Vectores de Killing e isometrías

Facundo Rost

Clase 21/10 - Relatividad General - 2do cuatrimestre 2020

Resumen

Índice

1. Vector de Killing

1.1. Definición

Recordar que dijimos que un tensor T es invariante ante un difeomorfismo $\Phi : M \to M$ si:

$$(\Delta_\Phi T)|_p \equiv \overbrace{\Phi^*(T|_{F(p)})}^{=(\Phi^* T)|_p} - T|_p = 0 \;\; \forall \; p \in M \tag{1}$$

Y además, un tensor T es invariante ante un campo de vectores $\vec{V}$, si es invariante ante todos los difeomorfismos α_λ generados por $\vec{V}$. Para ello, basta imponer esto para λ infinitesimal, lo cual es equivalente a imponer:

$$\pounds_{\vec{V}} T = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\alpha^*_\lambda T - T}{\lambda} = 0 \tag{2}$$

Los difeomorfismos Φ que dejan invariante al tensor T forman un grupo, y los campos de vectores $\vec{V}$ que dejan invariante al tensor T forman el álgebra de Lie [1] de dicho grupo. En otras palabras, los difeomorfismos infinitesimales (que están infinitesimalmente cerca de la identidad) que dejan invariante a T se pueden escribir en coordenadas en términos de las componentes de un campo de vectores $\vec{V}$ que deja invariante a T de la forma:

$$y^\beta(x) = \Phi^\beta(x) = \alpha^\beta_{\delta\lambda}(x) = x^\beta + \delta\lambda \; V^\beta(x) \tag{3}$$

despreciando términos de $\mathcal{O}(\delta\lambda^2)$ (pues $\delta\lambda$ es infinitesimal).

Por otro lado, un difeomorfismo finito se obtiene exponenciando lo anterior de la forma (con λ_0 finito):

$$y^\beta(x) = \Phi^\beta(x) = \alpha^\beta_{\lambda_0}(x) = \exp\left(\lambda_0 \, \frac{d}{d\lambda}\right) \alpha^\beta_\lambda(x)|_{\lambda=0} = \exp\left(\lambda \; V^\rho \partial_\rho\right) \alpha^\beta_\lambda(x)|_{\lambda=0} \tag{4}$$

o sea hay que evaluar las derivadas y V^ρ en $\alpha^\nu_0(x) = x^\nu$. Lo anterior es medio formal. Otra forma es obtener $\alpha_\lambda(x)$ a partir de $V^\beta(x)$ resolviendo (integrando) la ecuación diferencial

$$\left.\frac{d\alpha^\beta_\lambda(x)}{d\lambda}\right|_\lambda = V^\beta(\alpha_\lambda(x)) \tag{5}$$

con la condición inicial $\alpha^\nu_0(x) = x^\nu$. O sea, calculando las curvas integrales de $\vec{V}$.

Ahora bien, en relatividad general y en geometría Riemanniana (o pseudo-riemanniana), **la métrica es *el tensor* que nos importa** en la vida y que nos determina todo lo que nos interesa (conexión de Levi-Civita para hacer derivadas covariantes, volumen métrico para integrar, etc). Entonces las simetrías que nos van a interesar son aquellas que dejan a la métrica invariante.

[1] Para ver que forman un álgebra de Lie: Si $\vec{V}, \vec{W}$ dejan invariante a T (i.e. $\pounds_{\vec{V}} T = \pounds_{\vec{W}} T = 0$) entonces $\pounds_{[\vec{V},\vec{W}]} T = [\pounds_{\vec{V}}, \pounds_{\vec{W}}] T = \pounds_{\vec{V}} \pounds_{\vec{W}} T - \pounds_{\vec{W}} \pounds_{\vec{V}} T = 0$, luego $[\vec{V}, \vec{W}]$ también deja invariante a T.

En efecto, un difeomorfismo Φ que deja a la métrica g invariante (i.e. $\Delta_\Phi g = \Phi^* g - g = 0$) es lo suficientemente importante como para merecer un nombre: Se llama **isometría**. Tiene todo el sentido el nombre, son mapas que no cambian nuestra métrica, no cambian nuestra noción de distancia. El conjunto de isometrías (difeomorfismos que dejan invariante a g) es un grupo, llamado **grupo de isometrías** $\mathrm{ISO}(M, g)$.

Y un campo de vectores $\vec{V}$ que deja invariante a la métrica g (i.e. $\pounds_{\vec{V}} g = 0$) también tiene un nombre especial: Se lo llama **vector de Killing** (o campo de vectores de Killing para dejar en claro que es un campo de vectores). El conjunto de vectores de Killing $\mathcal{K}_g$ forman un **álgebra de Lie, que son las transformaciones infinitesimales del grupo de isometrías**.

$$\mathcal{K}_g \subseteq \Gamma(TM) \xrightarrow{\exp} \mathrm{ISO}(M, g) \subseteq \mathrm{Diff}(M)$$

$$\lambda\vec{K} \xrightarrow{\quad\exp\quad} \alpha_\lambda = \exp(\lambda\vec{K})$$

Figura 1: Exponencial de un vector de Killing $\vec{K} \in \mathcal{K}_g$, que nos da una isometría $\alpha_\lambda = \exp(\lambda\vec{K}) \in \mathrm{ISO}(M, g)$. Vemos que la exponencial del elemento del álgebra de Lie $\mathcal{K}_g$ nos da un elemento del grupo $\mathrm{ISO}(M, g)$. Por eso se suele referir a los elementos del álgebra de Lie como los *generadores* de las simetrías.

1.2. Propiedades

De la definición de que un campo de vectores es un vector de Killing si $\pounds_{\vec{V}} g = 0$ (es decir, que los difeomorfismos α_λ generados por $\vec{V}$ dejan invariante a g), podemos deducir propiedades útiles:

1. **En índices**, $\vec{V}$ vector de Killing $\iff$

$$0 = \pounds_{\vec{V}} g \iff 0 = (\pounds_{\vec{V}} g)_{\mu\nu} = V^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (\partial_\mu V^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu V^\rho) g_{\mu\rho} \tag{6}$$

2. **En particular, si** $\vec{V} = \partial_\beta \iff V^\rho = \delta^\rho_\beta$, se tiene que la forma de la derivada de Lie de un tensor T en general se súper-simplifica pues queda de la forma $(\pounds_{\partial_\beta} T)^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = \partial_\beta T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(x)$. Por lo tanto, podemos afirmar $\pounds_{\partial_\beta} T = 0 \iff \partial_\beta T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(x) = 0$, o sea que debe pasar que ninguna componente de T puede depender de la coordenada x^β para que ∂_β deje invariante a T.

   Tiene sentido, porque los difeomorfismos infinitesimales del campo de vectores ∂_β serían simplemente traslaciones en la coordenada x^β, o sea cambios de coordenada de la forma

$x^\nu \to x^\nu + a\delta^\nu_\beta$ (sólo trasladando la coordenada x^β). Y al hacer una traslación de x^β (o sea variar dicha coordenada), entonces T queda invariante si y sólo si $T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s}(x)$ no depende de x^β. Tiene todo el sentido.

En particular, para la métrica (i.e. $T = g$):

$$\vec{V} = \partial_\beta \text{ vector de Killing} \iff (\pounds_{\partial_\beta} g)_{\mu\nu} = \partial_\beta g_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{7}$$

3. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita (métrica y sin torsión), es válido que:

$$\begin{aligned}(\pounds_{\vec{V}} g)_{\mu\nu} &= V^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (\partial_\mu V^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu V^\rho) g_{\mu\rho} \\ &= V^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\rho) g_{\rho\nu} + (\nabla_\nu V^\rho) g_{\mu\rho} \\ &= 0 + \nabla_\mu (V^\rho g_{\rho\nu}) + \nabla_\nu (V^\rho g_{\mu\rho}) \\ &= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} = 2\nabla_{(\nu} V_{\mu)}\end{aligned} \tag{8}$$

Al pasar al segundo renglón se usó que la conexión no tiene torsión [2], luego al pasar al tercer renglón se usó que la conexión es métrica (i.e. $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$), y finalmente se acomodaron un poco las cosas.

Luego, vemos que:

$$\boxed{\vec{V} \text{ vector de Killing} \iff (\pounds_{\vec{V}} g)_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_{(\mu} V_{\nu)} = V_{(\nu;\mu)} = 0} \tag{9}$$

Podemos determinar si un vector $V^\nu(x)$ es de Killing, bajándole un índice (con la métrica) y calculando su derivada covariante (simetrizada).

4. Sea $\vec{V}$ un vector de Killing, y sea $\vec{P} = P^i \partial_i = \dfrac{d}{d\lambda}$ el vector tangente afín a una curva autoparalela en la conexión de Levi-Civita. Es decir, que verifica $\nabla_{\vec{P}} \vec{P}\Big|_{\text{curva}} = 0$ al evaluarlo

[2] Más en general, para una conexión sin torsión (que puede o no ser la L-C), vale que podemos reemplazar $\partial \longleftrightarrow \nabla$ (o $, \longleftrightarrow ;$) en las expresiones de derivada de Lie de un tensor y derivada exterior de una forma en base coordenada.

O sea, para la derivada de Lie:

$$\begin{aligned}(\pounds_{\vec{V}} T)^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} &= V^\rho \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} - (\partial_\rho V^{\mu_1}) T^{\rho\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} - (\cdots) - (\partial_\rho V^{\mu_r}) T^{\mu_1\cdots\rho}_{\nu_1\cdots\nu_s} + (\partial_{\nu_1} V^\rho) T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\rho\cdots\nu_s} + (\cdots) + (\partial_{\nu_s} V^\rho) T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\rho} \\ &= V^\rho \nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} - (\nabla_\rho V^{\mu_1}) T^{\rho\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} - (\cdots) - (\nabla_\rho V^{\mu_r}) T^{\mu_1\cdots\rho}_{\nu_1\cdots\nu_s} + (\nabla_{\nu_1} V^\rho) T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\rho\cdots\nu_s} + (\cdots) + (\nabla_{\nu_s} V^\rho) T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\rho}\end{aligned}$$

Y para la derivada exterior:

$$(d\tilde{\beta})_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_p} = (p+1)\partial_{[\mu_0}\beta_{\mu_1\cdots\mu_p]} = (p+1)\nabla_{[\mu_0}\beta_{\mu_1\cdots\mu_p]}$$

en la curva autoparalela [3]. Como estamos en la conexión L-C, las curvas autoparalelas son equivalentemente geodésicas.

Es válida la siguiente propiedad:

$$0 = \nabla_{\vec{P}}(g(\vec{P},\vec{V}))\Big|_{\text{curva}} = \nabla_{\vec{P}}(P_\mu V^\mu)\big|_{\text{curva}} \iff g(\vec{P},\vec{V}) = P_\mu V^\mu = \text{cte en geodésica} \tag{10}$$

Notemos que una **simetría** (generada por el vector de Killing $\vec{V}$) nos está dando lugar a una **cantidad conservada en** la trayectoria de las partículas (**geodésicas**).

En el caso particular de que $\vec{V} = \partial_\beta$, tenemos: $P_\mu V^\mu = P_\beta = \text{cte}$ en la geodésica.

Para demostrar dicha propiedad:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{P}}(g(\vec{P},\vec{V})) &= (\nabla_{\vec{P}}g)(\vec{P},\vec{V})) + g(\nabla_{\vec{P}}(\vec{P}),\vec{V}) + g(\vec{P},\nabla_{\vec{P}}(\vec{V})) \\ &= 0 + 0 + g(\vec{P},\nabla_{\vec{P}}(\vec{V})) \end{aligned} \tag{11}$$

donde se usó la regla de Leibniz para ∇ en el primer paso, después se usó que la conexión es métrica (luego $\nabla_{\vec{P}}g = 0$), y que $\vec{P}$ es un vector tangente afín a la autoparalela (luego $\nabla_{\vec{P}}\vec{P} = 0$).

Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{P}}(g(\vec{P},\vec{V})) = g(\vec{P},\nabla_{\vec{P}}(\vec{V})) &= g_{\mu\nu}P^\mu(\nabla_{\vec{P}}(\vec{V}))^\nu = g_{\mu\nu}P^\mu P^\rho \nabla_\rho V^\nu \\ &= P^\mu P^\rho \nabla_\rho (V^\nu g_{\mu\nu}) = P^\mu P^\rho \nabla_\rho V_\mu = P^\mu P^\rho \nabla_{(\rho}V_{\mu)} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Donde se usó las expresiones en términos de índices en el primer renglón, que ∇ es una conexión métrica en el segundo renglón, y al final se usó que $P^\mu P^\rho = P^{(\mu}P^{\rho)}$ es simétrico en los índices μ,ρ por lo tanto al contraerlo con $\nabla_\rho V_\mu$ sólo sobrevive la parte simétrica $\nabla_{(\rho}V_{\mu)}$ de este último. Y debido a que $\vec{V}$ es un vector de Killing, se tiene que $\nabla_{(\rho}V_{\mu)} = 0$. Con eso demostramos la propiedad.

5. Esto es en parte una definición, y en parte una propiedad, ambos inspirados en lo anterior:

   Podemos decir que un tensor simétrico $K^{\mu_1\cdots\mu_r}$ de tipo $(r,0)$ (o también podemos tomar $K_{\mu_1\cdots\mu_r}$ simétrico de tipo $(0,r)$) es un **tensor de Killing**, si verifica:

$$\nabla_{(\nu}K_{\mu_1\cdots\mu_r)} = K_{(\mu_1\cdots\mu_r;\nu)} = 0 \tag{13}$$

[3] Recordar de la teórica que una curva autoparalela es tal que su vector tangente $\vec{V} = \dfrac{d}{d\mu}$ verifica $\nabla_{\vec{V}}\vec{V} = f\ \vec{V}$ al evaluarlo en la curva, para una cierta función f. Pero siempre se puede hacer una reparametrización de la curva $\mu \to \lambda(\mu)$ de forma que el nuevo vector tangente (asociado al nuevo parámetro λ de la curva) $\vec{P} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda} = \dfrac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}\ \vec{V}$ verifique la condición $\nabla_{\vec{P}}\vec{P} = 0$ al evaluarla en la curva. Los parámetros λ que verifican esta condición se llaman parámetros afines, y los vectores tangentes $\vec{P} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ asociados a dichos parámetros afines, se dicen vectores afines.

En cuyo caso, vale que:

$$K_{\mu_1\cdots\mu_r}P^{\mu_1}(\cdots)P^{\mu_r} = K^{\mu_1\cdots\mu_r}P_{\mu_1}(\cdots)P_{\mu_r} = \text{cte en la geodésica} \tag{14}$$

Ejer: Demostrarlo. Esto es una generalización del ejer 17f de la guía.

O sea, que nos puede servir para construirnos más cantidades conservadas en geodésicas.

6. Por último, sea K^μ un vector de Killing y sea $T^{\mu\nu}$ un tensor simétrico conservado (i.e. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$; como por ejemplo el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ de relatividad general, que verifica esta última propiedad gracias a la invariancia de la teoría ante difeomorfismos [4]).

   El vector $J^\mu \equiv K_\nu T^{\mu\nu}$ se conserva:

$$\nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu (K_\nu T^{\mu\nu}) = 0 \tag{15}$$

   Ejer: Demostrar esto último explícitamente usando lo dicho anteriormente. Esto y lo que sigue es ej. 18 de la guía.

   Interpretaremos a J^μ como la **corriente** asociada al vector de Killing K^μ, que a su vez está asociado a una simetría infinitesimal de la teoría (o sea una isometría, pues el campo de la teoría es la métrica).

   Luego, aplicando el teorema de la divergencia (ejer: hacerlo explícitamente) tenemos que la **carga de Noether** Q asociada a esta simetría se conserva:

$$Q_\Sigma(\vec{K}) = \int_\Sigma T^{\mu\nu}K_\nu \, d\Sigma_\mu = \int_\Sigma T^{\mu\nu}K_\nu \, n_\mu\sqrt{\gamma} \, d^{n-1}x = \text{cte} \tag{16}$$

   siendo Σ una hipersuperficie espacial, que si queremos podemos tomar como $\{t = \text{cte}\}$.

   A partir de una simetría tenemos una carga conservada: **Teorema de Noether**.

2. Ejemplos

2.1. Espacio de Minkowski $\mathbb{M}_{1,d}$: Álgebra y grupo de Poincaré

2.1.1. Vectores de Killing

En el espacio de Minkowski $\mathbb{M}_{1,d} = \mathbb{M}_{1,D-1}$ (de dimensión total $D = 1 + d$) la métrica es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, luego $\partial_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho \eta_{\mu\nu} = 0 \implies \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$, y en consecuencia $\nabla_\mu = \partial_\mu$. Esto pasa porque el espacio es plano.

Luego, la condición para que un vector $\vec{K}$ sea de Killing es $0 = \nabla_{(\mu}K_{\nu)} = \partial_{(\mu}K_{\nu)}$.

[4] Ver apéndice B del Carrol a partir de (B.22) para ver la demo. Igual en la teórica y práctica capaz todavía no vieron esto, así que sólo dejo la referencia por si se preguntan de donde sale en algún momento de sus vidas.

Definamos (eq1)$\equiv \partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu = 0$, y (eq2)$\equiv \partial_\mu K_\rho + \partial_\rho K_\mu = 0$

Luego, si hacemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\rho(\text{eq1}) + \partial_\nu(\text{eq2}) = \partial_\rho\partial_\mu K_\nu + \partial_\rho\partial_\nu K_\mu + \partial_\nu\partial_\mu K_\rho + \partial_\nu\partial_\rho K_\mu \\ &= \partial_\mu(\partial_\rho K_\nu + \partial_\nu K_\rho) + 2\partial_\rho\partial_\nu K_\mu = 0 + 2\partial_\rho\partial_\nu K_\mu \end{aligned} \tag{17}$$

donde en el último paso se usó $0 = 2\partial_{(\rho}K_{\nu)} = \partial_\rho K_\nu + \partial_\nu K_\rho$. Entonces, el hecho de que $\vec{K}$ sea un vector de Killing implica directamente que:

$$\vec{K} = K^\mu(x)\partial_\mu \text{ vector de Killing } \implies \partial_\rho\partial_\nu K_\mu = 0 \implies K_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu \tag{18}$$

con $a_\mu, b_{\mu\nu}$ constantes.

Aplicando la condición de que $\vec{K}$ sea un vector de Killing a la expresión $K_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu$ tenemos:

$$\vec{K} = K^\mu(x)\partial_\mu \text{ vector de Killing } \iff 0 = \partial_{(\rho}K_{\mu)}(x) = b_{(\mu\rho)} \iff b_{\mu\nu} = b_{[\mu\nu]} \text{ antisimétrico} \tag{19}$$

Luego, veamos como queda esta condición para el vector con el índice arriba. **Se tiene finalmente que**:

$$K^\mu(x) = \eta^{\mu\nu}K_\nu = a^\mu + b^\mu{}_\rho\, x^\rho\,, \text{ con } b^\mu{}_\rho \equiv \eta^{\mu\nu}b_{\nu\rho} \iff \vec{K} = K^\mu(x)\partial_\mu = a^\mu\partial_\mu + b^\mu{}_\rho\, x^\rho\partial_\mu\,, \tag{20}$$

y la condición $b_{(\mu\nu)} = 0$ se traduce a (considerando $\eta_{\sigma\mu}b^\mu{}_\rho = \eta_{\sigma\mu}\eta^{\mu\nu}b_{\nu\rho} = \delta^\nu_\sigma b_{\nu\rho} = b_{\sigma\rho}$):

$$0 = 2b_{(\sigma\rho)} = b_{\sigma\rho} + b_{\rho\sigma} = \eta_{\sigma\mu}b^\mu{}_\rho + \eta_{\rho\mu}b^\mu{}_\sigma \iff \bar{\bar{\eta}}\,\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{b}}^t\,\bar{\bar{\eta}} = 0 \iff \bar{\bar{b}}^t = -\bar{\bar{\eta}}\,\bar{\bar{b}}\,\bar{\bar{\eta}} \tag{21}$$

donde se denotó $\bar{\bar{b}}$ como la matriz con componentes $b^\mu{}_\rho$. Esta matriz $\bar{\bar{b}}$ pertenece al subespacio de matrices $\{\bar{\bar{b}} \;:\; \bar{\bar{b}}^t = -\bar{\bar{\eta}}\,\bar{\bar{b}}\,\bar{\bar{\eta}}\}$, que es un álgebra de Lie de matrices (pues es cerrado ante conmutadores entre matrices) de dimensión $D(D-1)/2$ que la llamaremos $\mathfrak{so}(1,d)$, va a ser el álgebra de Lie de Lorentz (en particular, si $D = 1 + d = 4 \iff d = 3$, entonces $\mathfrak{so}(1,3)$ tiene dimensión $D(D-1)/2 = 6$).

2.1.2. Generadores y relaciones de conmutación

Concentrémosnos primero en los vectores de Killing con $a^\mu = 0$, después consideramos $a^\mu \neq 0$.

Podemos expresar al vector de Killing con $a^\mu = 0$ como:

$$\vec{K}\Big|_{a^\mu=0} = b^\mu{}_\rho\, x^\rho\partial_\mu = b^{\mu\rho}\, x_\rho\partial_\mu = b^{\mu\rho}\, x_{[\rho}\partial_{\mu]} = -\frac{1}{2}b^{\rho\mu}(x_\rho\partial_\mu - x_\mu\partial_\rho) \equiv -\frac{1}{2}b^{\rho\mu}\vec{L}_{\rho\mu} \tag{22}$$

o sea como combinación lineal de los $D(D-1)/2$ generadores independientes $\vec{L}_{\rho\mu} \equiv x_\rho\partial_\mu - x_\mu\partial_\rho$ con $\rho < \mu$ (pues $\vec{L}_{\rho\mu} = -\vec{L}_{\mu\rho}$, y también $b^{\rho\mu} = -b^{\mu\rho}$, o sea que hay sólo $D(D-1)/2$ componentes independientes).

Las **relaciones de conmutación** entre los generadores $\vec{L}_{\mu\nu}$ son (usando $[\eta_{\rho\chi}x^\chi\partial_\mu, \eta_{\nu\beta}x^\beta\partial_\sigma] = \eta_{\rho\chi}\eta_{\nu\beta}\ [x^\chi\partial_\mu, x^\beta\partial_\sigma] = \eta_{\rho\chi}\eta_{\nu\beta}\ \left(x^\chi(\partial_\mu x^\beta)\partial_\sigma - x^\beta(\partial_\sigma x^\chi)\partial_\mu\right) = (x_\rho\eta_{\nu\mu}\partial_\sigma - x_\nu\eta_{\rho\sigma}\partial_\mu)$):

$$
\begin{aligned}
[\vec{L}_{\rho\mu}, \vec{L}_{\nu\sigma}] &= [\eta_{\rho\chi}x^\chi\partial_\mu - \eta_{\mu\chi}x^\chi\partial_\rho, \eta_{\nu\beta}x^\beta\partial_\sigma - \eta_{\sigma\beta}x^\beta\partial_\nu] \\
&= x_\rho\eta_{\nu\mu}\partial_\sigma - x_\nu\eta_{\rho\sigma}\partial_\mu - (x_\mu\eta_{\nu\rho}\partial_\sigma - x_\nu\eta_{\mu\sigma}\partial_\rho) - (x_\rho\eta_{\sigma\mu}\partial_\nu - x_\sigma\eta_{\rho\nu}\partial_\mu) + (x_\mu\eta_{\sigma\rho}\partial_\nu - x_\sigma\eta_{\mu\nu}\partial_\rho) \\
&= \eta_{\mu\nu}\vec{L}_{\rho\sigma} - \eta_{\rho\nu}\vec{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\rho\sigma}\vec{L}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\sigma}\vec{L}_{\rho\nu}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Vemos explícitamente que el subespacio de vectores generado por los generadores $\vec{L}_{\mu\nu}$ es cerrado ante conmutadores. El vector de Killing con $a^\mu = 0$ pertenece a dicho subespacio. Y vemos explícitamente como son las relaciones de conmutación: Son las que corresponden al **álgebra de Lie de Lorentz $\mathfrak{so}(1,d)$.** [5]

Los $d = D-1$ vectores $\vec{L}_{i0}$ van a terminar siendo los **generadores de Boosts** en el eje i y los $d(d-1)/2$ generadores $\vec{L}_{ij}$ van a terminar siendo los **generadores de rotaciones espaciales** en el plano $i-j$. [6]

Ahora, consideremos el vector de Killing con $a^\mu \neq 0$, que lo podemos escribir de la forma:

$$
\vec{K} = a^\mu\partial_\mu - \frac{1}{2}b^{\nu\sigma}\vec{L}_{\nu\sigma} \tag{27}
$$

[5] Notemos que logramos representar el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,d)$ en campos de vectores. También podríamos haber representado dicho álgebra de Lie en matrices, estudiando el subespacio de matrices $\{\bar{\bar{b}}\ :\ \bar{\bar{b}}^t = -\bar{\bar{\eta}}\ \bar{\bar{b}}\ \bar{\bar{\eta}}\}$. Podríamos haber visto que una base de este subespacio son las $D(D-1)/2$ matrices $\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma}$ con $\rho < \sigma$ (considerando $\bar{\bar{L}}_{\sigma\rho} = -\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma}$) con elementos de matriz $(\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -\eta_{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho + \eta_{\rho\nu}\delta^\mu{}_\sigma$, cuyas relaciones de conmutación son $[\bar{\bar{L}}_{\rho\mu}, \bar{\bar{L}}_{\nu\sigma}] = \eta_{\mu\nu}\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma} - \eta_{\rho\nu}\bar{\bar{L}}_{\mu\sigma} + \eta_{\rho\sigma}\bar{\bar{L}}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\sigma}\bar{\bar{L}}_{\rho\nu}$, o sea las mismas que eq. (23) pero representadas en matrices.

Luego podemos expresar cualquier matriz $\bar{\bar{b}}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,d) = \{\bar{\bar{b}}\ :\ \bar{\bar{b}}^t = -\bar{\bar{\eta}}\ \bar{\bar{b}}\ \bar{\bar{\eta}}\}$ como combinación lineal de estas matrices: $\bar{\bar{b}} = -\frac{1}{2}b^{\rho\sigma}\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma}$ (con $b^{\sigma\rho} = -b^{\rho\sigma}$; comparando $b^\mu{}_\nu = (\bar{\bar{b}})^\mu{}_\nu = -\frac{1}{2}b^{\rho\sigma}(\bar{\bar{L}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ se llega a que en efecto los coeficientes de la combinación lineal son $b^{\rho\sigma} \equiv \eta^{\sigma\beta}b^\rho{}_\beta$). Entonces, podemos expresar al vector 22 como

$$
\vec{K}\Big|_{a^\mu=0} = b^\mu{}_\rho\ x^\rho\partial_\mu = -\frac{1}{2}b^{\nu\sigma}(\bar{\bar{L}}_{\nu\sigma})^\mu{}_\rho\ x^\rho\partial_\mu = -\frac{1}{2}b^{\nu\sigma}(\bar{\bar{L}}_{\nu\sigma})^{\mu\rho}\ x_\rho\partial_\mu \equiv -\frac{1}{2}b^{\nu\sigma}\vec{L}_{\nu\sigma} \tag{24}
$$

donde identificamos al final a

$$
\vec{L}_{\nu\sigma} \equiv (\bar{\bar{L}}_{\nu\sigma})^{\mu\rho}\ x_\rho\partial_\mu = (-\delta^\mu{}_\nu\delta^\rho{}_\sigma + \delta^\rho{}_\nu\delta^\mu{}_\sigma)\ x_\rho\partial_\mu = x_\nu\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\nu \tag{25}
$$

cuya definición coincide con eq. (22) como era esperado.

[6] En caso de que $D = 1 + d = 4 \iff d = 3$, podemos definir con los generadores $\vec{L}_i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\vec{L}_{jk}$ ($\implies \vec{L}_{ij} = -\epsilon_{ijk}\vec{L}_k$) y $\vec{K}_i \equiv -\vec{L}_{0i}$, donde el vector $\vec{L}_i$ se interpreta como el generador de rotaciones alrededor del eje i, y el $\vec{K}_i$ como el generador de boosts en el eje i. Las relaciones de conmutación se pueden escribir en términos de $\vec{L}_i, \vec{K}_i$ de la forma:

$$
[\vec{L}_i, \vec{L}_j] = \epsilon_{ijk}\vec{L}_k \quad , \quad [\vec{L}_i, \vec{K}_j] = \epsilon_{ijk}\vec{K}_k \quad , \quad [\vec{K}_i, \vec{K}_j] = -\epsilon_{ijk}\vec{L}_k \tag{26}
$$

Podemos ver una representación de estos generadores en matrices en https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation#The_Lie_group_SO+(3,1).

O sea como combinación lineal de los $D + D(D-1)/2 = D(D+1)/2$ generadores $\{\partial_\mu, \vec{L}_{\nu\sigma}\}$. Podemos definir al generador $\vec{P}_\mu \equiv \partial_\mu$, que es en esencia el **generador de traslaciones** en la coordenada x^μ.

Ahora nuestro álgebra de Lie consiste en los $D(D-1)/2$ generadores $\vec{L}_{\mu\nu}$ del álgebra de Lie de Lorentz $\mathfrak{so}(1, D-1)$, y también los nuevos D generadores $\vec{P}_\mu \equiv \partial_\mu$ que son generadores de traslaciones. La denominamos como el **álgebra de Lie de Poincaré** $\text{Lie}(\mathcal{P}) = \mathcal{K}_\eta$, y **veremos que generan el grupo de Poincaré, que deja a la métrica η invariante.**

Ahora que tenemos nuevos generadores $\vec{P}_\mu \equiv \partial_\mu$, tenemos que sacar las relaciones de conmutación entre los nuevos generadores entre sí y entre los nuevos $\vec{P}_\mu \equiv \partial_\mu$ y los viejos $\vec{L}_{\mu\nu}$. Las relaciones de conmutación entre los viejos generadores de Lorentz $\vec{L}_{\mu\nu}$ ya las deducimos en 23. Primero, es trivial que $[\vec{P}_\mu, \vec{P}_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, y segundo se tiene $[\vec{L}_{\rho\sigma}, \vec{P}_\mu] = [x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho, \partial_\mu] = -\eta_{\mu\rho}\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\rho = -\eta_{\mu\rho}\vec{P}_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\vec{P}_\rho$. En definitiva, tenemos que las **relaciones de conmutación** entre los generadores del álgebra de Lie de **Poincaré** son [7] [8]:

$$
\begin{aligned}
[\vec{L}_{\rho\mu}, \vec{L}_{\nu\sigma}] &= \eta_{\mu\nu}\vec{L}_{\rho\sigma} - \eta_{\rho\nu}\vec{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\rho\sigma}\vec{L}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\sigma}\vec{L}_{\rho\nu} \\
[\vec{L}_{\rho\sigma}, \vec{P}_\mu] &= -\eta_{\mu\rho}\vec{P}_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\vec{P}_\rho \\
[\vec{P}_\mu, \vec{P}_\nu] &= 0
\end{aligned} \tag{28}
$$

[7]En contexto de QFT o Quantum mechanics, se suele añadir un factor $-i$ en la definición de los generadores de una cierta álgebra de Lie. Por ejemplo, $P_\mu = -i\partial_\mu$. Esto es porque en dichos contextos se buscan representaciones unitarias en algún espacio de Hilbert de dicha álgebra de Lie y su grupo correspondiente (que se obtiene de exponenciar), en cuyo caso la representación de los generadores (con el factor $-i$) son operadores hermíticos en dicho espacio de Hilbert, por lo que se interpretan como observables físicos cuyos posibles valores son los autovalores (reales) del operador.

Acá no añadimos ese factor $-i$ porque iba a ser molesto.

[8]Ya que estamos, vamos a irnos bien fuerte de tema por un ratito: Una base importante de QFT (explicada muy bien en el cap. 2 del vol. 1 de QFT de Weinberg) es entender cuales son las representaciones unitarias del álgebra de Lie de Poincaré. Básicamente porque si queremos mezclar mecánica cuántica con relatividad especial, necesitamos saber como transforma un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert ante transformaciones de Poincaré (transformaciones de Lorentz + traslaciones), porque es la simetría de relatividad especial.

Y éstas representaciones unitarias (de interés físico) del álgebra de Lie de Poincaré en espacios de Hilbert están etiquetadas por dos números cuánticos (m^2, s) (serían el análogo al semi-entero j que etiqueta representaciones V_j de $\mathfrak{su}(2)$), que se interpretan como la masa $m^2 \geq 0$ (que es el autovalor del operador $-P^2 = -P^\mu P_\mu$, que conmuta con todos, luego es un operador de Casimir), y como el spin s (en caso massless $m = 0$, el s se interpreta como la helicidad). O sea, vemos que de estas representaciones unitarias, salen naturalmente dos propiedades súper importantes de las partículas: La masa y el spin (o helicidad).

2.1.3. Isometrías: Grupo de Poincaré

Si buscamos calcular cuales son las **isometrías** $\alpha_\lambda = \exp(\lambda \vec{K})$ que se obtienen de **exponenciar estos vectores de Killing**, debemos resolver:

$$\left. \frac{d\alpha^\beta_\lambda(x)}{d\lambda} \right|_\lambda = K^\beta(\alpha_\lambda(x)) = a^\beta + b^\beta{}_\rho \alpha^\rho_\lambda(x) \tag{29}$$

con la condición inicial $\alpha^\beta_0(x) = x^\beta$. O sea sacar curvas integrales. Integrando lo anterior, nos da:

$$\alpha^\beta_\lambda(x) = a^\beta \lambda + \left(\exp\left(\lambda \bar{\bar{b}}\right)\right)^\beta{}_\rho x^\rho \equiv a^\beta \lambda + \Lambda^\beta{}_\rho(\lambda)\ x^\rho \ , \tag{30}$$

con

$$\bar{\bar{\Lambda}} \equiv \exp(\lambda \bar{\bar{b}}) \iff \Lambda^\beta{}_\rho = \delta^\beta{}_\rho + \lambda\ b^\beta{}_\rho + \frac{\lambda^2}{2!}\ b^\beta{}_\nu b^\nu{}_\rho + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\ b^\beta{}_{\nu_1} b^{\nu_1}{}_{\nu_2} (\cdots) b^{\nu_{k-1}}{}_\rho \tag{31}$$

Notemos que la condición $\bar{\bar{b}}^t = -\bar{\bar{\eta}}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{\eta}}$ se traduce a: $\bar{\bar{\Lambda}}^t = \exp(\lambda \bar{\bar{b}}^t) = \exp(-\bar{\bar{\eta}}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{\eta}}) = \bar{\bar{\eta}} \exp(-\lambda \bar{\bar{b}})\bar{\bar{\eta}} = \bar{\bar{\eta}}\bar{\bar{\Lambda}}^{-1}\bar{\bar{\eta}}$, o equivalentemente la condición:

$$\bar{\bar{\Lambda}}^t\ \bar{\bar{\eta}}\ \bar{\bar{\Lambda}} = \bar{\bar{\eta}} \tag{32}$$

Es decir, vemos que la condición es que $\bar{\bar{\Lambda}}$ deje invariante a la métrica $\bar{\bar{\eta}}$. A su vez, esta es la condición para que $\bar{\bar{\Lambda}}$ **pertenezca al grupo propio de Lorentz** $SO^\uparrow(1, D-1)$ [9]

Luego, **la transformación más general de coordenadas que deja invariante a la métrica de Minkowski** (conectada con la identidad) es de la forma (eligiendo $\lambda = 1$):

$$y^\beta(x) = \Phi^\beta(x) = \alpha^\beta_1(x) = a^\beta + \Lambda^\beta{}_\rho\ x^\rho = a^\beta + \left(\exp\left(\bar{\bar{b}}\right)\right)^\beta{}_\rho x^\rho \ , \tag{33}$$

con $\Lambda = \exp\left(\bar{\bar{b}}\right) \in SO^\uparrow(1, D-1)$ transformación propia de Lorentz, y a^β es simplemente una traslación de la coordenada β.

Estas transformaciones, descriptas por (Λ, a), **forman el grupo de Poincaré de transformaciones de Lorentz más traslaciones**. Se puede mostrar que su ley de producto mezcla

[9] Este grupo es la componente conexa de la identidad del grupo total $O(1, D-1)$ de transformaciones lineales que dejan a $\bar{\bar{\eta}}$ invariante. Los elementos $\bar{\bar{\Lambda}} \equiv \exp(\lambda \bar{\bar{b}})$ están conectados con la identidad porque se puede ir variando λ desde 0 a λ, formando una curva que conecta la identidad con $\bar{\bar{\Lambda}} \equiv \exp(\lambda \bar{\bar{b}})$.

Las transformaciones de $O(1, D-1)$ que no están conectadas con la identidad, se obtienen de aplicarle el mapa de inversión temporal T (que transforma a las coordenadas como $T(t, x^i) = (-t, x^i)$) y/o el mapa paridad P (que transforma a las coordenadas como $P(t, x^i) = (t, -x^i)$) a una transformación propia de $SO^\uparrow(1, D-1)$. Los mapas T, P no están conectados con la identidad, son transformaciones discretas y no continuas.

Hay 4 componentes conexas de $O(1, D-1)$: La componente conexa $SO^\uparrow(1, D-1)$ de la identidad ; la que sale de aplicarle P a $SO^\uparrow(1, D-1)$; la que sale de aplicarle T a $SO^\uparrow(1, D-1)$; y la que sale de aplicarle TP a $SO^\uparrow(1, D-1)$.

un poco la parte de Lorentz con la de traslaciones de la forma $(\Lambda', a') \cdot (\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a')$, lo cual es natural ya que los generadores $\vec{L}_{\mu\nu}$ de Lorentz y $\vec{P}_\rho$ de traslaciones no conmutan. El grupo de Poincaré se escribe a veces como $\mathcal{P}$, y a veces como $\mathbb{R}^D \rtimes SO^\uparrow(1, D-1)$ para la componente conexa de la identidad [10].

Pueden ver de ejer que pasa si exponencian algún generador como $\vec{L}_{01}$ para verificar que obtienen un boost en x.

2.2. Esfera S^2: Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, y grupo de rotaciones $SO(3)$

Les dejo de ejercicio (de hecho es el ejer 20, pero les cuento que es lo que debería darles para interpretarlo) mostrar que los **vectores de Killing de la esfera S^2** son todas las combinaciones lineales (con coeficientes constantes) de los generadores:

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_x &= -z\partial_y + y\partial_z = -\sin(\varphi)\partial_\theta - \operatorname{cotg}(\theta)\cos(\varphi)\partial_\varphi \\
\vec{R}_y &= z\partial_x - x\partial_z = \cos(\varphi)\partial_\theta - \operatorname{cotg}(\theta)\sin(\varphi)\partial_\varphi \\
\vec{R}_z &= -y\partial_x + x\partial_y = \partial_\varphi
\end{aligned}
\tag{34}
$$

donde los escribimos en coordenadas cartesianas (x, y, z) y en coordenadas angulares (θ, φ) (estas últimas no están bien definidas en los polos $\theta = 0, \pi$). **El vector $\vec{R}_i$ genera rotaciones alrededor del eje i.** Las relaciones de conmutación son:

$$
[\vec{R}_i, \vec{R}_j] = -\epsilon_{ijk}\vec{R}_k \tag{35}
$$

que son las del álgebra $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$, o sea las mismas relaciones de conmutación que las matrices de Pauli (a menos de factores $\pm i$ que se absorben). O sea que **el álgebra de Lie de vectores de Killing de S^2 es $\mathcal{K}_g = \mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$.**

Al exponenciar estos vectores, obtenemos el grupo $SO(3)$ de rotaciones espaciales. Ese es nuestro grupo de isometrías en la esfera S^2, lo cual heurísticamente tiene mucho sentido.

El ejemplo más fácil es ver que si se exponencia $\vec{R}_z = \partial_\varphi$ se obtienen traslaciones en la coordenada φ (dejando obviamente a θ constante), lo cual es precisamente una rotación alrededor del eje z.

Una propiedad muy importante y muy útil para la guía 6 es que si tenemos una geodésica que parte de $p \in M = S^2$ con vector tangente inicial $\vec{P}|_p \in T_p(M)$, entonces podemos rotar los ejes x, y, z de forma tal que las coordenadas del punto p sean $(x, y, 0)$ (o sea que tenga $z_p = 0$), y de forma tal que $P_z|_p = 0$ (o sea que la velocidad inicial con índice abajo no tenga

[10] Donde el símbolo $\rtimes$ es un producto semidirecto de grupos, justamente nos dice que en el producto del grupo las dos componentes del producto se mezclan de alguna forma. El grupo total de Lorentz, con todas las componentes conexas, sería $\mathbb{R}^D \rtimes O(1, D-1)$.

componente en z). En otras palabras, elegir el eje z de forma que el punto p esté en el ecuador (en $\theta = \pi/2$), y de forma que la velocidad inicial con índice abajo P_μ apunte en el ecuador. Luego, tenemos que se conservan (en la trayectoria de la geodésica) la cantidad $P_\mu(\vec{R}_z)^\mu = P_\varphi = \text{cte} = P_\varphi|_p \equiv L$, y también las cantidades $P_\mu(\vec{R}_x)^\mu = -zP_y + yP_z = \text{cte} = (-zP_y + yP_z)|_p = 0$ y $P_\mu(\vec{R}_y)^\mu = zP_x - xP_z = \text{cte} = (zP_x - xP_z)|_p = 0$ donde en los últimos dos pasos se usó $z|_p = 0$ y $P_z|_p = 0$. En consecuencia, se tiene que (usando ahora coordenadas angulares) $0 = \cos(\varphi)(P_\mu(\vec{R}_y)^\mu) - \sin(\varphi)(P_\mu(\vec{R}_x)^\mu) = P_\mu(\cos(\varphi)(\vec{R}_y)^\mu - \sin(\varphi)(\vec{R}_x)^\mu) = (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))P_\theta + 0 \cdot P_\varphi = P_\theta$.

En definitiva, que en una geodésica que parte de $p \in M = S^2$ con vector tangente inicial $\vec{P}|_p \in T_p(M)$, si elegimos los ejes x, y, z de forma que $z_p = 0$ y $P_z|_p = 0$, la simetría de la métrica ante rotaciones nos dice que tenemos:

$$P_\varphi = \text{cte en geodésica} = P_\varphi|_p \equiv L \quad , \quad P_\theta = 0 = \text{cte en geodésica} \tag{36}$$

3. Simetría maximal

Es válido que el **conjunto de vectores de Killing $\mathcal{K}_g$ es un álgebra de Lie** (o sea un espacio vectorial en $\mathbb{R}$ - coeficientes reales constantes- que es cerrado ante el conmutador), **cuya dimensión está acotada por**

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_g) \leq \frac{n(n+1)}{2} \tag{37}$$

siendo $n = \dim(M)$.

O sea, vemos que la cantidad de generadores de simetrías de la métrica está acotada y es finita.

Pregunta en clase para uds: Porqué puede ocurrir que esta dimensión pueda ser mayor a la dimensión de M, que es igual a la dimensión del espacio tangente $T_pM = \{\vec{V}|_p = V^\mu \partial_\mu|_p \ : \ V^\mu \in \mathbb{R}\}$ de vectores en un punto $p \in M$? Respuesta en clase: Porque en realidad los vectores de Killing $\vec{K} \in \mathcal{K}_g \subseteq \Gamma(TM)$ son campos de vectores (no vectores en un sólo punto p), que pertenecen al conjunto $\Gamma(TM)$ de campos de vectores $\vec{V} = V^\mu(x)\partial_\mu$ cuyos coeficientes $V^\mu(x)$ son funciones, no son constantes reales. Entonces no podemos escribir a $\vec{V}$ como combinación lineal con coeficientes constantes reales de n vectores, porque por ejemplo los infinitos campos de vectores $\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x, x^3\partial_x, \cdots, x^r\partial_x, \cdots$ son independientes entre sí. Luego $\Gamma(TM)$ es un espacio vectorial (más aún es un álgebra de Lie pues es cerrado ante $[,]$) que posee dimensión ∞. Entonces, lo que nos dice la ecuación $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_g) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ es que el subálgebra de Lie $\mathcal{K}_g$ dada por los campos de vectores de Killing posee dimensión finita acotada, a diferencia de la dimensión del álgebra de Lie $\Gamma(TM)$ de todos los campos de vectores.

A nivel del grupo, esto significa que la dimensión del grupo de isometrías ISO(M, g) (que es la misma que la del álgebra de Lie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_g)$, pues $\mathcal{K}_g = \text{Lie}(\text{ISO}(M, g))$) está acotada y es finita. A diferencia del grupo de todos los difeomorfismos Diff(M), que es un grupo de Lie de dimensión ∞, o sea hay ∞ cambios de coordenadas posibles.

Definimos entonces, de forma natural, que una variedad con métrica (M, g) se dice **maximalmente simétrica** (max. sim. ; space form se dice a veces) si satura la cota: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_g) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. O sea, es **lo más simétrico posible.**

Al final, termina pasando que estas $n(n+1)/2 = n + n(n-1)/2$ simetrías se separan en n traslaciones y $n(n-1)/2$ rotaciones.

Una **propiedad simpática**:

$$(M, g) \text{ max. sim. } \iff R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \text{ con } R = \text{escalar de Ricci} = \text{cte en M} \tag{38}$$

A su vez implica que si (M, g) es max. sim. , el tensor de Ricci tiene la pinta: $R_{\sigma\nu} = \dfrac{R}{n}\, g_{\sigma\nu}$, es proporcional a la métrica (pueden mostrar ésto último).

Localmente (sin considerar preguntas sobre topología, propiedades globales de M), un espacio maximalmente simétrico de una cierta dimensión y signatura (en breve diremos que es esto último) está totalmente especificado por la constante $R =$ cte en M escalar de Ricci.

Para no preocuparnos por preguntas de topología acerca de propiedades globales de M, podemos asumir de ahora en más que M es simplemente conexo.

Luego, **podemos clasificar las variedades con métrica** (M, g) **(con dimensión de** M **y signatura de la métrica determinadas) maximalmente simétricas simplemente conexas, con el signo de** $R =$ **cte:**

$$\begin{cases} R > 0 & \text{curvatura positiva} \\ R = 0 & \text{espacio plano} \\ R < 0 & \text{curvatura negativa} \end{cases} \tag{39}$$

Vamos a ver en particular que espacios obtenemos de esta clasificación en ciertas signaturas.

Primero, digamos que: La **signatura de la métrica** $(n_-, n_+ = n - n_-)$ viene dada por la cantidad n_- (n_+) de autovalores de la métrica que son negativos (positivos, respectivamente). Esto es independiente de la base y es constante en M, es una propiedad de las variedades con métrica (M, g).

Ahora, concentrémosnos en la clasificación de variedades max. sim. (simplemente conexas) en las dos signaturas más relevantes:

- **Signatura Riemanniana**: $n_- = 0 \iff g(\vec{V}, \vec{V}) = V^\mu V_\mu > 0$ siempre.
- **Signatura Lorentziana**: $n_- = -1$

También se dice en general una signatura pseudo-riemanniana si $n_- \neq 0$. En otras signaturas la clasificación es análoga.

3.1. Clasificación de espacios max. sim. en signatura Riemanniana

Las variedades con métrica (M, g) maximalmente simétricas simplemente conexas con **signatura Riemanniana** y dimensión n se clasifican en:

- **Espacio euclídeo**: $\mathbb{R}^{0,n} = \mathbb{R}^n$. Posee $R = 0$ =cte, es un espacio plano.
- **Esfera** S^n. La podemos ver como

$$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \vec{x}^{\ 2} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (\cdots) + (x^n)^2 = l^2 = \text{cte} > 0\} \tag{40}$$

  una esfera embebida en $\mathbb{R}^{0,n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$.
  Posee $R = \dfrac{n(n-1)}{l^2} = \text{cte} > 0$ curvatura positiva.

- **Espacio hiperbólico** $\mathbb{H}^n$. Lo podemos ver como

$$\mathbb{H}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{1,n} \ : \ \vec{x}^{\ 2} = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (\cdots) + (x^n)^2 = -l^2 = \text{cte} < 0\} \tag{41}$$

  un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{1,n} = \mathbb{M}_{1,n}$ (Minkowski).
  Posee $R = -\dfrac{n(n-1)}{l^2} = \text{cte} < 0$ curvatura negativa.

3.2. Clasificación de espacios max. sim. en signatura Lorentziana

Las variedades con métrica (M, g) maximalmente simétricas simplemente conexas con **signatura Lorentziana** y dimensión n se clasifican en:

- **Espacio de Minkowski**: $\mathbb{R}^{1,n-1} = \mathbb{M}_{1,n-1}$. Posee $R = 0$ =cte, es un espacio plano.
- **Espacio de Sitter** dS_n. Lo podemos ver como

$$dS_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{1,n} \ : \ \vec{x}^{\ 2} = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (\cdots) + (x^n)^2 = l^2 = \text{cte} > 0\} \tag{42}$$

  embebido en $\mathbb{R}^{1,n} = \mathbb{M}_{1,n}$ (Minkowski).
  Posee $R = \dfrac{n(n-1)}{l^2} = \text{cte} > 0$ curvatura positiva.

- **Espacio Anti de Sitter** AdS_n. Lo podemos ver como

$$AdS_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{2,n-1} \ : \ \vec{x}^{\ 2} = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (\cdots) + (x^n)^2 = -l^2 = \text{cte} < 0\} \tag{43}$$

  un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{2,n-1}$ (Notar que hay dos direcciones temporales en $\mathbb{R}^{2,n-1}$).
  Posee $R = -\dfrac{n(n-1)}{l^2} = \text{cte} < 0$ curvatura negativa.