad \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}_a \tilde{E}^a, \quad \text{entonces}$$

$$T^{b'_1 \dots b'_r}_{a'_1 \dots a'_s} = \Lambda^{b'_1}_{b_1} \dots \Lambda^{b'_r}_{b_r} \Lambda^{a_1}_{a'_1} \dots \Lambda^{a_s}_{a'_s} T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$$

- Contracción de índices: es una operación que consiste en igualar uno de los índices superiores (o contravariantes) con uno de los índices inferiores (o covariantes) y sumar las componentes que así resultan. Veamos que

la contracción de índices produce un tensor de tipo $\begin{pmatrix} r-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$. Por ejemplo, si en la expresión anterior contraemos el último índice contravariante con el primero covariante resulta

$$T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s} = \Lambda^{b_1}_{b_1} \dots \Lambda^{a_1}_{b_r} \Lambda^{a_1}_{a_1} \dots \Lambda^{a_s}_{a_s} T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$$

$\delta^{a_1}_{b_r}$

Entonces

$$T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s} = \underbrace{\Lambda^{b_1}_{b_1} \dots \Lambda^{b_{r-1}}_{b_{r-1}}}_{r-1 \text{ factores}} \Lambda^{a_2}_{a_2} \dots \Lambda^{a_s}_{a_s} T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s}$$

$s-1 \text{ factores}$

que es la ley de transformación de un tensor $\begin{pmatrix} r-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$. Como vemos, la contracción está bien definida porque los componentes del tensor se refieren a bases duales.

Ejemplos:

1) Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ se transforman según

$$T_{a'b'} = \Lambda^{a'}_{a'} \Lambda^{b'}_{b'} T_{ab} \quad \text{ó} \quad T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij}$$

2) si T^{ab}_{cde} son las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces T^{ab}_{cbe} son componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $T^{ab}_{cde} A^{fg}$ es un tensor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (producto tensorial), y $T^{ab}_{cde} A^{fc}$ es un tensor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (contracción). $T^{ab}_{cde} A^{fd}$ es otro tensor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, salvo si existe una simetría $T^{ab}_{cde} = T^{ab}_{dce}$ entre las componentes del tensor T.

▶ **Entradas simétricas:** dos ranuras del mismo tipo se dicen simétricas si la máquina lineal es indiferente al intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T(\tilde{\xi}, \tilde{\omega}, \tilde{\eta}) = T(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}), \quad \forall \tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$$

entonces la segunda y tercera ranuras son simétricas. En componentes queda:

$$T^{abc} \epsilon_a \omega_b \eta_c = T^{abc} \epsilon_a \eta_b \omega_c \quad \forall \tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$$

$$\underbrace{T^{abc} \epsilon_a \eta_b \omega_c}_{T^{acb} \epsilon_a \eta_c \omega_b} \quad (i \text{ son índices mudos!})$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{abc} = T^{acb}}$$

▶ **Entradas antisimétricas:** dos ranuras del mismo tipo se dicen antisimétricas si el resultado de la máquina lineal cambia de signo ante el intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T(\tilde{\xi}; \tilde{v}, \tilde{u}) = -T(\tilde{\xi}; \tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{\xi}, \tilde{u}, \tilde{v}$$

En componentes queda

$$T^a{}_{bc} \epsilon_a v^b u^c = - \underbrace{T^a{}_{bc} \epsilon_a u^b v^c}_{T^{ac}{}_{cb} \epsilon_a u^c v^b}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^a{}_{bc} = -T^a{}_{cb}}$$

A partir de un tensor cualquiera podemos definir nuevos tensores simetrizando o antisimetrizando grupos de índices del mismo tipo. Estas operaciones se indican con $()$ y $[\]$ respectivamente. Por ejemplo:

$$T \dots \dots (ab) \dots \dots \doteq \frac{1}{2} \left(T \dots \dots \dots ab \dots \dots + T \dots \dots \dots ba \dots \dots \right)$$

$$T \dots \dots [ab] \dots \dots \doteq \frac{1}{2} \left(T \dots \dots \dots ab \dots \dots - T \dots \dots \dots ba \dots \dots \right)$$

Ejercicio: probar que las cantidades anteriores transforman como componentes de un tensor.

En general, si simetrizamos o antisimetrizamos un grupo de p índices del mismo tipo, habrá que combinar $p!$ términos que corresponden a las $p!$ permutaciones de estos índices. En la simetrización todos los términos se combinan con signo positivo, y el resultado se divide por $p!$

En la antisimetrización cada término se combina con signo positivo o negativo según si proviene de una permutación par o impar; el resultado se divide por $p!$. Por ejemplo:

$$T \dots [abc] \dots = \frac{1}{6} \left(T \dots abc \dots - T \dots acb \dots + T \dots bca \dots - T \dots bac \dots + T \dots cba \dots - T \dots cab \dots \right)$$

$T \dots a_1 \dots a_s$ se dice totalmente simétrica en sus índices covariantes si $T \dots a_1 \dots a_s = T \dots (a_1 \dots a_s)$. Análogamente para el caso antisimétrico.

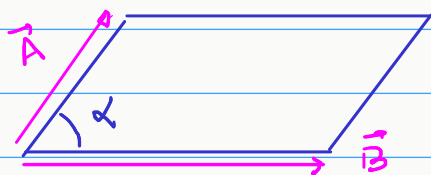
Ejercicios:

i) Mostrar que $T^{\dots ab\dots} = \frac{1}{2} (T^{\dots (ab)\dots} + T^{\dots [ab]\dots})$

ii) Si $S^{\dots ab\dots} = S^{\dots ba\dots}$ y $A^{\dots ab\dots} = -A^{\dots ba\dots}$
 mostrar que $S^{\dots ab\dots} A^{\dots ab\dots} = 0$.

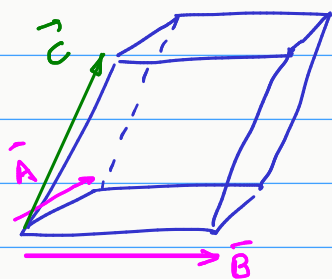
iii) Si $S^{\dots abc\dots} = S^{\dots (abc)\dots}$, entonces para cualquier T vale que
 $S^{\dots abc\dots} T^{\dots abc\dots} = S^{\dots abc\dots} T^{\dots (abc)\dots}$
 (idem para el caso antisimétrico)

► Áreas y volúmenes: No tenemos aún nociones de área y volumen en una variedad. Si recurrimos a las nociones respectivas en espacios euclidianos vemos que las mismas se vinculan a máquinas lineales completamente antisimétricas,



$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



$$\text{Volumen} = |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$$

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

Esto nos motiva a dedicar especial atención a los tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ totalmente antisimétricos.

p-formas

- ▶ Llamamos **p-formas** a los tensores $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétricos. Decimos que **p** es el **rango** de la forma.
- ▶ Como las componentes que tienen dos índices iguales deben anularse, las únicas componentes no nulas tendrán todos los índices distintos; por lo tanto debe ser **$p \leq m$** .
- ▶ La dimensión del espacio de p-formas es igual al número de componentes independientes que éstas pueden tener. Esto es igual al número de maneras de elegir **p** índices distintos entre **m**, pues las distintas componentes que comparten los mismos índices en distinto orden están ligadas por la antisimetría. La dimensión entonces es $\binom{m}{p}$.

Ejemplos:

i) Las 0-formas son las funciones $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

ii) El espacio de m-formas tiene dimensión 1. La única componente independiente de una m-forma $\tilde{\omega}$ es $\omega_{12\dots m}$. Las restantes se obtienen por antisimetría.

Para comenzar, consideremos una 2-forma en una variedad de dimensión 2:

$$\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 + \omega_{21} \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1 = \omega_{12} (\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1)$$

$$\hookrightarrow \omega_{21} = -\omega_{12}$$

La expresión obtenida muestra que es útil definir el producto tensorial totalmente antisimetrizado o producto "wedge" entre 1-formas:

$$\boxed{\tilde{E} \wedge \tilde{\eta} \doteq \tilde{E} \otimes \tilde{\eta} - \tilde{\eta} \otimes \tilde{E}} \implies \boxed{\tilde{E} \wedge \tilde{\eta} = -\tilde{\eta} \wedge \tilde{E}}$$

$\tilde{E}, \tilde{\eta}$ son 1-formas

que es un producto asociativo:

$$(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma} - \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\gamma} + \dots, \text{ (3! términos)}$$

El ejemplo anterior muestra que una p-forma cualquiera se escribe

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_{|a_1 \dots a_p|} \tilde{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{a_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p} \tilde{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{a_p} \end{aligned}$$

donde $\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}$ son las componentes de $\tilde{\omega}$.

Las barras verticales en la primera línea significa que la suma se extiende sólo a los términos tales que $a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Por ejemplo, para una 2-forma en 2 dimensiones es

$$\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 + \omega_{21} \tilde{E}^2 \wedge \tilde{E}^1)$$

Si no usamos las barras verticales repetiremos $p!$ veces cada término de la suma; de ahí que sea necesario dividir por $p!$. Pero este factor no es parte del valor de la componente. Para convencernos, calculemos el

valor de una componente saturando las entradas de la p-forma con los elementos de la base. En el ejemplo de la 2-forma la componente 21 es

$$\begin{aligned}\omega_{21} &= \tilde{\omega}(\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2(\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12} (\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1)(\bar{E}_2, \bar{E}_1) \\ &= \omega_{12} \left(\underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_2)}_0 \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_1)}_0 - \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_2)}_1 \underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_1)}_1 \right) = -\omega_{12} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Si $\tilde{\omega}$ es una p-forma y $\tilde{\eta}$ es una q-forma entonces

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = (-1)^{pq} \tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}$$

En particular,

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0 \quad \text{si } \tilde{\omega} \text{ es de rango impar}$$

Demostración)

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \omega_{|i_1 \dots i_p|} \eta_{|i_{p+1} \dots i_{p+q}|} \tilde{E}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{i_p} \wedge \tilde{E}^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{i_{p+q}}$$

Para construir $\tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}$ los últimos q factores \tilde{E}^i deben pasar adelante, atravesando los primeros p factores \tilde{E}^i . Son $p \cdot q$ permutaciones, y cada una de ellas produce un cambio de signo.

Ejercicio: calculemos el producto wedge entre una 1-forma y una 2-forma, y expresemos las componentes de la 3-forma resultante.

$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a$ es una 1-forma de componentes ω_a

$\tilde{\eta} = \frac{1}{2} \eta_{bc} \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$ es una 2-forma de componentes η_{bc}

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \frac{1}{2} \omega_a \eta_{bc} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c = \frac{1}{3!} \left(\frac{3!}{2} \right) \omega_{[a} \eta_{bc]} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$$

sólo la parte antisimétrica contribuye a la suma

$$\Rightarrow \boxed{(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{abc} = 3 \omega_{[a} \eta_{bc]}}$$

En general, para una p-forma $\tilde{\omega}$ y una q-forma $\tilde{\eta}$ es

$$\boxed{(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{a_1 \dots a_{p+q}} = \binom{p+q}{p} \omega_{[a_1 \dots a_p} \eta_{a_{p+1} \dots a_{p+q}]}}$$

pues habrá que multiplicar y dividir por $(p+q)!$ para aislar la componente.

Ejemplo del ejercicio anterior: $\tilde{\omega} = 7 \tilde{d}x - 5 \tilde{d}y$, $\tilde{\eta} = 13 \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z$

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = 7 \times 13 \underbrace{\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z}_0 - 5 \times 13 \tilde{d}y \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z = 65 \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$$

$$(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 65$$

Comparemos con $(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 3 \omega_{[1} \eta_{23]} = \frac{3}{3!} (\omega_1 \eta_{23} - \omega_1 \eta_{32} + \omega_2 \eta_{31} - \omega_2 \eta_{13} + \omega_3 \eta_{12} - \omega_3 \eta_{21}) = -\frac{3 \cdot 2}{3!} \omega_2 \eta_{13} = 65 \checkmark$