Constante Cosmológica, redshifts, distancias y nuestro universo

Facundo Rost

Clase 18/11 - Relatividad General - 2do cuatrimestre 2020

Resumen

Índice

1. Constante cosmológica

1.1. Energía del vacío

Fuente: Carroll sección 4.5.

En física no gravitatoria, el ***cero*** de energía nunca es relevante, ya que da igual considerar V o $V + V_0$ como potencial: Sólo importan las diferencias de energía.

Pero **en gravitación** (en Relatividad General (R.G.)) **sí importa el *cero*** de la energía, porque las ecuaciones de Einstein son $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$, dependen del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ y no de su diferencia con otro tensor.

Luego podemos explorar la posibilidad de que haya ***energía del vacío***: Una energía que siempre esté presente en espacios vacíos. El **tensor de energía-momento** que corresponde a esta energía de vacío debe ser **invariante de Poincaré** en coordenadas localmente inerciales (es decir, en relatividad especial (R.E.)), ya que su efecto no debe cambiar con el sistema de referencia inercial: Debe ser constante (homogéneo) e invariante de Lorentz, de forma que su único efecto en R.E. sea cambiar el *cero* de energía (lo cual no es físicamente relevante en R.E.).

Denotando a coordenadas localmente inerciales con índices $\hat{\mu}, \hat{\nu}$, la métrica en estas coordenadas es Minkowski: $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Observamos que como el tensor de energía momento $T^{(\text{vac})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debe ser constante e invariante ante Lorentz, no queda otra que tenga la pinta

$$T^{(\text{vac})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \propto \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{1}$$

Porque todo tensor $(0, 2)$ invariante de Lorentz debe ser proporcional a $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Dado que sus componentes deben ser constantes, esa constante de proporcionalidad debe ser justamente constante. Como $T^{(\text{vac})}_{00} = \rho_{\text{vac}}$ =cte es igual a la densidad de energía, se tiene:

$$T^{(\text{vac})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\rho_{\text{vac}}\ \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{2}$$

Ahora bien, para pasar esto a una carta genérica que puede ser un sistema de referencia no inercial, debemos considerar que por el principio de acople mínimo, sólo debemos reemplazar $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \longrightarrow g_{\mu\nu}$. Luego, en una carta genérica, el tensor de energía momento del vacío se escribe:

$$T^{(\text{vac})}_{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}}\ g_{\mu\nu} \tag{3}$$

Comparando esta expresión con el tensor de energía-momento de un fluido ideal:

$$T^{(\text{ideal})}_{\mu\nu} = (\rho_{\text{vac}} + p_{\text{vac}})\ U_\mu U_\nu + p_{\text{vac}}\ g_{\mu\nu}\,, \tag{4}$$

se puede identificar al **vacío** $T^{(\text{vac})}_{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}}\ g_{\mu\nu}$ como un **fluido ideal con ecuación de estado:**

$$p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}} = \text{cte} \iff w_{\text{vac}} = -1 \tag{5}$$

Luego, interpretando al vacío como un fluido ideal que se añade a la materia presente, las ecuaciones de Einstein quedan (siendo $\kappa \equiv \dfrac{8\pi G}{c^4}$):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k\ T^{(\mathrm{tot})}_{\mu\nu} = \kappa\ T^{(M)}_{\mu\nu} + \kappa\ T^{(\mathrm{vac})}_{\mu\nu} \\ \Longleftrightarrow\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa\ (T^{(M)}_{\mu\nu} - \rho_{\mathrm{vac}}\ g_{\mu\nu}) \\ \Longleftrightarrow\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \underbrace{\kappa\ \rho_{\mathrm{vac}}}_{\equiv \Lambda}\ g_{\mu\nu} = \kappa\ T^{(M)}_{\mu\nu} \\ \Longleftrightarrow\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = \kappa\ T^{(M)}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6}$$

Definimos a la **constante cosmológica** $\Lambda \equiv \kappa\ \rho_{\mathrm{vac}}$.

Como vemos de la última expresión, podemos también interpretar al vacío como un término que está siempre presente del lado izquierdo, hayan o no hayan fuentes de materia M (no vacía).

En particular, observamos de tomar traza de la última ecuación (o sea, multiplicarla por $g^{\mu\nu}$ sumando los índices μ, ν), lo siguiente (siendo D la dimensión del espacio-tiempo, y $T^{(M)} \equiv g^{\mu\nu}\ T^{(M)}_{\mu\nu}$ la traza del tensor de energía-momento, que para un fluido ideal da $T^{(M)} = -\rho +$ $+ (D-1)p$):

$$\begin{aligned} R - \frac{D}{2}(R - 2\Lambda) = \kappa\ T^{(M)} \\ \Longleftrightarrow\ \frac{(D-2)}{2}\ R = D\ \Lambda - \kappa\ T^{(M)} \\ \Longleftrightarrow\ R = \frac{2}{(D-2)}\ \left(D\ \Lambda - \kappa\ T^{(M)}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Constante en Lagrangiano: Comentar en clase, ver Carroll 4.5

Problema de la cte cosmológica: Comentar en clase, ver Carroll 4.5

1.2. Soluciones en vacío

Consideremos que $T^{(M)}_{\mu\nu} = 0$, o sea que no hay materia, sólo hay vacío. Tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ R_{\mu\nu} = \frac{R}{D}\ g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{8}$$

donde se usó $(R - 2\Lambda)/2 = R/D$ pues $T^{(M)} = 0$. Obs.: De lo último, notar que $R =$cte en M.

Recordemos que una variedad de dimensión D era maximalmente simétrica (ver clase 21/10) si y sólo si $R_{\rho\sigma\mu\nu} = \dfrac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$ con R = escalar de Ricci = cte en M. En particular, esto implica que $R_{\mu\nu} = \dfrac{R}{D}\ g_{\mu\nu}$, que es exactamente las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica!!

Esto nos dice que **los espacios maximalmente simétricos Lorentzianos** con escalar de Ricci $R = \dfrac{2D}{(D-2)}\ \Lambda =$cte **resuelven automáticamente las ecuaciones de Einstein**

en vacío con constante cosmológica Λ. De hecho, son (localmente) las únicas soluciones a dichas ecs.

Como (en parte) vimos en la clase del 21/10 en la que estudiamos simetría maximal: Las variedades con métrica (M, g) maximalmente simétricas simplemente conexas con signatura Lorentziana y dimensión D se **clasifican** en:

1.2.1. Espacio de Minkowski

$\mathbb{R}^{1,D-1} = \mathbb{M}_{1,D-1}$. Posee $R = 0$ =cte, es un espacio plano. Se corresponde a la constante cosmológica $\Lambda = 0$ trivial.

La métrica en esa carta es la de Minkowski: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Pero hay cartas en las que la métrica de este espacio se ve distinta:

- **Universo de Milne**: Métrica FLRW con $k = -1$ y $a(t') = ct'$.

- **Coordenadas Rindler**: Ver wikipedia/otra fuente.

1.2.2. Espacio de Sitter dS_D

Lo podemos ver como

$$dS_n = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^{1,D} \ : \ \vec{X}^{\,2} = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (\cdots) + (X^D)^2 = l^2 = \text{cte} > 0\} \tag{9}$$

embebido en $\mathbb{R}^{1,D} = \mathbb{M}_{1,D}$ (Minkowski).

Posee $R = \dfrac{D(D-1)}{l^2} = \text{cte} > 0$ **curvatura positiva**. Se corresponde a la **constante cosmológica positiva** $\Lambda = \dfrac{(D-2)}{2D} R = \dfrac{(D-1)(D-2)}{2\, l^2} > 0 \iff l = \sqrt{\dfrac{(D-1)(D-2)}{2\, \Lambda}}$.

Parametrizemos ese espacio (9) en términos de coordenadas $(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$, o sea expresemos $\vec{X} = \vec{X}(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ como:

$$\begin{aligned}
&X^0 = l\ \sinh\left(\frac{ct}{l}\right)\\
&X^1 = l\ \cosh\left(\frac{ct}{l}\right)\ \cos(\chi)\\
&(X^2, X^3, \cdots, X^D) = l\ \cosh\left(\frac{ct}{l}\right)\ \sin(\chi)\ \underbrace{\Big(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \cdots, \sin(\theta_1)(\cdots)\sin(\theta_{D-2})\Big)}_{\in S^{D-2}}
\end{aligned} \tag{10}$$

de forma que sí o sí ocurra que $\vec{X}^{\,2} = l^2$ como en (9).

Notar que los ángulos $\theta_1, \cdots, \theta_{D-2}$ parametrizan una **esfera** S^{D-2} de radio 1.

En particular, para $D = 4$, esos puntos suspensivos de la última fórmula se pueden ignorar con total seguridad, y los parámetros son $(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2}) = (t, \chi, \theta_1, \theta_2) = (t, \chi, \theta, \varphi)$.

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta queda de la forma (ejer: mostrarlo, aunque sea para $D = 4$)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + l^2 \cosh^2\left(\frac{ct}{l}\right) \underbrace{\left(d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2_{D-2}\right)}_{= d\Omega^2_{D-1}} \tag{11}$$

Siendo $d\Omega^2_{D-2}$ la métrica de una esfera S^{D-2} [1].

O sea, queda como una **métrica FLRW con** $k = +1$ **y factor de escala**

$$a(t) = l \ \cosh\left(\frac{ct}{l}\right) = l \ \cosh\left(\sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \ \cdot \ ct\right) \tag{13}$$

Esta carta **cubre todo dS,** completo, ya que las geodésicas son completas. Luego topológicamente tiene la pinta de $\mathbb{R} \times S^{D-1}$ (o sea lo podemos deformar a eso).

Como en toda carta con métrica FLRW $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \ d\ell^2_k$ [2], podemos reparametrizar la coordenada temporal $t \to \eta$ al **tiempo conforme** de forma tal que $d\eta = \dfrac{cdt}{a(t)} \iff \eta = \displaystyle\int \frac{cdt}{a(t)}$. Luego usando $a(\eta) d\eta = cdt$, la métrica es $ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\ell^2_k\right)$, o sea es conforme a la métrica $-d\eta^2 + d\ell^2_k$ (que para $k = 0$ es Minkowski en particular) [3].

---

[1] La **métrica de una esfera** S^n de radio 1, parametrizada con $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ la podemos escribir como

$$d\Omega_n = d\theta_1^2 + \sin^2(\theta_1)\Big(d\theta_2^2 + \sin^2(\theta_2)\Big(d\theta_3^2 + (\cdots)\Big)\Big) \tag{12}$$

O sea, una métrica diagonal con componentes $g_{ii} = \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2(\theta_j)$, con $1 \leq i \leq n$. Si tiene radio $R \implies ds^2 = R^2 \ d\Omega_n$.

[2] **Recordar:** $d\ell^2_k$ es la métrica de un **espacio homogéneo e isótropo** (maximalmente simétrico) de dimensión $D-1$, signatura riemanniana (pues es **puramente espacial**), de curvatura (espacial) k:

$$d\ell^2_k = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2_{D-2} \tag{14}$$

Podemos elegir la normalización de la coordenada r con el cambio de variable $r \to r' = |k|^{1/2} \ r$ (renormalizando $a(t) \to a_{\text{nuevo}}(t) = a(t)|k|^{-1/2}$, que ahora tiene escala (a diferencia de la nueva coordenada r'), luego es el factor de escala), de forma que $k = -1, 0, 1$.

Podemos también hacer un cambio de coordenadas $d\chi = \dfrac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \iff r = f_k(\chi)$, y la métrica $d\ell^2_k$ queda:

$$d\ell^2_k = d\chi^2 + f_k^2(\chi) \ d\Omega^2_{D-2} \tag{15}$$

con $f_k(\chi) = \begin{cases} \chi \ \text{ si } k = 0 \\ \sin(\chi) \ \text{ si } k = +1 \\ \sinh(\chi) \ \text{ si } k = -1 \end{cases}$

[3] Lo que tiene de bueno el tiempo conforme es que las geodésicas nulas (rayos de luz) deben verificar $ds^2 = 0 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\ell^2_k\right) \iff d\eta^2 = d\ell^2_k$, sin que aparezca el factor de escala (a diferencia del tiempo t no conforme). En particular, para rayos de luz radiales: $d\eta^2 = d\ell^2_k = d\chi^2$, o sea en el plano (η, χ) los **rayos de luz son conos a** $45°$

Haciendo la cuenta $\eta = \displaystyle\int \frac{cdt}{a(t)}$ para el factor de escala de dS (con $k=+1$), da (por tablas, eligiendo ya un valor de la cte de integración): $\eta(t) = 2\ \arctan\left(\tanh\left(\frac{ct}{2l}\right)\right) \iff \tan(\eta/2) = \tanh\left(\frac{ct}{2l}\right) \iff \cosh(ct/l) = 1/\cos(\eta)$ (mostrar esto último es feo), y la métrica de dS queda $ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\ell^2_{k=+1}\right)$ con $a(\eta) = \frac{l}{\cos(\eta)}$. O sea queda conforme a $-d\eta^2 + d\ell^2_{k=+1}$, que es el universo estático de Einstein.

Podíamos obtener **otras posibles coordenadas** si parametrizábamos ese espacio (9) en términos de coordenadas $(t, r, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$, o sea expresemos $\vec{X} = \vec{X}(t, r, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ como:

$$\begin{aligned}
X^0 &= \sqrt{l^2 - r^2}\ \sinh\left(\frac{ct}{l}\right)\\
X^1 &= \sqrt{l^2 - r^2}\ \cosh\left(\frac{ct}{l}\right)\\
(X^2, X^3, \cdots, X^D) &= r\ \underbrace{\Big(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \cdots, \sin(\theta_1)(\cdots)\sin(\theta_{D-2})\Big)}_{\in S^{D-2}}
\end{aligned} \tag{16}$$

de forma que sí o sí ocurra que $\vec{X}^{\,2} = l^2$ como en (9). Nuevamente, los ángulos $\theta_1, \cdots, \theta_{D-2}$ parametrizan una esfera S^{D-2} de radio 1. En particular, para $D=4$, esos puntos suspensivos de la última fórmula se pueden ignorar con total seguridad, y los parámetros son $(t, r, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2}) = (t, r, \theta_1, \theta_2) = (t, r, \theta, \varphi)$.

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta queda de la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/l^2} + r^2 d\Omega^2_{D-2} \tag{17}$$

Notar: $\frac{r^2}{l^2} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}\ r^2$. Notar: **La métrica resulta estática**. Hay una singularidad falsa en $r = l$, pues ya vimos otras coordenadas en las que no hay problemas ahí.

Por último, **otras posibles coordenadas** para dS_D son:

$$\begin{aligned}
X^0 &= l\ \sinh\left(\frac{ct}{l}\right) + \frac{r^2 e^{ct/l}}{2l}\\
X^1 &= l\ \cosh\left(\frac{ct}{l}\right) - \frac{r^2 e^{ct/l}}{2l}\\
(X^2, X^3, \cdots, X^D) &= e^{ct/l}\ r\ \underbrace{\Big(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \cdots, \sin(\theta_1)(\cdots)\sin(\theta_{D-2})\Big)}_{\in S^{D-2}}
\end{aligned} \tag{18}$$

de forma que sí o sí ocurra que $\vec{X}^{\,2} = l^2$ como en (9). Nuevamente, los ángulos $\theta_1, \cdots, \theta_{D-2}$ parametrizan una esfera S^{D-2} de radio 1. En particular, para $D=4$, esos puntos suspensivos de la última fórmula se pueden ignorar con total seguridad, y los parámetros son $(t, r, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2}) = (t, r, \theta_1, \theta_2) = (t, r, \theta, \varphi)$.

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta es:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + e^{2ct/l}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2}\right) \tag{19}$$

O sea como una **métrica FLRW** con $k = 0$ (i.e. **espacialmente plana), y con factor de escala** $a(t) = e^{H_0 t}$ y **parámetro de Hubble** $H_0 = \dfrac{c}{l} = c\sqrt{\dfrac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}}$ que es **constante**. O sea **las distancias espaciales crecen exponencialmente con el tiempo**. Esta carta no cubre toda la variedad.

También, pasando al tiempo conforme en la anterior métrica $\eta = \displaystyle\int \frac{cdt}{a(t)} = \int e^{-ct/l}cdt = -l\ e^{-ct/l} + \eta_\infty$ con cte de integración η_∞, la métrica de dS queda $ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\ell^2_{k=0}\right) = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + dx^i dx^i\right)$ con $a(\eta) = \dfrac{l}{(\eta_\infty - \eta)}$. Ésta métrica es conformalmente plana (conforme a Minkowski, o sea a un espacio plano).

También hay un open slicing, una carta en la que la métrica es FLRW con $k = -1$ y $a(t) = l\ \sinh(ct/l)$. Y **auunn hay más!**: https://en.wikipedia.org/wiki/De_Sitter_space.

Porqué hay **distintas cartas con distintos** k? Preguntar en clase

de Sitter, aplicaciones, swampland: Comentar en clase.

1.2.3. Espacio Anti de Sitter AdS_D

Lo podemos ver como

$$AdS_D = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^{2,D-1}\ :\ \vec{X}^{\ 2} = -(X^0)^2 - (X^1)^2 + (X^2)^2 + (\cdots) + (X^D)^2 = -l^2 = \text{cte} < 0\} \tag{20}$$

un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{2,D-1}$ (Notar que hay dos direcciones temporales en $\mathbb{R}^{2,D-1}$).

Posee $R = -\dfrac{D(D-1)}{l^2} = \text{cte} < 0$ **curvatura negativa**. Se corresponde a la **constante cosmológica negativa** $\Lambda = \dfrac{(D-2)}{2D}\ R = -\dfrac{(D-1)(D-2)}{2\ l^2} < 0 \iff l = \sqrt{-\dfrac{(D-1)(D-2)}{2\ \Lambda}}$.

Parametrizemos ese espacio (20) en términos de coordenadas $(t, \rho, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$, o sea expresemos $\vec{X} = \vec{X}(t, \rho, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ como:

$$\begin{aligned}
&X^0 = l\ \cosh(\rho)\ \sin\left(\frac{ct}{l}\right)\\
&X^1 = l\ \cosh(\rho)\ \cos\left(\frac{ct}{l}\right)\\
&(X^2, X^3, \cdots, X^D) = l\ \sinh(\rho)\ \underbrace{\Big(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \cdots, \sin(\theta_1)(\cdots)\sin(\theta_{D-2})\Big)}_{\in\ S^{D-2}}
\end{aligned} \tag{21}$$

de forma que sí o sí ocurra que $\vec{X}^{\ 2} = -l^2$ como en (20).

Notar que los ángulos $\theta_1, \cdots, \theta_{D-2}$ parametrizan una esfera S^{D-2} de radio 1.

En particular, para $D = 4$, esos puntos suspensivos de la última fórmula se pueden ignorar con total seguridad, y los parámetros son $(t, \rho, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2}) = (t, \rho, \theta_1, \theta_2) = (t, \rho, \theta, \varphi)$.

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 - (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta es:

$$ds^2 = -\cosh^2(\rho)\ c^2dt^2 + l^2\left(d\rho^2 + \sinh^2(\rho)\ d\Omega^2_{D-2}\right) \tag{22}$$

Siendo $d\Omega^2_{D-2}$ la métrica de una esfera S^{D-2}.

Hay algo raro: $ct/l \in [0, 2\pi)$ es periódica, luego la curva con vector tangente ∂_t sería una curva timelike cerrada, lo cual no nos gusta. Pero si **extendemos el rango** de t a $ct/l \in (-\infty, \infty)$, y consideramos a puntos con $ct/l, ct/l + 2\pi$ como distintos puntos siempre, entonces tendríamos el espacio de cubrimiento del anterior embedding, en el que no hay curvas timelike cerradas. Es como ***desenrollar el hiperboloide.*** **A este nuevo espacio de cubrimiento es al que vamos a llamar AdS, y esta carta con $ct/l \in (-\infty, \infty)$ lo cubre totalmente.**

La coordenada ρ toma valores en $[0, \infty)$, y en el límite $\rho \to \infty$, nos podemos acercar al **borde de AdS**.

Podemos hacer un **cambio de variable** $r = l\sinh(\rho)$, y la métrica nos da:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/l^2} + r^2 d\Omega^2_{D-2} \tag{23}$$

Notar: $-\dfrac{r^2}{l^2} = \dfrac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}\ r^2$. Notar: **La métrica resulta estática**. La coordenada r toma valores en $[0, \infty)$ y el **borde** está en $r \to \infty$.

También se puede hacer el **cambio de variable** $t \to \eta = ct/l$, y $\rho \to \rho' = \displaystyle\int \frac{d\rho}{\cosh(\rho)} = 2\ \arctan\left(\tanh(\rho/2)\right)$, haciendo la misma cuenta que en el caso dS (la misma integral), y obtener una nueva carta de la forma:

$$ds^2 = \frac{l^2}{\cos^2(\rho')}\left(-d\eta^2 + d\rho'^{\,2} + \sin^2(\rho')\ d\Omega^2_{D-2}\right) \tag{24}$$

O sea queda conforme a $-d\eta^2 + d\ell^2_{k=+1}$, que es el universo estático de Einstein. La coordenada ρ' toma valores en $[0, \pi/2)$ y el borde está en $\rho' = \pi/2$.

Podíamos obtener **otras posibles coordenadas** si parametrizábamos ese espacio (20) en términos de coordenadas $(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$, o sea expresemos $\vec{X} = \vec{X}(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ como:

$$\begin{aligned}
&X^0 = l\ \sin\left(\frac{ct}{l}\right) \\
&X^1 = l\ \cos\left(\frac{ct}{l}\right)\ \cosh(\chi) \\
&(X^2, X^3, \cdots, X^D) = l\ \cos\left(\frac{ct}{l}\right)\ \sinh(\chi)\ \underbrace{\Big(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \cdots, \sin(\theta_1)(\cdots)\sin(\theta_{D-2})\Big)}_{\in S^{D-2}}
\end{aligned} \tag{25}$$

de forma que sí o sí ocurra que $\vec{X}^{\,2} = -l^2$ como en (20). Nuevamente, los ángulos $\theta_1, \cdots, \theta_{D-2}$ parametrizan una esfera S^{D-2} de radio 1. En particular, para $D = 4$, esos puntos suspensivos de la última fórmula se pueden ignorar con total seguridad, y los parámetros son $(t, \chi, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2}) = (t, \chi, \theta_1, \theta_2) = (t, \chi, \theta, \varphi)$.

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 - (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta queda de la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + l^2 \ \cos^2\left(\frac{ct}{l}\right) \left(d\chi^2 + \sinh^2(\chi) \ d\Omega^2_{D-2}\right) \tag{26}$$

O sea, queda como **una métrica FLRW con $k = -1$ y factor de escala**

$$a(t) = l \ \cos\left(\frac{ct}{l}\right) = l \ \cos\left(\sqrt{\frac{-2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \ \cdot \ ct\right) \tag{27}$$

Por último, mostramos las **coordenadas de Poincaré** $(t, x^1, \cdots, x^{D-2}, z)$:

$$\begin{aligned} X^0 &= \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\left(l^2 - c^2t^2 + \vec{x}^2\right) \\ X^1 &= \frac{l}{z} \ ct \\ X^{i+1} &= \frac{l}{z} \ x^i \quad \forall \ 1 \leq i \leq D-2 \\ X^D &= \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\left(-l^2 - c^2t^2 + \vec{x}^2\right) \end{aligned} \tag{28}$$

La **métrica** $ds^2 = -(dX^0)^2 - (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (\cdots) + (dX^D)^2$ inducida por el embedding con esta carta queda de la forma

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left(dz^2 \underbrace{-c^2dt^2 + d\vec{x}^2}_{= dx_\nu dx^\nu}\right) \tag{29}$$

La métrica queda **conformalmente plana** (conforme a Minkowski). Estas coordenadas no cubren toda la variedad.

El **borde de AdS** está en $z = 0$. A veces se llama a z como la ***coordenada holográfica***.

Porque hablamos tanto del **borde de AdS**? Por la **conjetura AdS/CFT de Maldacena** que dice que hay una **correspondencia** entre una teoría cuántica de gravedad (supersimétrica) en un background **AdS**, y una teoría cuántica de campos invariante ante transformaciones conformes (Conformal Field Theory, **CFT**) en la que no hay gravedad definida **en el borde de AdS**.

2. Redshifts y distancias

2.1. Redshift (corrimiento al rojo)

Demostremos una **fórmula muy útil** para la **frecuencia ν observada o medida por un observador** O (que se corresponde con algún sistema de referencia, que puede ser inercial o no inercial):

$$\nu = -\frac{1}{h} \ P_\mu \ U^\mu \tag{30}$$

donde h es la **constante de Planck**, P_μ es el $D-$**momento del fotón**, U^μ es la $D-$**velocidad del observador** O. La convención de la métrica es $(-,+,\cdots,+)$.

Para demostrarlo, notamos que en relatividad especial (R.E.), su consideramos un observador O en reposo respecto a un cierto sistema de referencia inercial (S.R.I.) (elegido de forma que O esté en reposo), entonces vale:

$$P^0 = h\ \nu \tag{31}$$

donde P^0 es el $D-$momento del fotón en ese S.R.I., y ν es la frecuencia medida por el observador O en ese S.R.I.

En relatividad general (R.G.), puedo ir al sistema de referencia localmente inercial (denotado con $\hat{\mu},\hat{\nu}$) que es comóvil al observador O (o sea en el que está en reposo), y vale (por principio de equivalencia y por hipótesis del reloj [4]) la anterior expresión:

$$\nu = \frac{1}{h}\ P^{\hat{0}} = \frac{1}{h}\ \eta^{\hat{0}\hat{\mu}} P_{\hat{\mu}} = -\frac{1}{h}\ P_{\hat{0}} = -\frac{1}{h}\ P_{\hat{0}}\ U^{\hat{0}} = -\frac{1}{h}\ P_{\hat{\mu}}\ U^{\hat{\mu}} = -\frac{1}{h}\ P_\mu\ U^\mu \tag{32}$$

En el primer paso se usó la fórmula válida en R.E., que debe valer en el sistema de referencia localmente inercial por principio de equivalencia y por la hipótesis del reloj. En el segundo y tercer paso se usó que la métrica en dicho sistema es la de Minkowski con convención $(-,+,\cdots,+)$. En el cuarto y quinto paso, se utilizó que la $D-$velocidad del observador O en dicho sistema de referencia localmente inercial, es la que corresponde a que el observador esté en reposo en un sistema localmente inercial: $U^{\hat{\mu}} = (U^{\hat{0}}, U^{\hat{i}}) = (1; 0,\cdots,0)$, entonces se introdujo gratis $U^{\hat{0}} = 1$ en el cuarto paso, y se introdujo $U^{\hat{i}} = 0$ en el quinto. En el sexto y último paso, pasamos a un sistema de referencia genérico (que puede ser no inercial) con el principio de acople mínimo, usando que la frecuencia observada por O debe ser invariante ante cambios de coordenadas, ya que el observador sigue siendo el mismo ante un cambio de coordenada, y sigue midiendo al misma frecuencia ν: Lo único que cambia, es el sistema de referencia con el que medimos la $D-$velocidad del observador, pero el observador y lo que observa no cambia. (Ver Hartle)

Con eso completamos la demostración. Esta fórmula es genérica, vale para cualquier métrica, no sólo la FLRW (por ej, se puede aplicar a Schwarzschild).

[4] Guarda que, como dijo Juan en la clase, hay una sutil suposición extra que forma parte de los axiomas de relatividad especial acerca de las mediciones de tiempo que realiza el reloj de un observador arbitrario: Se llama la Hipótesis del reloj, y dice que lo que mide el reloj de un observador arbitrario en una cierta posición del espacio-tiempo sólo depende de cuál es el sistema de referencia localmente inercial en el que dicho observador se encuentra en reposo. O sea, si existe un sistema de referencia localmente inercial en el que dos observadores distintos están en reposo en el mismo punto (o sea la velocidad relativa entre ellos es cero, pero puede que haya aceleración relativa no nula), entonces sus relojes miden lo mismo. Equivalentemente, dice que el reloj de un observador que se mueve en un camino C mide el intervalo de tiempo dado por integrar al diferencial de tiempo propio en el camino, o sea que el reloj mide: $\Delta\tau = \int_C d\tau = \int_C \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$. Implicaciones de esta suposición han sido comprobadas experimentalmente. Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Time_dilation#Clock_hypothesis

Si tengo una fuente que emite un rayo de luz con frecuencia ν_e (o sea, período $T_e = 1/\nu_r$), y un receptor que un tiempo Δt después recibe el rayo de luz con frecuencia ν_r (o sea, período $T_r = 1/\nu_r$), **definimos el Redshift** z como:

$$1 + z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_r} \tag{33}$$

También se puede expresar en términos de la longitud de onda como: $1 + z = \dfrac{\lambda_r}{\lambda_e} \iff z = \dfrac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} \equiv \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_e}$

Un corolario de esta fórmula para la frecuencia, nos da una **fórmula para el redshift**:

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{(P_\mu\ U^\mu)_e}{(P_\mu\ U^\mu)_r} = \frac{P_\mu^{(F)}(x_e)\ U^\mu_{(e)}}{P_\mu^{(F)}(x_r)\ U^\mu_{(r)}} \tag{34}$$

donde $P_\mu^{(F)}(x_e)$ y $P_\mu^{(F)}(x_r)$ son los $D-$momentos del fotón en el instante de emisión y de recepción, respectivamente [5] ; y $U^\mu_{(e)}$, $U^\mu_{(r)}$ son las $D-$velocidades del emisor en el instante de emisión y del receptor en el instante de recepción, respectivamente.

Veamos otro corolario importante: **Supongamos que el emisor y receptor están en reposo** en el momento de emisión y recepción respectivamente, o sea $U^i = 0$ para ambos, y $U^0(x)$ es tal que $-1 = U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g_{00}\ (U^0)^2 \implies U^0(x) = \sqrt{\dfrac{-1}{g_{00}(x)}}$ para ambos, o sea sólo depende del valor $g_{00}(x)$ en la posición x. Entonces, **tenemos** de lo anterior:

$$1 + z = \frac{P_\mu^{(F)}(x_e)\ U^\mu_{(e)}}{P_\mu^{(F)}(x_r)\ U^\mu_{(r)}} = \frac{P_0^{(F)}(x_e)\ U^0_{(e)}(x_e)}{P_0^{(F)}(x_r)\ U^0_{(r)}(x_r)} = \frac{P_0^{(F)}(x_e)}{P_0^{(F)}(x_r)} \sqrt{\frac{g_{00}(x_r)}{g_{00}(x_e)}} \tag{35}$$

Si imponemos más cosas, podemos simplificar más aún esta expresión [6].

En particular, ahora **planteemos la fórmula para la métrica de FLRW** en la cual $g_{00} = -1$ siempre: Se tachan los $g_{00}(x) = -1$ y se tiene:

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{P_0^{(F)}(x_e)}{P_0^{(F)}(x_r)} \tag{37}$$

Podemos simplificar más aún esta fórmula si nos concentramos en **fotones que sólo se mueven radialmente** (o sea $d\theta_i = 0$, luego $P_{\theta_i} = 0$), en cuyo caso ocurre que

$$0 = ds^2 = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = -(P_0)^2 + a^{-2}(t)(P_\chi)^2 \iff (P_0)^2 = \left(\frac{P_\chi}{a(t)}\right)^2 , \tag{38}$$

[5] Deberían ser los vectores tangentes afines a las geodésicas nulas de los fotones. De hecho, esa expresión es invariante ante reparametrizaciones afines de dicha geodésica nula: $\lambda \to \lambda' = a\lambda + b \implies \vec{P} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \to \vec{P}' = \dfrac{\partial}{\partial\lambda'} = \dfrac{1}{a}\vec{P}$ con $a, b =$cte.

[6] Veamos una simplificación que no aplica para la métrica FLRW pero sí aplica para Schwarzschild por ej.: **Supongamos que la métrica es estática** ($\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \iff \partial_0$ es un vector de Killing), entonces $P_0 =$cte en la geodésica del fotón, luego: $P_0^{(F)}(x_e) = P_0^{(F)}(x_r) = P_0 =$cte, y en consecuencia la fórmula queda:

$$1 + z = \sqrt{\frac{g_{00}(x_r)}{g_{00}(x_e)}} \tag{36}$$

donde se usó la métrica de FLRW, que es diagonal.

Esto implica entonces que:

$$1+z=\frac{\nu_e}{\nu_r}=\frac{P_0^{(F)}(x_e)}{P_0^{(F)}(x_r)}=\frac{P_\chi^{(F)}(x_e)}{P_\chi^{(F)}(x_r)}\;\frac{a(t_r)}{a(t_e)}=\frac{a(t_r)}{a(t_e)} \tag{39}$$

donde se usó que la métrica $ds^2=-c^2dt^2+a^2(t)d\chi^2$ de 2 dimensiones que queda después de tomar $d\theta_i=0$ (que es la que se usa para geodésicas nulas radiales), verifica que ∂_χ es un vector de Killing, y luego P_χ =cte en dicha geodésica, o sea: $P_\chi(x_e)=P_\chi(x_r)=P_\chi$ =cte, luego se tacha.

Cuando decimos que hay **corrimiento al rojo**, decimos que $\nu_r<\nu_e \iff \lambda_r>\lambda_e \iff \Delta\lambda>0 \iff z>0$. Porqué pasa eso? Porque, considerando $t_e=t_r-\Delta t<t_r$ y $a(t)$ creciente:

$$+\,t\longleftrightarrow +a(t)\longleftrightarrow z=\frac{a(t_r)-a(t_e)}{a(t_r)}>0\longleftrightarrow -\nu\longleftrightarrow +\lambda\longleftrightarrow \Delta\lambda>0 \tag{40}$$

Ahora bien, considerando $t_e=t_r-\Delta t$ con $0<\Delta t$, podemos aproximar por Taylor al factor de escala $a(t_e)=a(t_r-\Delta t)\simeq a(t_r)-\dot a(t_r)\;\Delta t+\frac{1}{2}\ddot a(t_r)\;\Delta t^2+\mathcal{O}(\Delta t^3)$ en tiempo de emisión, respecto del valor del factor de escala en tiempo de recepción. Centramos el Taylor en el tiempo de recepción porque en cosmología ese tiempo es aproximadamente hoy (t_{hoy}). Para que valga el Taylor, es necesario que Δt sea lo suficientemente pequeño como para que $a(t)$ no varíe demasiado, o sea tiempos relativamente recientes (comparados con la edad del universo). Haciendo Taylor, se tiene:

$$\begin{aligned} z&=\frac{\nu_e}{\nu_r}-1=\frac{a(t_r)}{a(t_e)}-1=\frac{a(t_r)}{a(t_r)\;\left(1-\frac{\dot a(t_r)}{a(t_r)}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\ddot a(t_r)}{a(t_r)}\Delta t^2+\mathcal{O}(\Delta t^3)\right)}-1=(\cdots)\\ &=H(t_r)\;\Delta t+H^2(t_r)\;\left(1+\frac{1}{2}\;q(t_r)\right)\;\Delta t^2+\mathcal{O}(\Delta t^3)\end{aligned} \tag{41}$$

O sea, a Taylor de orden 2, quedó en términos del **parámetro de Hubble** $H=\dfrac{\dot a}{a}=\partial_t(\ln(a))$, y del **parámetro de desaceleración** $q\equiv-\dfrac{\ddot a a}{\dot a^2}$, ambos evaluados en $t_r\sim t_{\text{hoy}}$. Hoy día: $H(t_{\text{hoy}})\sim 70\;\dfrac{\text{Km/s}}{\text{Mpc}}$ (hay ciertas discrepancias respecto a este valor [7]), y $q(t_{\text{hoy}})\sim -0{,}6\pm 0{,}2$.

Notar, podemos invertir lo anterior, obteniendo Δt en términos de z:

$$\Delta t=\frac{1}{H(t_r)}\;\left(z-\left(1+\frac{1}{2}\;q(t_r)\right)\;z^2+\mathcal{O}(z^3)\right) \tag{42}$$

Más generalmente, podemos siempre pensar a z como una variable que depende de $t\equiv t_e$ de la forma

$$z(t)=\frac{a(t_r)}{a(t)}-1 \tag{43}$$

con $z(t_r)=0$. O sea $z(t)$ crece cuando t decrece. **Podemos usar a z para medir tiempo.** Notar: $\dfrac{dz}{dt}=-\dfrac{a(t_r)}{a(t)}\;H(t)=-H(z)\;(1+z)$

[7] Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law#Measured_values_of_the_Hubble_constant

Por ejemplo, podríamos calcular la **edad del universo** de la siguiente forma, considerando que el tiempo de Big Bang t_{BB} (que lo elegimos como $t_{BB} = 0$) es cuando ocurre que $a(t_{BB}) = 0$, o equivalentemente $z(t_{BB}) = +\infty$:

$$t_{\text{hoy}} = t_r = t_0 = \int_{t_{BB}=0}^{t_0} dt = -\int_{\infty}^{0} \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{(1+z)H(z)} \tag{44}$$

La clave para poder calcular la edad del universo t_{hoy} es **saber la fórmula** $H(z)$ para poder hacer la integral en dz. Esta fórmula **sale de la dinámica**, de las ecuaciones de movimiento, y de las ecuaciones de estado de la materia. **Todo esto que hicimos es cinemática.**

2.2. Distancias

Cómo medimos distancias en el universo?

- **Distancia coordenada** $|\Delta\chi|$: Es entre dos puntos de la trayectoria de un rayo de luz (geodésica nula) que es radial: O sea $0 = ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)d\chi^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2) \iff d\chi^2 = \left(\frac{cdt}{a(t)}\right)^2 = d\eta^2$. Se tiene:

$$\begin{aligned} |\Delta\chi| = |\Delta\eta| = \left|\int d\chi\right| = \left|\int d\eta\right| = \int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{z_e}^{0} \frac{c}{a(z)}\frac{dt}{dz}\, dz = \int_{0}^{z_e} \frac{c}{a(z)(1+z)H(z)}\, dz \\ = \frac{c}{a(t_r)\; H_0} \int_0^{z_e} \frac{H_0}{H(z)}\, dz = |\Delta\chi|(z_e) \end{aligned} \tag{45}$$

  Al final se usó $1 + z = a(t_r)/a(t)$ y $a(t) = a(z)$ y se multiplicó y dividió por $H_0 = H(t_r)$.

  La clave para poder calcular $|\Delta\chi|(z_e)$ es saber la fórmula $H(z)$ para poder hacer la integral en dz. Esta fórmula sale de la dinámica, de las ecuaciones de movimiento, y de las ecuaciones de estado de la materia. Todo esto que hicimos es cinemática.

  Aproximando a $z_e \ll 1$, se tiene:

$$|\Delta\chi| \simeq \frac{c}{a(t_r)}(t_r - t_e) \tag{46}$$

- **Distancia física (instantánea)**: Veo la distancia entre dos puntos en la hoja $t = t_r =$cte actual, o sea:

$$\sigma(t_r) = d_F(t_r) = \left|\int_{t=t_r=\text{cte}} ds\right| = \left|\int_{t=t_r=\text{cte}} a(t)d\chi\right| = a(t_r)\int_{t=t_r=\text{cte}} d\chi = a(t_r)\;|\Delta\chi| \tag{47}$$

  donde usamos $ds^2\big|_{t=t_r=\text{cte}} = a^2(t)d\chi^2 = a^2(t_r)d\chi^2$ para distancias espaciales puramente radiales. O sea, el ds es la distancia (medida con la métrica) entre dos puntos en una misma hoja $t = t_r =$cte, que es la hoja del tiempo actual. Para calcularla, usamos $|\Delta\chi| = \frac{c}{a(t_r)\; H_0}\int_0^{z_e}\frac{H_0}{H(z)}\, dz$.

Notar: $\dfrac{\partial}{\partial t_r} d_F(t_r) = H(t_r)\; d_F(t_r)$, **Ley de Hubble** evaluada en hoy.

Si $z_e \ll 1$, entonces $d_F(t_r) \simeq c(t_r - t_e)$.

Esta distancia física (como la coordenada), **no es directamente observable** pues las observaciones que se pueden hacer en cosmología siempre refieren a eventos en el cono de luz pasado, no en una hipersuperficie de t =cte (en la que los puntos están separados espacialmente, y luego causalmente desconectados). Por eso **conviene una noción de distancia observable, como la que sigue:**

- **Distancia luminosa d_L:**

  Consideremos la siguiente expresión: $F = \dfrac{L}{4\pi d_L^2}$, donde F es el flujo, energía por unidad de tiempo y superficie atravesada; L es la luminosidad intrínseca, energía por unidad de tiempo emitida por una fuente; $4\pi d_L^2$ es la superficie de una esfera de radio d_L.

  En un espacio euclídeo, la distancia d_L coincide con la distancia física $\sigma = d_F$.

  Pero en un espacio curvo, en principio no. Entonces lo que hacemos en un espacio curvo es *definir* la distancia luminosa d_L como

  $$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \tag{48}$$

  que puede no coincidir con la distancia física. **Esta distancia, a diferencia de las otras, se puede medir directamente**, pues podemos medir F, y la luminosidad intrínseca L la podemos conocer o inferir.

  La luminosidad intrínseca L se relaciona con la cantidad de fotones N con frecuencia ν_e emitidos durante un intervalo pequeño de tiempo δt_e alrededor del tiempo de emisión t_e de la forma: $L = \dfrac{N\; h\nu_e}{\delta t_e}$, pues es la energía emitida $N\; h\nu_e$ (son N fotones con energía $h\nu_e$) por unidad de tiempo (por eso dividimos por δt_e).

  Para calcular el flujo F que medimos al recibir los fotones, planteamos que debe ser igual a $F = \dfrac{N\; h\nu_r}{A\delta t_r}$, pues son los mismos N fotones que a tiempo t_e fueron emitidos pero ahora tienen energía $h\;\nu_r$, por unidad de área (por eso dividimos por A, que es el área atravesada, el área de la esfera que estos fotones ocupan a tiempo t_r) y por unidad de tiempo (por eso dividimos por δt_r, que es el intervalo de tiempo durante el cual se reciben los N fotones que antes se emitieron durante un tiempo δt_e).

  Metiendo esto adentro de la fórmula de d_L, nos da:

  $$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}\;\frac{\nu_e}{\nu_r}\;\frac{\delta t_r}{\delta t_r}} \tag{49}$$

  Por un lado, notemos que $\dfrac{\nu_e}{\nu_r} = 1 + z_e = \dfrac{a(t_r)}{a(t_e)}$ como vimos. Por otro lado, la diferencia entre los intervalos de tiempo en los N fotones fueron emitidos y recibidos está dada por:

$\frac{\delta t_r}{\delta_e} = \frac{\nu_e}{\nu_r} = 1 + z_e = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}$. Y finalmente, notemos que el área atravesada por los fotones al ser recibidos por el receptor con t_r fijo y χ_r fijo es igual a $A = \int d^2\Omega \; a^2(t_r) \; f_k^2(\chi_r) = a^2(t_r) \; f_k^2(\chi_r) \; 4\pi$. Juntando todo esto, tenemos:

$$d_L = (1 + z_e) \; a(t_r) \; |f_k(\chi_r)| = (1 + z_e) \; a(t_r) \; f_k(|\chi_r|) \tag{50}$$

Tomamos $|\chi_r| = |\Delta\chi|$ eligiendo $\chi_e = 0$.

En general: $|\chi_r| = |\Delta\chi| = \int_0^{z_e} \frac{c}{a(z)(1+z)H(z)} \, dz$, por lo que:

$$d_L = d_L(z_e) = (1 + z_e) \; a(t_r) \; f_k(|\Delta\chi|) = (1 + z_e) \; a(t_r) \; f_k \left(\frac{c}{a(t_r) \; H_0} \int_0^{z_e} \frac{H_0}{H(z)} \, dz \right) \tag{51}$$

La clave para poder calcular $d_L(z_e)$ es **saber la fórmula** $H(z)$ para poder hacer la integral en dz. **Esta fórmula sale de la dinámica**, de las ecuaciones de movimiento, y de las ecuaciones de estado de la materia. **Todo esto que hicimos es cinemática.**

Tomando $z_e \ll 1$, se tiene $|\Delta\chi| \ll 1$, luego $f_k(|\Delta\chi|) \simeq |\Delta\chi| \simeq c(t_r - t_e)/a(t_r)$, y en consecuencia: $d_L \simeq c(t_r - t_e) + \mathcal{O}(z_e^2) \simeq d_F = \sigma$ queda igual a la distancia física (a menos de $\mathcal{O}(z_e^2)$).

3. Nuestro universo

Recordemos que las **ecuaciones de Friedmann**, que surgen de **evaluar a las ecuaciones de Einstein en una métrica FLRW** de dimensión $D = 4$ **con un fluido ideal de densidad** ρ **y presión** p, son:

$$\begin{aligned} H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \; \rho - \frac{kc^2}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2} \; (\rho + 3p) \end{aligned} \tag{52}$$

Y la **ecuación de conservación** $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ [8] implica necesariamente que la densidad ρ y la presión p deben verificar:

$$\begin{aligned} &0 = \partial_i p = \partial_i \rho \\ &0 = \partial_0 \rho + 3H \; (\rho + p) \iff \frac{\partial}{\partial t}(\rho a^3) = -p \; \frac{\partial}{\partial t}(a^3) \end{aligned} \tag{53}$$

Lo primero tiene sentido porque demandamos que haya simetría ante traslaciones espaciales. De alguna forma, la ecuación de conservación le impone las simetrías de la métrica a la materia.

La segunda determina la dependencia de $\rho(t)$ en términos de la presión. Notar que tiene la pinta de la primera Ley de termo: '$dE = -p \; dV$' con $\rho a^3 \sim E$, $a^3 \sim V$

Estas ecuaciones dictan la dinámica del universo.

[8] que debe verificarse por la **invarianza ante difeomorfismos**, ver apéndice B Carroll

3.1. 1 componente

Si imponemos que en la materia-energía del universo hay u**na componente con ecuación de estado**

$$p = w\rho \tag{54}$$

que es dominante frente al resto (o sea que podemos despreciar al resto), entonces evaluando la ecuación de conservación $\partial_0 \rho + 3H\ (\rho + p) = 0$ obtenemos (ejer 2, lunes 16-11):

$$\rho(a) = \frac{\rho_0}{a_0^{-3(1+w)}}\ a^{-3(1+w)} \propto a^{-3(1+w)} \tag{55}$$

siendo ρ_0 la densidad hoy y a_0 el factor de escala hoy.

En particular, para las ecuaciones de estado que componen nuestro universo:

- Si $w = 0$ (**materia no relativista, polvo**): $\rho \sim a^{-3}$ y luego $E \sim \rho a^3$ ~cte.
- Si $w = -1$ (**constante cosmológica Λ, vacío**): $\rho = \rho_{\text{vac}}$ =cte y luego $E \sim \rho a^3 \sim a^3$.
- Si $w = 1/3$ (**radiación, materia relativista**) [9]: $\rho \sim a^{-4}$ y luego $E \sim \rho a^3 \sim a^{-1}$ decae. Esto último tiene sentido por el corrimiento al rojo: $+t \leftrightarrow +a \leftrightarrow -E \leftrightarrow -\nu \leftrightarrow +\lambda$.

Ahora hay que plantear las **ecuaciones de Friedmann**, para las cuales además de imponer una sóla componente con ecuación de estado $p = w\rho$, **imponemos que** $k = 0$, universo espacialmente plano. Después de **hacer cuentas** planteando la primera ecuación de Friedmann (**ejer, muy importante**, capaz ya lo hicieron en la teórica, pero es importante que lo vean), termina quedando

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3(1+w))} \propto t^{2/(3(1+w))} \quad \text{si } w \neq -1 \\ a(t) &= a_0\ e^{H_0(t-t_0)} \propto e^{H_0 t} \quad \text{si } w = -1 \end{aligned} \tag{56}$$

Justamente, como vimos en dS, la métrica FLRW con factor de escala $a(t) \propto e^{H_0 t}$ es **de Sitter** (con $H_0^2 = \dfrac{8\pi G}{3c^2}\ \rho_{\text{vac}} = \Lambda\ c^2/3 > 0$, es necesario tener $\Lambda > 0$, lo cual sale naturalmente porque impusimos $k = 0$). O sea que la métrica que sale de las ecuaciones de Einstein cuando domina $\Lambda > 0$ (con $w = -1$) con $k = 0$ es de Sitter.

Si planteamos la segunda ecuación de Friedmann, nos da la **aceleración**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \propto -(\rho + 3p) = -\rho(1 + 3w) \tag{57}$$

Luego hay desaceleración si $\ddot{a} < 0 \iff w > -1/3$: Domina materia no relativista o radiación.

Hay no aceleración si $\ddot{a} = 0 \iff w = -1/3$, que se corresponde a curvatura k

Hay aceleración si $\ddot{a} > 0 \iff w < -1/3$: Domina Λ, como pasa actualmente en el universo (en un 70 %).

---

[9] El $w^{(\text{Rad})}$ es tal que $0 = T^{(\text{Rad})} = T^{\mu}{}_{\mu} = -\rho + (D-1)p \iff p = \rho/(D-1) \iff w^{(\text{Rad})} = 1/(D-1)$, en particular $w^{(\text{Rad})} = 1/3$ para $D = 4$.

3.2. Historia del universo

En el **futuro lejano**, t es muy grande, $a(t)$ es muy grande, luego **domina** el de menor w que es **el vacío** Λ porque las otras densidades ya decayeron un montón mientras que ρ_{vac} =cte se mantuvo constante. Por eso hoy día, es el que más domina de todos (70 %).

Pero hacia el **pasado lejano, domina** el de mayor w, que es **radiación, fotones**.

Y **en el medio domina en un momento materia no relativista**.

En particular, miremos a radiación (los fotones): Como verifican la **Ley de Stefan Boltzmann**:

$$\rho_F \propto T_F^4 \propto a^{-4} \iff T_F \propto \frac{1}{a} \iff a \propto \frac{1}{T_F} \tag{58}$$

Como $a(t)$ es creciente en t, $T_F \propto \dfrac{1}{a(t)}$ decrece en t. **Podemos usar también a la temperatura de los fotones T_F para medir el tiempo.**

Hoy día: $T_F(\text{hoy}) \simeq 2,725$ K.

Bien en el **pasado**, **los fotones** tenían mayor ν, o sea **mayor energía**, y era suficiente para **ionizar un átomo de hidrógeno:** $E_{\text{fot}} = h\nu \sim 13,6$ eV , ya que también T_F era muy alta. Por lo tanto **no se formaban átomos de hidrógeno estables.**

El punto aproximadamente límite de la historia del universo en el que los fotones dejaron (en promedio) de ser tan energéticos como para ionizar átomos de hidrógeno se llama **desacople** y ocurre alrededor de $T_F(\text{desacople}) = T_D \sim 3000K \iff z \sim 1100 \iff t \sim 370000$ años después del BB. Justamente, $1 + z = a(t_r)/a(t_e) = T_D/T_F(\text{hoy}) \sim 3000/2,7 \sim 1100$.

Este **desacople de fotones** está íntimamente **relacionado** con el evento de **recombinación**, en el cual protones y electrones interactúan apreciablemente **formando átomos de hidrógeno.**

Antes del desacople, los fotones interactuaban mucho con electrones, protones y su camino libre medio era muy chico, se chocaban todo el tiempo y no se podían propagar hasta hoy. Pero después del desacople ya no interactuaron casi y pudieron propagarse hasta hoy. Por eso **el universo visible para nosotros es todo lo que pasó después del desacople**.

En particular, la **radiación cósmica de fondo (CMB)**, es la radiación de cuerpo negro a $T_{CMB} \simeq 2,725$ K **proveniente del momento del desacople**, que es lo más viejo que podemos ver, **la luz más vieja que nos llega**. De medirla y estudiarla, se sacan cosas grosas.

Yendo más atrás en el tiempo, los fotones dejaron ruidos: En la fase de **Nucleosíntesis** a $T_F(\text{N.S.}) \sim 10^9$ K, se pueden calcular la cantidad de núcleos de H_2, He que tiene el universo y es consistente con las mediciones (Gamow).

Más atrás aun en el tiempo, debe haber habido tanta temperatura, tanta energía en las interacciones entre partículas, que **quizás habían quarks sueltos** que ya no podían formar protones, neutrones porque interactuaban mucho. Eso hasta un punto en el que sí pudieron formar bariones, mesones, etc: **QCD phase transition**. Y capaz atrás en el tiempo, los fotones tenían tanta energía que formaban pares partícula-antipartícula, pero si la materia se forma de a pares, **porque vemos más materia que antimateria?** matter–antimatter asymmetry problem.

También, muuy en el pasado, se supone que hubo un período de **inflación** en el que por un intervalo de tiempo muuuy corto, el universo creció muuy rápido, a lo de Sitter. Se modela con un campo escalar llamado inflatón, que hace las veces de constante cosmológica.

3.3. Universo hoy: Varias componentes

Para **entender al universo hoy** tenemos que lidiar con **varias componentes**.

Defino **densidad de energía crítica** ρ_{crit} como el valor de ρ que corresponde a $k = 0$. O sea:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\,\rho - \frac{kc^2}{a^2} \equiv \frac{8\pi G}{3c^2}\,\rho_{\text{crit}} \iff \rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G}\,H^2(t) \tag{59}$$

Y también definimos

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{crit}}(t)} \tag{60}$$

De esta forma, las ecuaciones quedan equivalentes a:

$$1 = \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{crit}}(t)} - \frac{kc^2}{a^2H^2(t)} \iff \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)} \tag{61}$$

Luego:

$$\begin{aligned} &\rho < \rho_{\text{crit}}(t) \iff \Omega < 1 \iff k < 0 \iff k = -1 \text{ abierto} \\ &\rho = \rho_{\text{crit}}(t) \iff \Omega = 1 \iff k = 0 \text{ plano} \\ &\rho > \rho_{\text{crit}}(t) \iff \Omega > 1 \iff k > 0 \iff k = +1 \text{ cerrado} \end{aligned} \tag{62}$$

Notar en particular que:

$$kc^2 = a^2(t)\;H^2(t)(\Omega(t) - 1) = \text{cte en } t = a_0^2\;H_0^2(\Omega_0 - 1) \tag{63}$$

Si hay **varias componentes,**

$$\rho = \sum_i \rho_i = \sum_i \rho_{0,i}\,\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)} \tag{64}$$

Definiendo [10]

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{crit}}(t)} \implies \Omega(t) = \sum_i \Omega_i(t) \tag{65}$$

En particular $\Omega_0 = \sum_i \Omega_{0,i}$. Por otro lado, notar, como $\rho_i(t) \propto a^{-3(1+w_i)}$:

$$\text{cte} = \rho_i(t)a^{3(1+w_i)} = \Omega_i(t)\rho_{\text{crit}}(t)a^{3(1+w_i)} \propto \Omega_i(t)H^2(t)a^{3(1+w_i)} = \text{cte} = \Omega_{i,0}H_0^2a_0^{3(1+w_i)} \tag{66}$$

[10]Observación: En general $\Omega_i > 0$, pero para Ω_Λ, $\text{sign}(\Omega_\Lambda) = \text{sign}(\rho_{\text{vac}}) = \text{sign}(\Lambda)$.

Luego:

$$\Omega_i(t)H^2(t) = \Omega_{0,i}\ H_0^2\ \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)} \tag{67}$$

Si reemplazamos esto y la expresión de kc^2 en la primera eq de Friedmann, expresada como multiplicar H^2 por (61) que da $H^2 = \Omega(t)H^2 - \dfrac{kc^2}{a^2(t)} = \sum_i \Omega_i(t)H^2 - \dfrac{kc^2}{a^2(t)}$, obtenemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_{0,i}\ \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)} - \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-2}\ \left(\sum_i \Omega_{0,i} - 1\right) \tag{68}$$

Luego como $a_0/a(t) = 1 + z$, lo podemos expresar como:

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{0,i}\ (1+z)^{3(1+w_i)} - (1+z)^2\ \left(\sum_i \Omega_{0,i} - 1\right) \tag{69}$$

Esta es la expresión de $H(z)/H_0$ (tomando raíz cuadrada), que se usa para calcular distancias y edad del universo. Pueden calcular con la compu que $t_0 \simeq 14 \cdot 10^9$ años! Tomando $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$ y $\Omega_M \simeq 0,3$ y $\Omega_R \simeq 5 \cdot 10^{-5} \sim 0$.

Ciertas mediciones sugieren $k = 0$ en nuestro universo, pero ojo, todavía no es seguro, hay discusión al respecto.