0.1. Ejercicio 1

Llamando

$$x^{\mu} = (c\ t,\ x,\ y,\ z) \tag{1}$$

y

$$x^{\mu'} = (c\ t,\ r,\ \varphi,\ z)\,, \tag{2}$$

se tiene que

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (c\ t)}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial x} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial y} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5}$$

se tiene que

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{6}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}. \tag{7}$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de coordenadas queda

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Por otro lado, la matriz de transformación inversa está dada por

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (c\ t)}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial r} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial \varphi} & \frac{\partial (c\ t)}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial (c\ t)} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Sabiendo que

$$x = r\ \cos\varphi, \tag{10}$$

$$y = r\ \sin\varphi, \tag{11}$$

se tiene que

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\ \sin\varphi \end{cases} \tag{12}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\ \cos\varphi \end{cases}. \tag{13}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -r\ \sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & r\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

El tensor métrico en las nuevas variables está dado por

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \; \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \; g_{\mu\nu}, \tag{15}$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Este se puede de forma matricial como

$$g' = \Lambda^t \; g \; \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -r \; \sin\varphi & r \; \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -r \; \sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & r \; \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Teniendo en cuenta que todas estas matrices están escritas en bloque, basta con hacer la multiplicación

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r \; \sin\varphi & r \; \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \; \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \; \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

obteniendo finalmente

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

El elemento de línea en polares queda escrito entonces de la siguiente manera

$$dl^2 = g_{i'j'} \; dx^{i'} \; dx^{j'} = dr^2 + r^2 \; d\varphi^2 + dz^2 \tag{20}$$

que es lo esperado.

Con esto queda resuelto el ítem a.

En cuanto al ítem b, para transformar las componentes cartesianas V^i de un vector a la base polar a la base polar basta con usar la ecuación

$$V^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{i} \; V^i, \tag{21}$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta la Ecuación (8) se tiene que

$$\begin{pmatrix} V^r \\ V^\varphi \\ V^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix}, \tag{22}$$

o bien, escribiendo la matriz de transformación en términos de las variables polares,

$$\begin{pmatrix} V^r \\ V^\varphi \\ V^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Dado que

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \frac{\cos\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

y que

$$V^r \; \overline{e}_r + V^\varphi \; \overline{e}_\varphi + V^z \; \overline{e}_z = V^x \; \overline{e}_x + V^y \; \overline{e}_y + V^z \; \overline{e}_z, \tag{27}$$

los versores cartesianos se pueden escribir en términos de la base coordenada polar de la siguiente manera

$$\overline{e}_x = \cos\varphi \; \overline{e}_r - \frac{\sin\varphi}{r} \; \overline{e}_\varphi, \tag{28}$$

$$\overline{e}_y = \sin\varphi \; \overline{e}_r + \frac{\cos\varphi}{r} \; \overline{e}_\varphi, \tag{29}$$

$$\overline{e}_z = \overline{e}_z. \tag{30}$$

Análogamente, se pueden escribir los vectores de la base coordenada polar en términos de los versores cartesianos llegando a

$$\overline{e}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; \overline{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \; \overline{e}_y, \tag{31}$$

$$\overline{e}_\varphi = -y \; \overline{e}_x + x \; \overline{e}_y, \tag{32}$$

$$\overline{e}_z = \overline{e}_z. \tag{33}$$

Esta base no es de versores usando el producto escalar dado por el tensor métrico, ya que no está normalizada. En efecto,

$$g\left(\overline{e}_\varphi, \overline{e}_\varphi\right) = g_{\varphi\varphi} = r^2 \neq 1. \tag{34}$$

Con esto queda terminado el ítem b.
Para el ítem c, la cuadridivergencia del vector en la base cartesiana resulta

$$\partial_x V^x + \partial_y V^y = 2 \; x. \tag{35}$$

En la base polar, en primer lugar notar que

$$V^x = r^2 \tag{36}$$

y

$$V^y = \alpha \; r \; \cos\varphi. \tag{37}$$

Luego, de acuerdo a la Ecuación (23) se tiene que

$$\begin{gathered} \partial_r V^r + \partial_\varphi V^\varphi = \partial_r \left(\cos\varphi \; V^x + \sin\varphi \; V^y\right) + \partial_\varphi \left(-\tfrac{\sin\varphi}{r} \; V^x + \tfrac{\cos\varphi}{r} \; V^y\right) \\ = \partial_r \left(r^2 \; \cos\varphi + \alpha \; r \; \cos\varphi \; \sin\varphi\right) + \partial_\varphi \left(-r \; \sin\varphi + \alpha \; \cos^2\varphi\right) = 2 \; r \; \cos\varphi + \alpha \; \cos\varphi \; \sin\varphi - r \; \cos\varphi - 2 \; \alpha \; \cos\varphi \; \sin\varphi \\ = \left(r - \alpha \; \sin\varphi\right) \; \cos\varphi. \end{gathered} \tag{38}$$

Por ende, se llega al mismo resultado ya que

$$2 \; x \neq \left(r - \alpha \; \sin\varphi\right) \; \cos\varphi. \tag{39}$$

En general, para ver como transforma la divergencia de un vector se tiene que

$$\begin{gathered} \partial_{\mu'} V^{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \; \partial_\nu \left(\Lambda^{\mu'}_{\;\;\mu} \; V^\mu\right) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \; \Lambda^{\mu'}_{\;\;\mu} \; \partial_\nu V^\mu + \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \; \left(\partial_\nu \Lambda^{\mu'}_{\;\;\mu}\right) \; V^\mu = \delta^\nu_\mu \; \partial_\nu V^\mu + \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \; \left(\partial_\nu \Lambda^{\mu'}_{\;\;\mu}\right) \; V^\mu \\ = \partial_\mu V^\mu + \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \; \left(\partial_\nu \Lambda^{\mu'}_{\;\;\mu}\right) \; V^\mu. \end{gathered} \tag{40}$$

Luego, si la matriz de transformación no es constante, la divergencia de un vector no es invariante, es decir, no es un escalar.

0.2. Ejercicio 2

Para el ítem a, conviene escribir $c \; t$ y x en términos de u y v obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{c} c \; t = \frac{1}{\sqrt{2}} \; (v - u) \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \; (v + u) \end{array} \right. . \tag{41}$$

Por lo tanto,

$$ds^2 = -c^2 \; dt^2 + dx^2 = -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \; (dv - du)\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \; (dv + du)\right]^2 = \frac{1}{2} \; \left[(dv + du)^2 - (dv - du)^2\right] = 2 \; du \; dv. \tag{42}$$

En cuanto al ítem b, se tiene que

$$\begin{aligned} ds^2 = -c^2\ dt^2 + dx^2 &= -\left[d\xi\ \sinh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) + \tfrac{a}{c}\ \xi\ \cosh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta\right]^2 + \left[d\xi\ \cosh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) + \tfrac{a}{c}\ \xi\ \sinh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta\right]^2 \\ &= d\xi^2\ \cosh^2\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) + \tfrac{a^2}{c^2}\ \xi^2\ \sinh^2\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta^2 - d\xi^2\ \sinh^2\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) - \tfrac{a^2}{c^2}\ \xi^2\ \cosh^2\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta^2 \\ &\quad -\tfrac{a^2}{c^2}\ \xi^2\ d\eta^2 + d\xi^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Para responder el ítem c, notar que

$$x^2 - c^2\ t^2 = \xi^2. \tag{44}$$

Por lo tanto, como $\xi^2 > 0$, la región del espacio tiempo que se cubre está dada por

$$|c\ t| \leq |x|\,. \tag{45}$$

En el ítem d, diferenciando las ecuaciones de cambio de coordenadas se obtiene

$$\begin{cases} c\ dt = d\xi\ \sinh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) + \tfrac{a}{c}\ \xi\ \cosh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta \\ dx = d\xi\ \cosh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right) + \tfrac{a}{c}\ \xi\ \sinh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta \end{cases}. \tag{46}$$

Por lo tanto, es fácil ver que

$$d\xi = dx\ \cosh\left(\frac{a}{c}\ \eta\right) - c\ dt\ \sinh\left(\frac{a}{c}\ \eta\right) = \frac{1}{\xi}\ \left(x\ dx - c\ t\ dt\right) = \frac{1}{2\ \xi}\ d\left(x^2 - c\ t^2\right). \tag{47}$$

Como en el problema 1 la línea del universo describe una curva que tiene $x^2 - c\ t^2$ constante, entonces

$$d\xi = 0 \tag{48}$$

y por ende $\xi = \xi_0$ es constante.
Por otro lado, reemplazando este resultado en (46) se tiene que

$$\begin{cases} c\ dt = \tfrac{a}{c}\ \xi_0\ \cosh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta \\ dx = \tfrac{a}{c}\ \xi_0\ \sinh\left(\tfrac{a}{c}\ \eta\right)\ d\eta \end{cases} \tag{49}$$

y por lo tanto

$$\frac{a^2}{c^2}\ \xi_0^2\ d\eta^2 = c^2\ dt^2 - dx^2. \tag{50}$$

Como $dy = 0$ y $dz = 0$ (esto último vale ya que $v = 0$), se llega a que

$$\frac{a^2}{c^2}\ \xi_0^2\ d\eta^2 = -ds^2 = \frac{d\tau^2}{c^2} \tag{51}$$

y por lo tanto

$$\tau = \frac{a\ \xi_0}{c^2}\ \eta. \tag{52}$$