Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2020

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 7

Derivada exterior. Formas cerradas y exactas. Lema de Poincaré

Los tensores son objetos geométricos; son máquinas lineales que se aplican a vectores y 1-formas para dar números que son independientes de la carta o de la base elegida para hacer el cálculo correspondiente. Queremos definir una derivación de tensores que preserve su carácter de objeto geométrico. En general esto no será posible, a menos que dotemos a la variedad de una estructura adicional para lograr ese propósito. Sin embargo es posible definir un cálculo diferencial e integral de p-formas con las estructuras propias de las variedades diferenciables.

▶ Derivada exterior de p-formas: habíamos definido un operador d que se aplica a una función f (una 0-forma) para dar la 1-forma $\tilde{d}f$:

$$d : \mathbb{T}^0_0 \longrightarrow \mathbb{T}^0_1 \quad \text{tal que} \quad \tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \tilde{d}x^i$$

Podemos generalizarlo a p-formas de la siguiente manera:

$$d : \mathbb{T}^0_p \longrightarrow \mathbb{T}^0_{p+1}$$

Dada una p-forma $\quad \tilde{\omega} = \frac{1}{p!}\, \omega_{jk\ldots l}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^l$

Definimos la $(p+1)$-forma

$$\boxed{\tilde{d}\omega = \frac{1}{p!}\, \partial_i\, \omega_{jk\ldots l}\, \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^l}$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\, \underbrace{\left\{(p+1)\, \partial_{[i}\, \omega_{jk\ldots l]}\right\}}_{\text{Componentes}}\, \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^l$$

Una definición operativa, como la dada para $\widetilde{d\omega}$, <u>NO</u> es satisfactoria mientras no se demuestre que el objeto así definido se comporta como una $(p+1)$-forma, cosa que haremos enseguida.

Ejemplo: sea la 1-forma $\tilde{A} = A_j \widetilde{dx^j}$. Entonces

$$\widetilde{dA} = \partial_i A_j \, \widetilde{dx^i} \wedge \widetilde{dx^j} = \partial_i A_j \left(\widetilde{dx^i} \otimes \widetilde{dx^j} - \widetilde{dx^j} \otimes \widetilde{dx^i} \right)$$

$$= \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i \right) \widetilde{dx^i} \otimes \widetilde{dx^j}$$

lo que muestra que las componentes de $\widetilde{dA}$ son $\partial_i A_j - \partial_j A_i$.
Este resultado se obtiene también así:

$$\widetilde{dA} = \partial_i A_j \, \widetilde{dx^i} \wedge \widetilde{dx^j} = \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ 2\, \partial_{[i} A_{j]} \right\}}_{\text{componentes}} \widetilde{dx^i} \wedge \widetilde{dx^j}$$

$$(\widetilde{dA})_{ij} = 2\, \partial_{[i} A_{j]} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

Si $\tilde{A}$ es el cuadripotencial electromagnético (en $n=4$) entonces la 2-forma $\tilde{F} = \widetilde{dA}$ es el tensor de campo electromagnético.

Para ver que la definición operativa de $\widetilde{d\omega}$ da por resultado un objeto geométrico, demostraremos que la definición es independiente de la carta. Por simplicidad lo veremos para el caso p=1, pero el procedimiento es fácilmente generalizable a valores superiores de p.

Demostración: sea $\tilde{\omega} = \omega_i \, \tilde{dx}^i = \omega_{i'} \, \tilde{dx}^{i'}$

Entonces

$$\partial_{i'} \omega_{j'} \, \tilde{dx}^{i'} \wedge \tilde{dx}^{j'} = \partial_{i'} \left(\omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \right) \tilde{dx}^{i'} \wedge \tilde{dx}^{j'} =$$

$$= \left(\partial_{i'} \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \omega_j \underbrace{\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}}_{\text{¡simétrico en } i'j'!} \right) \tilde{dx}^{i'} \wedge \tilde{dx}^{j'}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \tilde{dx}^{i'} \wedge \tilde{dx}^{j'} = \partial_i \omega_j \, \tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j \quad \checkmark$$

Vemos que el resultado es tensorial gracias a que restringimos la derivación a tensores totalmente antisimétricos.

Ejemplos:

1) Sea una 1-forma $\tilde{\omega}$ en una variedad de $m = 3$ dimensiones

$$\tilde{\omega} = \omega_x \tilde{dx} + \omega_y \tilde{dy} + \omega_z \tilde{dz}$$

$$\tilde{d}\omega = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \underbrace{\tilde{dx} \wedge \tilde{dx}}_{0} + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \tilde{dy} \wedge \tilde{dx} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \tilde{dz} \wedge \tilde{dx}$$

$$+ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \underbrace{\tilde{dy} \wedge \tilde{dy}}_{0} + \ldots$$

$$+ \ldots$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} + \ldots$$

En este caso $\tilde{d}\omega$ se asocia con la noción de rotor. Pero no es un vector sino una 2-forma.

2) Sea una 2-forma $\tilde{\omega}$ en una variedad de $n=3$ dimensiones

$$\tilde{\omega} = \omega_{xy}\, \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \omega_{xz}\, \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} + \omega_{yz}\, \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

$$\tilde{d\omega} = \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z}\, \tilde{dz} \wedge \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y}\, \tilde{dy} \wedge \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} + \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x}\, \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \right) \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

En este caso $\tilde{d\omega}$ se asocia con la noción de divergencia. Pero no es un escalar sino una 3-forma.

▶ Nilpotencia de la derivada exterior: se satisface que

$$\boxed{d^2 \doteq d\, d \equiv 0}$$

Por ejemplo:

$$d^2 f = d\left(\partial_j f\, \tilde{dx}^j\right) = \underbrace{\partial_i \partial_j f}_{\text{simétrico}}\; \overbrace{\tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j}^{\text{antisimétrico}} = 0$$

De acuerdo a los ejemplos anteriores, la nilpotencia abarca propiedades como $\text{rot}(\text{grad}) \equiv 0$, $\text{div}(\text{rot}) \equiv 0$.

Otras propiedades:

i) $\tilde{d}(\tilde{\omega} + \tilde{\eta}) = \tilde{d}\omega + \tilde{d}\eta$

ii) $d(f\,g) = f\,\tilde{d}g + g\,\tilde{d}f$

iii) $d(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}) = \tilde{d}\omega \wedge \tilde{\eta} + (-1)^p\, \tilde{\omega} \wedge \tilde{d}\eta$ $\qquad$ $\tilde{\omega}$ es una p-forma

El $(-1)^p$ aparece porque luego de derivar la componente de $\tilde{\eta}$, $\partial_i \eta_{jk\ldots}\, \tilde{d}x^i$, hay que enviar hacia atrás el $\tilde{d}x^i$ atravesando los p factores $\tilde{d}x^l$ asociados a $\tilde{\omega}$.

Como podemos ver, la derivada exterior de p-formas tiene las propiedades esperadas para una derivación: linealidad y regla de Leibniz.

Formas exactas y cerradas

i) una p-forma se dice exacta si se puede escribir como la derivada exterior de una (p-1)-forma:

$\tilde{\alpha}$ es exacta $\Rightarrow$ $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\beta$

ii) una p-forma se dice cerrada si su derivada exterior se anula:

$\tilde{\alpha}$ es cerrada $\Rightarrow$ $\tilde{d}\alpha = 0$

Toda p-forma exacta es también cerrada, debido a la nilpotencia de d. La cuestión inversa es más interesante.

Supongamos que un conjunto de ecuaciones diferenciales fue condensado en una única ecuación entre p-formas,

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\eta}$$

donde $\tilde{\omega}$ es una (p-1)-forma incógnita. Una ecuación así podría tratarse de la relación entre un campo $\tilde{\omega}$ y su fuente $\tilde{\eta}$; o entre un potencial $\tilde{\omega}$ y su respectivo campo $\tilde{\eta}$. La nilpotencia de d implica que para que la ecuación tenga solución es condición necesaria que $\tilde{\eta}$ sea cerrada; en efecto

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\eta} \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\eta} = d\, d\tilde{\omega} = 0$$

Aun si la condición necesaria se cumple, no hay garantía de que exista la solución. La solución $\tilde{\omega}$ existe si la forma cerrada $\tilde{\eta}$ es además exacta.

- $\tilde{\omega}$ no es única: $\tilde{\omega} + d\tilde{\alpha}$ es también solución $\forall$ (p-2)-forma $\tilde{\alpha}$.

Ejemplo: $p = 1$, $n = 2$

sean las ecuaciones $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \eta_x$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \eta_y$

que se resumen en

$$d\tilde{f} = \tilde{\eta}$$

La condición necesaria para que exista solución f es

$$d\tilde{\eta} = 0 = d\left(\eta_x \tilde{dx} + \eta_y \tilde{dy}\right) = \left(\frac{\partial \eta_y}{\partial x} - \frac{\partial \eta_x}{\partial y}\right) \tilde{dx} \wedge \tilde{dy}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \eta_y}{\partial x} = \frac{\partial \eta_x}{\partial y}}$$

que corresponde a la igualdad de las derivadas cruzadas de f

¿Es suficiente que $\tilde{\eta}$ sea cerrada para que resulte también exacta? (es decir, para que nuestra ecuación diferencial tenga solución).

Puede sorprender que esta cuestión involucre la topología global de la variedad. En efecto, la respuesta es SÍ localmente. Pero la existencia de una solución global depende de la topología global de la variedad.

Pongamos esta cuestión en términos más familiares:

El campo $\vec{B} = \frac{a}{r}\,\hat{\theta}$ está definido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

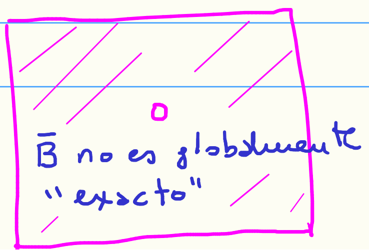
y tiene $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ (es el campo magnético de un hilo)

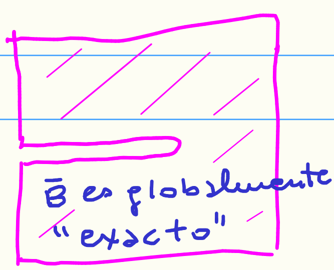
Que el rotor de un gradiente se anule siempre no significa que el campo irrotacional $\vec{B}$ se pueda escribir como $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi$ para un potencial escalar ϕ ("que $\tilde{\eta}$ sea cerrada no significa que sea exacta").

Si suponemos que podemos escribir $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi$ entonces tendríamos

$$\phi = \int \vec{B}\cdot\vec{d\ell} + cte = a\,\theta + cte$$

Pero θ no es una función univaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.
El potencial ϕ sólo queda definido localmente en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.
Para tener solución global hay que cambiar la topología global de la variedad.





Esto no quita que para otros campos sí exista un potencial escalar bien definido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por ejemplo

$$\vec{E} = \frac{a}{r^2}\,\hat{r} \Rightarrow \phi = -\frac{a}{r} + cte$$

Un ejemplo aún más simple: si $n=1$ cualquier 1-forma es cerrada (no hay 2-formas en $n=1$) ¿Es también globalmente exacta?

Sea $\tilde{d}f = x\,\tilde{d}x \Rightarrow f = \frac{x^2}{2} + cte$ (localmente)

Si $\mathbb{M}$ fuera un anillo f no estaría globalmente bien definida.

▷ Cohomología: estudia las propiedades topológicas globales de la variedad que determinan las relaciones entre formas exactas y cerradas.

▷ Lema de Poincaré

Para algunos autores el lema de Poincaré es la propiedad $d(\tilde{d}\omega) = 0$, y llaman "lema de Poincaré inverso" a lo que sigue.

En un entorno contraíble a un punto, una solución particular de $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$ es

$$\boxed{\omega_{j\dots k}(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 t^{p-1}\,\eta_{ij\dots k}(t x^1, \dots, t x^n)\, x^i\, dt}$$

donde p es el grado de $\tilde{\eta}$.

Esto significa que la solución global existe cuando la variedad entera es contraíble a un punto.

Nótese que el argumento de $\tilde{\eta}$ en el integrando va al origen cuando $t \to 0$.

Ejercicio: demostrar la expresión anterior para el caso p=1 (ayuda: no olvidar utilizar que $\tilde{\eta}$ debe ser cerrada). Ver solución en la última hoja.

Ejemplo: sea $\widetilde{d\omega} = y\,\widetilde{dx} + x\,\widetilde{dy}$ en $n=2$

entonces $\omega = \int_0^1 (t\,y\,x + t\,x\,y)\,dt = xy$

Definición: un conjunto de m 1-formas linealmente independientes,

$$\tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\alpha}^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\alpha}^m \neq 0,$$

se dice "cerrado" si

$$\widetilde{d\alpha}^k \wedge \tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\alpha}^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\alpha}^m = 0 \quad \forall k$$

Teorema de Frobenius: $\{\tilde{\alpha}^i\}_{i=1,\ldots,m}$ es cerrado si y sólo si existen funciones $\{P^i_j, Q^j\}$ tales que

$$\tilde{\alpha}^i = \sum_{j=1}^{m} P^i_j\,\widetilde{dQ}^j \qquad \forall i$$

Esta es una de las varias formas en las que se presenta este teorema, y es útil para el caso en que un sistema de ecuaciones diferenciales puede reformularse como la anulación de m 1-formas independientes $\tilde{\alpha}^i$. En ese caso las ecuaciones se satisfacen sobre la subvariedad donde las Q^j son constantes.

Ejemplo: si $m=1$ el teorema queda $\tilde{v} \wedge \widetilde{dv} = 0 \iff \tilde{v} = P\,\widetilde{dQ}$

En dimensión $n=2$ siempre resulta $\tilde{v}\wedge\tilde{d}\tilde{v}=0$ (no hay 3-formas)

Entonces en $n=2$ toda 1-forma $\tilde{v}$ se puede escribir como

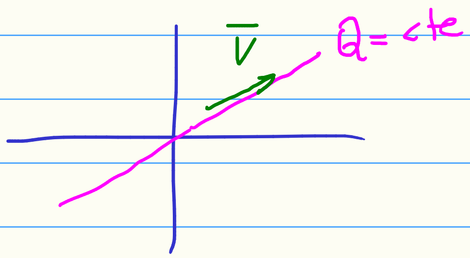
$$\tilde{v}=P\,\tilde{d}Q \qquad (\text{en } n=2)$$

Por ejemplo, el campo de velocidades de una rotación rígida

$$\tilde{v}=\Omega\left(-y\,\tilde{d}x+x\,\tilde{d}y\right)$$

$$\Rightarrow \quad P=\Omega x^2 \;,\quad Q=\frac{y}{x}$$

¿Qué significa que $\tilde{v}$ se anula sobre el subespacio $Q=cte.$?



$\tilde{v}$ se anula cuando se aplica a un vector tangente a ese subespacio. Esos vectores son radiales mientras que $\tilde{v}$ "es azimutal".

▶ Ejemplo: las ecuaciones para las líneas de campo de $\bar{V}(x)=v^i(x)\,\partial_i$ son

$$\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}=v^i(x) \qquad i=1,\dots,n$$

que pueden verse como la anulación de n 1-formas linealmente independientes $\tilde{\alpha}^i=\tilde{d}x^i-v^i(x)\,\tilde{d}\lambda$ en un espacio de $n+1$ dimensiones con coordenadas x^i,λ.

El conjunto $\{\tilde{\alpha}^i\}$ es cerrado pues las $\tilde{d}\alpha^i$ son 2-formas; luego $\tilde{d}\alpha^k \wedge \tilde{\alpha}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\alpha}^m$ sería una $(m+2)$-forma, que se anula automáticamente en un espacio de dimensión $m+1$. Por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene solución.

Solución del Ejercicio. Queremos ver que $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$; entonces derivemos la 0-forma ω:

$$\omega = \int_0^1 [\eta_1(tx, ty)\, x + \eta_2(tx, ty)\, y]\, dt$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \int_0^1 \left\{ \eta_1(tx, ty) + \left[\frac{\partial \eta_1(X,Y)}{\partial X} X\right]_{\substack{X = tx \\ Y = ty}} + \left[\frac{\partial \eta_2(X,Y)}{\partial X} Y\right]_{\substack{X = tx \\ Y = ty}} \right\} dt$$

Ahora usemos que $\tilde{\eta}$ es cerrada: $\dfrac{\partial \eta_2}{\partial X} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial Y}$

Entonces

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t\, \eta_1(tx, ty)\right] dt = \left[t\, \eta_1(tx, ty)\right]_0^1 = \eta_1(x, y)$$

Del mismo modo es $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \eta_2(x, y)$

Entonces $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$ ✓